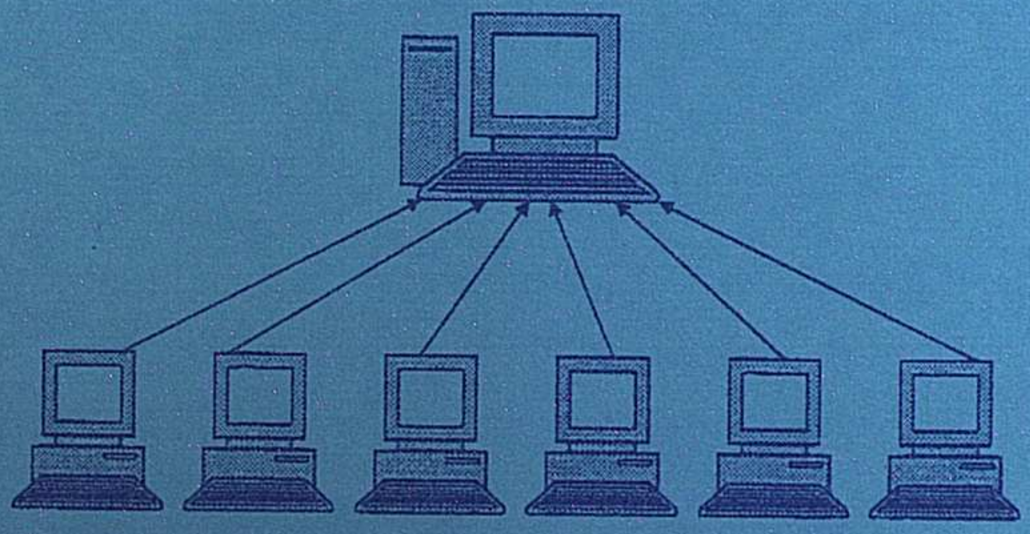
И.Т. Утепбергенов, А.И. Буранбаева, Е. Хабидолда

ЕСЕПТЕУ ЖҮЙЕСІНІҢ СЕНІМДІЛІГІ

(Оқу құралы)



Алматы
2008

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

«М. Тынышпаев атындағы Қазақ көлік және коммуникациялар академиясы» АҚ

И.Т. Утепбергенов, А.И. Буранбаева, Е. Хабидолда

ЕСЕПТЕУ ЖҮЙЕСІНІҢ СЕНІМДІЛІГІ

(Оқу құралы)

Алматы
2008

ӘОК 681.3 (075)
ББК 22.172 я 73
У82

Пікір жазғандар: Д.Н. Шукаев, т.ғ.д., профессор, ҚазҰТУ
С.А. Атанбаев ф.-м.ғ.д., профессор, ҚазҰУ
Б.С. Ахметов т.ғ.д., профессор, ҚазККА

У82 Утепбергенов И.Т., Буранбаева А.И., Хабидолда Е. Есептеу жүйесінің сенімділігі: Оқу құралы. - Алматы: ҚазККА, 2008, - 80 б.

ISBN 978-601-207-176-4

«Есептеу жүйесінің сенімділігі» оқу құралында кездейсоқ тәжірибелердің математикалық моделін оқып – зерттеумен және оны шешумен, сол сияқты ықтималдықтар теориясының (математикалық статистиканың) кері есептерімен де айналысады.

Пәннің зерттеу әдістері тәжірибелер теориясында, өлшеулерде қателіктерде (физиканың статистикалық бөлімдерінде) анықталмаған ситуацияларды негіздеуді оқып – зерттеу және оларға шешім қабылдау пәндерінде, сол сияқты шектік теоремаларды қолданудың әртүрлі шектерін зерттеуде кеңінен қолданады.

ББК 22.172 я 73

Баспаға авторлық нұсқада ұсынылды.

ISBN 978-601-207-176-4

Мазмұны

Кіріспе.. 4
1. Сенімділіктің қолданбалы теориясы.. 5
2. Ықтималдықтар теориясы пәні... 9
2.1Оқиғалар және олардың түрлдері... 9
2.2 Оқиғаларға амалдар қолдану және ол амалдардың қассиеттері. Геометриялық ықтималдық.. 11
2.3 Ықтималдықтың негізгі теоремалары. Қосу және көбейту теоремалары. Толық ықтималдықтын формуласы. Байес формуласы...... 13
2.4 Бернулидің қарапайым схемасы және оның жалпы түрі........................ 18
2.5 Кездейсоқ шамалар және олардың үлестіру заңдары........................... 20
2.6 Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары................................... 26
2.7 Кездейсоқ шамалардың сипаттамалық функциялары және олардын қассиеттері.. 33
2.8 Үлкен сандар заңдары және олардың түрлері.. 35
2.9 Ықтималдықтар теориясының аксиоматикасы....................................... 39
2.10 Математикалық статистиканың шешетін есептері, зерттеу әдістері.. 43
2.11 Белгісіз параметрлерді бағалау түрлері. Статистикалық гипотезаларды тексеру әдістер... 46
2.12 Регресиялық анализ. Регресиялық теңдеулер. Ең аз квадраттар әдісі.. 53
2.13 Қарапайым кездейсоқ процестер. Пуасондын және Викоровтік процестер.. 57
2.14 Қарапайым кездейсоқ кезулер... 62
Пайдаланған әдебиет... 79

Кіріспе

Пәнді оқып – үйрену нәтижесінде студент ықтималдық сызбаларының негізін және есептеулерде оларды таңдай білу принциптерін (кездейсоқ тәжірибелерге байланысты) кездейсоқ шамалардың сандық параметрлерін есептеу әдістерін, ықтималдықтар теориясының шектік теоремаларын (Муавр – Лаплас, Пуассонның шектік теоремаларын, үлкен сандар заңдарының (шектерін) типтерін және орталық теоремаларды) жақсы меңгеріп шығуы қажет. Математикалық статистика бөліміне қатысты, таңдамалар әдістерінің теориялық негізін, бағалаудың сандық сипаттамаларын, сенімділік (аралықтарын) интервалдарын құру, статистикалық болжамдарды тексере білу сияқты оқып – зерттеуге, оларды жақсы меңгеру қажет.

Ғылыми тәжірибелерді жүргізу барысында ықтималдық сызбаларын, кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамаларын және олардың баламаларын қарастырып теориялық зерттеулерде ықтималдықтың шектік тәжірибелерді жүргізу барысында ықтималдық сызбаларын, кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамаларын және олардың баламаларын қарастырып теориялық зерттеулерде ықтималдықтың шектік теоремаларын қолдануды негіздей біліп, вариациялық қатарларды талдауды және зерттеулерде статистикалық әдістерді қолдануды, болжамдарға статистикалық тексерулерді құра білуді, жалпы осы айтылғандарды толық орындай білу қажет.

1. Сенімділіктің қолданбалы теориясы

Қолдану үрдістерінде жоғарғы тиімділікті қамтамасыз ету үшін қажетті бұйымдарды жобалау, дайындау, пайдалану барысында сүйенуге болатын жалпы әдістер мен тәсілдерді зерттейтін ғылыми пән сенімділік теориясы деп аталады. Сонымен қатар, ол құрылғы бөлшектерінің белгілі сапаларының көмегімен құрылғы сапасын есептеудің жалпы әдістерін жасайды.

Сенімжілік теориясы ең алдымен инженер, химия, физика, экономистердің құзырына кіретін кешенді (құрама) ғылым болып табылады. Алайда, СТ мәселелерінің көпшілігі өзінің мәніне байланысты математикалық сипат ала отырып, оларды шешу үшін белгілі математикалық құралдарды және олардың жаңа түрлерін жасауды талап етеді. Осылайша сенімділіктің әр түрлі көрсеткіштерін алдынала болжау, бағалау және тиімділігін арттыру мәселелерін шешуге бағатталған пікірлер және математикалық модельдер мен әдістер жүйесін танытатын сенімділіктің арнайы математикалық теориясы пайда болды.

Сенімділік мәселесі күрделі техникалық жүйелерді дамытудың негізгі бұлағы болып табылады. Сенімділік теориясын қолданбай өндірісті жобалаудың бірқатар мәселелерін шешу және автоматтандырылған басқару жүйесін пайдалану мүмкін емес (құрылымын таңдау және рационалды резервтеу; өндіріс технологиясын бақылау сұрақтарын шешу және өндірістік қосалқы бөлшектерді жабдықтау жүйелерін жобалау; жүйелерді тәжірибелі тексеруді ұйымдастыру).

Инженерлер көзқарасы бойынша сенімділік мынадай түрлерде сипатталуы мүмкін:

1. Уақыттың қажетті периодында ақаусыз жұмыс істеу ықтималдығы;
2. Күш түсу мүмкіндігінің әсері барысында пайда болатын беріктіліктің өзгеру мүмкіндігі;
3. Өзге сипаттамаларға қатысты сенімділіктің маңыздылығы;
4. Сенімділіктің берілген деңгейіне жету үшін қажетті құны;
5. Сериялық жолға қойылған бұйымдардың сенімділік деңгейінің конструкцмяда қабылданған деңгейге жақындық дәрежесі (сапа);
6. Жеткізіліп берілгеннен кейін, яғни жұмысқа қосылғаннан кейін өнімді тиімді пайдалану.

Осы сипаттамаларды кеңінен қарастырайық.

1. Құрамына сақтау, жөндеу, жұмыс уақыттары кіретін қажетті жұмыс циклі уақыт түсініктерімен анықталуы тиіс. Мысалы, істен шығулар арасындағы орташа уақыт пен оның ақауларды іздеу мен жою уақыттарына қатынасы. Қондырғы жұмыс қалпына қосылғанда жүйе жұмыс істеуге дайын болуы тиіс. Әрине, бүкіл жұмыс циклі барысындағы ақаусыз жұмыс істеу ықтималдығын анықтау қажет.
2. Істен шығулар, пайдаланылып отырған материалдың беріктігі оған түскен ішкі және сыртқы күштердің әсеріне шыдамаған жағдайда

пайда болады. Бұл күштер жобалау сатысында материалдың беріктілігімен салыстырылуы тиіс.

3. Қондырғының алғашқы пайдалану сәтінен бастап қызмет жасаушы мамандардың біліктілігімен, ақаусыздыққа тексеру жиілігімен, қосалқы бөлшектерімен, пайдалану барысындағы істен шығуларды болжаумен және тағы басқа байланысты қиындықтар туындайды. Бұл мәселелер қондырғы тұтынушының қолына тиген сәттен бастап-ақ сенімділікке әсер етеді. Ол пайдалану үрдісінде сенімділікке ақша төлейді және бұл ақша қондырғының бастапқы бағасымен салыстырылуы тиіс.

Барлық осы факторларды құндық мәнмен бейнелеуге болады.

Осыған сәйкес сенімділік құны қай кезде тиімді деген сұрақ Сенімділікке деген үлкен талаптар сынықтың, өндірістің, материалдың туындайды. және қайта өңдеудің құнын арттырады. Алайда, осыған байланысты қосалқы бөлшектерді жөндеудің, істен шығуларды болжаудың, пайдаланудың және т.б. құны кемиді.

Мысалы, электронды жүйенің сенімділігі:

1. Толық құнға;
2. Жасау, өндіріс және сынықтың бастапқы құнына;
3. Толық құнның ең кіші мәні пайдалану құнына тәуелді.

Зерттеу объектілері:

1. Автомобиль, электронды есептеуіш техника, блок, аспап, агрегат, торап, элементтерді бұйымдар деп түсінуге болады. Яғни қандайда болсын бір техникалық құрылғы.
2. Элемент – берілген функцияларды орындайтын, сенімділіктің сипаттамасына ие және сенімділіктің берілген зерттеулері бойынша болашақта бөлшектенуге жатпайтын зерттеу объектісі.
3. Жүйе – белгілі бір әрекеттерді орындау үшін белгілінген өзара қарым-қатынастағы элементтер жиыны.
4. Объект – сенімділікке байқау, зерттеу, пайдалану, дайындау және жобалау кезеңдерінде қарастырылатын, айқын бір мақсатқа белгіленген зат.
5. Қалпына келтірілмейтін объект – істен шығулар пайда болған жағдайда жұмыс қабілеттілігі қарастырылып отырған оқиғаға байланысты қайтадан қалпына келмейтін объект.
6. Қалпына келетін объект – істен шығулар пайда болған жағдайда жұмыс қабілеттілігі қарастырылып отырған оқиғаға байланысты қайтадан қалпына келетін объект.
7. Жөдеуге келетін объект – істен шығуы пайда болған жағдайда ақаусыздығы мен жұмыс қабілеттілігі қайтадан қалпына келетін объект.
8. Жөндеуге келмейтін объект – істен шығуы пайда болған жағдайда немесе зиян келтірілгенде жұмыс қабілеттілігі экономика-технологиялық және өзгеде себептермен қайтадан қалпына келмейтін объект.

Күрделі бағдарламалық комплекстердің функциялау сенімділігінің анализі, программалық қамтама есебінің сенімділігі ақпаратты құралдардың сенімділігінен төмен болатынын көрсетеді. Сондықтан программалық қамтама есептеуінің ескерілмеген сенімділігі жиі көтерілуге әкелді.

Қазіргі кезде программалық қамтама есебі сенімділігінің жақсы құрылған стандартты тәсілдері жоқ. Негізінен бағдарламалық қателер жобалау қателеріне жатады. Сондықтан істен шығудың интенсивтілігін болжау қиын. Программалық қамтама есебінің табиғи істен шығуының техникалық құралдардың істен шығу табиғатынан өзгешелігі: программалық қамтама есебі техникалық құралдармен салыстырғанда ескірмейді, сондықтан оған тәсілдерді автоматикалық түрде көшіруге және программалық қамтама есебінің сенімділік анализіне пайдалануға болмайды, арнайы әдістер мен модельдер керек.

Бағдарлама жазылғаннан және жинақталғаннан кейін аппаратурада сыналады. Бірақ практикалық түрде оны барлық режимде, барлық комбинацияларда, олардың барлық тізбектелу мен басқаруларында сынау мүмкін емес.

Автоматтандырылған жүйелер сенімділігін анықтауда имитациялық модельдерді зерттеу аналитикалық нәтижелерге қарағанда одан да жақсы нәтижелерге жетуге мүмкіндік береді. Тораптық аппараты негізінде құрылған екі деңгейлі моделді қарастырамыз. Мұндағы маңыздысы мына түсініктер: оқиға мен шарт.

Оқиға – бағдарламалық қамтамасыздандыру функциялануы кезіндегі орыны, бірақ оның орындалуы үшін кейбір шарттардың орындалуы керек.

Шарт – бұл жүйе жағдайының логикалық сипаттамасы. Ол «ақиқат» немесе «жалған» бола алады.

Бірінші деңгейде программалық қамтамасыздандыру жұмысы модельденеді. Бағдарламаның алгоритмдері мен құрылымдық схемалары негізінде бағдарламалық жабдықтаудың графы құрылады, соңынан Петри торабына ауыстырылады.

Электронды есептеу машинасының жұмысы есептегіш процесске сәйкес келетін модульді қосатын қалқымалы фишканың көмегімен модельденеді.

Модульдің жұмысы модельдің екінші деңгейі бойынша жасалады. Модульдегі процесстер Петри торабы көмегімен көшіріледі, мұнда аппараттық жабдықтардың сенімділігінің ықпалы, кешеннің функционалдануында көрсетілмеген бағдарламалық қателіктердің табылмауы ескеріледі.

Автоматтандырылған жүйенің қалыптан шығу ауыртпалығына немесе бағдарламалық қамтамасыздандыру қателігінің салмақтылығына байланысты модуль, программалық қамтама қалыптан шығу жадайына, не бір қалыпты жұмыс жағдайына өте алады.

Программалық қамтама (Р9) қалыптан шығу жағдайында бақылау жүйесі жұмыс істей бастайды. Ол өз мүмкіндіктеріне орай қалыптан шығуда байқалады. Яғни e9 өтуі t жол береді немесе оның өтуін болжай отырып, t10 өтуін қамтамасыз етеді және модуль P4 қателікті аяқтау күйіне өткізеді. Өздігінен қалпына келтіру программалық қамтама аппараттық ресурстарының мүмкіндіктеріне байланысты өзінің жұмыс қабілеттігін қалпына келтіре отырып t өтуін қамтамасыз етеді немесе t12 (P4) арқылы қате аяқтау күйіне өтеді.

Аппараттық жабдықтар істен шыққан жағдайда өтулердің біреуін шеше отырып барлық P11 позицияға фишка қойылады. Бұл жағдайда модуль P5 авариялық аяқтау күйге көшеді.

Келтірілген модель САПР-жабдықтарының аппараттық және бағдарламалық параметрлер санын еске сақтауға мүмкіндік береді. автоматтандырылған жүйенің құрылымдық схемасы және құрылғылардың сенімділік паратметрлері және тағы басқа жатады.

Толығымен алып қарағанда аппараттық программалық қамтама сенімділігін анықтауға қажетті шарттар:

1. Бастапқы мәліметтерді дайындау (программалық қамтама құрылымы, модульдердің сипаттамалары және жеке құрылғылардың сенімділік сипаттамалары анықталады).
2. Программалық қамтама модулінің күрделелігін бағалау (белгілі модуль бағалары көмегімен).
3. Аналитикалық модульдердің көмегімен программалық қамтама модульдерінің сенімділігін бағалау.
4. Аппараттық жабдықтардың сенімділігін бағалау.
5. Иммитациялық модельге келтіру (мәліметтерді енгізу, екінші деңгей үшін өту ықтималдығын беру).
6. Модельдеуді орындау модельге негізделіп ақпарат жинаудан басталады, істен шығу интенсивтілігі анықталады. Дайын болу коэффициенті, техникалық қолдану коэффициенті, орташа уақыт анықталады.

Объектілердің сенімділігін талдау жұмыстарының табысы сенімділік туралы мәліметтер жинау жүйесінің күйіне тәуелді болды.

Есептеу және модельдеу үшін бастапқы мәлімет болып өңдеу және сынау процесінде жиналған мәліметтер саналады.

Сенімділік бағасының дұрыстығы, өңдеу мен сынау, тексеру мен есептеу және модельдеу арқылы анықталады, өңдеу өрісінен алынған мәліметтер сенімділік талдау жүйесіне байланысты болып келеді.

Өндірісте, сынау кезінде табылған әрбір ақаулыққа ақаулық есептйтін карточка толтырылады. Бұл мәліметтер сенімділік бағасын болжауда түзету енгізуге ППР жоспарлау үшін, ЗИП-тің мөлшерін анықтауға, сенімділік туралы статистикалық мәліметтер жинауға, заттарды түзетуді жетілдіру үшін қолданылады.

Сенімділік туралы мәліметтер жинау және өңдеу жүйелі шара болса, әрі үлгі орындалуын қатал ұстап тұрса, онда ол тиімді болады.

2. Ықтималдықтар теориясы пәні

2.1Оқиғалар және олардың түрлдері

Қазақ және орыс тілдерінде берілген ықтималдықтар теориясы бойынша оқулықтарда пәннің анықтамасы өте қарапайым айтылған. Мысалы: «Кездейсоқ құбылыстардың заңдылығымен айналысқан математиканың бір саласы ықтималдықтар теориясы деп аталады».

Ал, құбылыс ретінде дүниеге нәресте келуін алсақ, онда ұл туының ықтималдылығын $\frac{1}{2}$ деп алуға болады. Өйткені нәресте не ұл, не қыз, яғни екінің бірі дегенмағынада.

Енді статистикалық деректерге жүгінсек, дүниеге келген 100 балалардың дәл жартысы ұл болуы әруақытта орындала бермейді. Бірақ, ұлдар саны сол 50 санынын манында болады. Сол ұлдар санын 100 ге бөлсек статистикалық жиілік $\frac{1}{2}$-ге жақын келеді.

Бұл ұғымдарды түсіндіруді мысалдардан бастайық.

1-мысал.

Теңгені (метал ақшаны) теп-тегіс еденге лақтырайық, сонда мына төмендегі құбылыстарды байқаймыз. Теңгені лақтыру үшін өзімізді, белгілі бір қалыпқа келтіреміз. Одан соң бас бармақпен теңгенің бір ұшын жоғары қарай түртіп жібереміз. Сонда ол шыр көбелек айналып, белгілі бір биіктікке дейін көтеріліп, төмен қарай құлдилап, еденге түседі де, бірнеше рет секіректеп, жалпағынан не тиын жағы, не герб жағы жоғары қарап жатады. Сайып келгенде, теңге жалпағынан жатуы үшін көптеген қимыл әрекеттер жасалады, солардың жиыны комплексті шарт деп аталады. Оның тиын (не герб) жағының жоғары түсуі (жатуы)- осы комплексті шарттың орындалу нәтижесі – оқиға деп аталады.

2-мысал. 760мм қысымдағы суды 100^0 С-ге дейін қыздырсақ, ол буға айналады. Судың буға айналуы-оқиға, ал осы бу пайда болғанға дейінгі барлық әрекеттер жиыны комплексті шарт болады.

Комплексті шарт термині орнына сынау, тәжірибе, эксперимент терминдерін де пайдаланады. Біз көбінесе сынау терминін қолданамыз. Бұдан былай сынау нәтижесін оқиға деп ұғамыз. Әдетте оқиғаларды үлкен әріптер А,В,С,... арқылы, ал бұларға қарама-қарсы оқиғаларды $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$,... арқылы белгілейміз. Мысалы, теңгенің тиын жағының пайда болуы А оқиғасы болса, герб жағының пайда болуы $\bar{A}$ оқиғасымен белгіленеді және т.с.с.

Сынау жүргізілгенде *А* оқиғасы пайда болуы да, пайда болмауы да мүмкін болса, ондай оқиғаны кездейсоқ оқиға деп атайды. Мұндай оқиғаларға 1,2-мысал жатады, өйткені сынау нәтижесінде теңгенің (кубтың) белгіленген жағының пайда боларын күн ілгері айта алмаймыз.

Сынау нәтижесінде оқиға (*A* оқиғасы) сөзсіз пайда болатын болса, ондай оқиғаны ақиқат оқиға дейді. Сынау нәтижесінде оқиғаның (*A* оқиғасы) пайда болуы мүмкін болмаса, ондай оқиғаны мүмкін емес оқиға дейді.

Ақиқат оқиғаны U әрпімен, мүмкін емес оқиғаны V әрпімен белгілеу қабылданылған. Мысалы, қобдишаға салынған ақ шарлардың біреуін алсақ, оның ақ болып шығуы ақиқат оқиға да, басқа түсте болуы мүмкін емес оқиға. Сынау жүргізгенде екі оқиғаның бірі пайда болып, екіншісі пайда болмайтын оқиғаларды үйлесімсіз оқиғалар дейді. Мәселен 2-мысалдағы A_1, A_2 (бірінші және екінші нөмірлі жақтар) оқиғалары-үйлесімсіз оқиғалар. Бұл мысалдағы кез келген екі оқиға да үйлесімсіз. Кез келген екі оқиғасы үйлесімсіз болатын оқиғалар жиынын қос-қостан үйлесімсіз оқиғалар дейді.

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы. Ықтималдықтың классикалық анықтамасын алғаш рет берген Лаплас (1749-1827) еді. Ықтималдықтың бұл анықтамасы тең мүмкіндіктің саны шексіз элементар оқиғалар кеңістігінде қарастырылады және өте қарапайым.

«Тең мүмкіндік» немесе «тең ықтималдық» ұғымдары алғашқы ұғымдарға жатады, олар формальды анықтама беруді қажет етпейді. Жалпы сынау нәтижесінде бірнеше элементар оқиғалар (нәтижелер, жағдайлар) пайда болуы мүмкін болса және олардың біреуінің пайда болу мүмкіндігінің екіншісіне қарағанда, артықшылығы бар деп айта алмайтын болсақ, басқаша айтқанда, сынау нәтижесінің симметриялы қасиеті болса, мұндай элементар оқиғалар тең мүмкіндікті делінеді. Бұған алғашқыда келтірілген 2-мысал айғақ. Өйткені кубтың әрбір жағының пайда болу мүмкіндігі бірдей. Сондықтан бұлар тең мүмкіндікті (яғни тең ықтималдықты) элементар оқиғалар болады. $e_1, e_2, \dots e_n$ элементар оқиғалары тең мүмкіндікті, қос-қостан үйлесімсіз және оқиғалардың толық тобын (системасын) құраса, онда ол оқиғаларды сынаудың мүмкін (мүмкін болатын) нәтижелерінің толық тобы немесе элементар оқиғалар кеңістігі деп айтатынын көрдік. Сонда $\{\omega\}=\{e_1, e_2, \dots e_m\}$ кеңістігіндегі элементар оқиғалардың жалпы санын $n=\{\omega\}$ арқылы белгілесек, әрбір элементар оқиғаның шығу мүмкіндігінің мөлшері, ықтималдығы, $P=\dfrac{1}{n\{\omega\}}$. Ал тең мүмкіндікті, үйлесімсіз және оқиғалардың толық тобын құрайтын $e_1, e_2, \dots, e_n$ элементар оқиғалардың біреуі я бірнешеуі бір *A* оқиғасының пайда болуын тудыруы мүмкін, яғни екінші сөзбен айтқанда, *A* оқиғасы тең мүмкіндікті бірнеше элементар оқиғаларға бөлінеді және олардың кез келген біреуінің пайда болуынан *A* оқиғасының пайда болуы шығатын болады. Мысалы, кубты бір рет лақтырғанда оның кез келген тақ нөмірі e_1, e_3, e_5 пайда болуынан *A* оқиғасы пайда болсын. Былайша айтқанда, *A* оқиғасы тақ нөмірлі e_1, e_3, e_5 үш оқиға бөлініп отыр. Бұл тақ нөмірлі элементар оқиғаларды осы A оқиғасының пайда болуына қолайлы оқиғалар дейміз. Бұлардың санын $m\{\omega\}$ арқылы белгілейміз $(m\{\omega\}=3)$.

2.2 Оқиғаларға амалдар қолдану және ол амалдардың қассиеттері. Геометриялық ықтималдық

Өткен сабақта айтылған оқиғаларға қолданылатын бинарлық амалдарға келейік:

1) А және В оқиғаның қосындысы (немесе бірігуі) деп олардың ең болмағанда біреуінің орындалуын айтып, келесі түрде белгілейміз:

$A+B$, немесе $A\cup B$.

Ал, оқиғалар саны көп болса, онда $\sum_{k=1}^{n} A_k = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n$

немесе

$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ кейде $n \longrightarrow \infty$ болуы да мүмкін.

2) А және В оқиғаларының көбейтіндісі (немесе қиылысуы) деп олардың екеуі де бірдей орындалуын айтып, келесі түрде белгілейміз:

$A\cdot B$, немесе $A\cap B$.

Ал, оқиғалар саны көп болса, онда $\prod_{k=1}^{n} A_k = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n$ немесе

$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ кейде $n \longrightarrow \infty$ болуы да мүмкін.

3) А және В оқиғаларының айырымы деп А ның орындалып, ал В ның орындалмауын айтып, келесі түрде белгілейміз: $A\setminus$B.

4) Санау нәтижесінде орындалған В оқиғасы екінші бір А оқиғаның орындалуын қамтамасыз етсе, онда «В оқиғасы А ны ілестіреді» деп айтып, келесі түрде белгілейміз: $A\subseteq B$

5) Мына жағдайлардың орындалуын түсіну қиын емес

а) $A\subseteq A$

б) $C\subset B$ және $B\subset A \Rightarrow C\subset A$

с) $B\subset A \Rightarrow A+B=A$, *ал* $AB=B$

д) $A\subset B$ және $B\subset A \Rightarrow A=B$

6) $A+\overline{A}=\Omega$, *ал* $A\cdot\overline{A}=\varnothing$.

$\overline{\Omega}=\varnothing$, *ал* $\overline{\varnothing}=A$ *кезкелген* A, $\overline{\overline{A}}=A$.

7) $A+B=B+A$, $A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$,

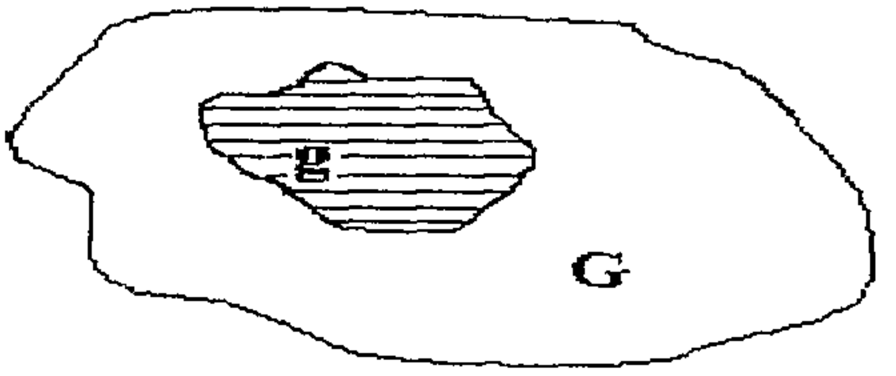
$A\cdot B=B\cdot A$, $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$,

$$(A+B)C = AC + BC,\ \ AB + C = (A+C)(B+C).$$

8) $A \supset B \Rightarrow \overline{A} \supset \overline{B},\ \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

9) $\Omega \setminus C = \overline{C}$, А мен В үйлесімсіз болса, онда $A \cdot B = \varnothing$.

Ықтималдықтың классикалық анықтамасын сынау нәтижесінің саны шексіз тең мүмкіндікті (тең ықтималды) тәжірибеге қолдануға болмайды. Осындай жағдайды сипаттауға ықтималдықтың геометриялық анықтамасы ыңғайлы. Ол үшін біз G жиынында нүкте бірқалыпты үлестірілген деп ұйғарамыз, ал мұның қандай да ішкі жиынын «g» деп белгілеуге болады (1-сурет). Ол уақытта G облысына лақтырылған нүктенің «g» облысына түсуін А оқиғасы деп белгілеп, оның ықтималдығына мынадай анықтама беруге болады.



1-сурет

Анықтама. g обылысына лақтырылған кездейсоқ нүктенің (А-оқиғасы) осы обылысқа түсу ықтималдығы g өлшемінің G обылыс өлшеміне (ұзындық, аудан, көлем) қатынасына тең, яғни

$$\mathbf{P}\,(A) = \frac{\textit{өлш. } g}{\textit{өлш. } G} \qquad (1)$$

Мұнда да ықтималдықтың классикалық анықтамасында айтылған үш қасиет орын алды.

1^0. **P** (g) теріс таңбалы емес, яғни **P** (g)≥ 0.

2^0. Ақиқат оқиға ықтималдығы бірге тең, яғни P(G)=1.

3^0. Қос-қостан үйлесімсіз оқиғалар қосындысының ықтималдығы олардың ықтималдықтарының қосындысына тең.

Бұл соңғы қасиет үйлесімсіз оқиғалар саны шекті және саналымды шексіз болса да орын алады дейміз.

Геометриялық ықтималдықтар схемасы астрономия, атомдық физика, биология және т.с.с салаларда пәрменді қолданыс тауып отыр. Ескертетін бір жайт- реал құбылысты сипаттауға классикалық та геометриялық та схеманы алуға болады.

Бірақ геометриялық ықтималдықтар схемасында алынған модель классикалық схемаға қарағанда айқын емес. Әрине бір нақты құбылысты сипаттайтын әр түрлі модельге сәйкес түрлі ықтималдықтарды алуға болады. Тарихи традициялық мына мысалды келтірейік.

2.3 Ықтималдықтың негізгі теоремалары. Қосу және көбейту теоремалары. Толық ықтималдықтын формуласы. Байес формуласы.

Теорема. Үйлесімсіз екі A және B оқиғалар қосындысының ықтималдығы олардың ықтималдықтарының қосындысына тең, яғни

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1)$$

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін (1) теңдіктегі үш ықтималдықты есептеп, олардың мәндерін қайтадан осы теңдікке қойып, дұрыстығына көз жеткізу жеткілікті. Шынында да, тең мүмкіндікті үйлесімсіз оқиғалардың толық тобын құрайтын элементар оқиғалар саны n болсын. Олардың ішінде A оқиғасына қолайлысы m_1 бұлар B үшін қолайсыз, B оқиғасына қолайлысы m_2 бұлар A үшін қолайсыз болсын. Демек, $P(A)= m_1/\mathrm{n}$, $P(B)= m_2/\mathrm{n}$. $A+B$ оқиғасына қолайлысы - m_1+m_2, өйткені A мен B үйлесімсіз. Сондықтан бір сынауда екеуіне де бірдей қолайлы элементар оқиғалар болмайды. Демек, $P(A+B)=(m_1+m_2)1/\mathrm{n}= m_1/\mathrm{n} +m_2/\mathrm{n}=P(A)+P(B)$. Осымен теорема дәлелденді.

Бұл қасиет оқиғалар саны 2-ден артық (яғни саны n) болғанда орын алады.

Теорема. Егер $A_1,A_2,\ldots,A_n$ қос-қостан үйлесімсіз оқиғалар болса, онда бұлардың қосындысының ықтималдығы әрқайсысының ықтималдықтарының қосындысына тең болады, яғни

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) =P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \qquad (2)$$

Дәлелдеуі. Мұны толық математикалық индукция әдісімен дәлелдейік. $n=2$ болғанда теореманың дұрыстығы өткен теоремада дәлелденді. Бұл теорема $n=k$ үйлесімсіз $A_1,A_2,\ldots,A_k$ оқиғалары үшін дұрыс, яғни $P(A_1+A_2+\ldots+A_k) =P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)$ болсын. Енді $n=k+1$ болғанда да теорема дұрыс болатынын дәлелдейміз. Берілгені бойынша

$A_1+A_2+\ldots+A_k, A_{k+1}$ оқиғалары қос-қостан үйлесімсіз, олай болса, $(A_1+A_2+\ldots+A_k)$ мен A_{k+1} оқиғалары да үйлесімсіз. Демек, бұл екі оқиғаға (1) формуласын пайдаланамыз, сонда

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_k+A_{k+1})=P((A_1+A_2+\ldots+A_k)+A_{k+1})=$$
$$(A_1+A_2+\ldots+A_k)+P\ (A_{k+1})$$

болады.бұдан теореманың $n=k+1$ үшін де дұрыс екенін көреміз. Олай болса, теорема n-ның кез келген мәні үшін де дұрыс.

Ықтималдықтарды көбейту теоремасы.

Тәуелсіз және тәуелді оқиғалар. Ықтималдықтар теориясында оқиғаларды элементар оқиғаларға бөліп қана қоймай, оқиғалардың өзара тәуелділігі мен тәуелсіздігінің де жігін айырып қарастырады.

Егер екі оқиғаның бірінің пайда болуы екіншісінің пайда болу ықтималдығын өзгертпесе, онда оларды тәуелсіз оқиғалар деп атайды.

1-мысал. Қобдишада 10 шар бар, оның төртеуі ақ, алтауы қызыл. Қобдишадан кез келген бір шарды алып, түсін белгілегеннен соң екіншісін алады. Бірінші алынған шар қызыл түсті болғанда екінші рет алынған шардың ақ түсті болу ықтималдығын анықтау керек.

Шешуі. Бұл мысалдың шешуі қобдишадан алынған бірінші шар түсі белгіленген соң екінші шарды алу алдында ол шар қайта қобдишаға салыну (бірінші тәсіл), әлде қайта салынбауына (екінші тәсіл) байланысты ықтималдық мәні түрліше болады.

Бірінші тәсіл. Қобдишадан бірінші рет алынған шар түсі қызыл болуы B оқиғасы болсын, онда $\overline{B}$ оқиғасы қобдишадан алынған бірінші шар түсі қызыл емес, яғни ақ шар шығуы болады. Екінші рет алынған шар түсі ақ шар болуы А оқиғасы болсын, онда $\overline{A}$ оқиғасы екінші ретте қызыл шардың шығуы болады. Бірінші алынған шар түсі белгіленгеннен кейін, ол шар қобдишаға қайта салынған себепті, шар екінші рет алынғанда да қобдишадағы шарлар саны бастапқыдай болады. Сондықтан A оқиғасының ықтималдығы оған дейін қабдишадан қызыл шар (B оқиғасы) шығуына байланысты емес, өзгермейді және ол 0,4-ке тең. Бұдан B оқиғасының пайда болуының A оқиғасының ықтималдығына әсері болмайтынын байқаймыз. Демек, A және B оқиғалары бір-біріне тәуелсіз. Бұл жерде A оқиғасының ықтималдығын есептегенде оның пайда болуына комплексті шарттан өзге ешқандай шек қойылмайды. Егер екі оқиғаның біреуінің пайда болуы екіншісінің пайда болу ықтималдығын озгертетін болса, ондай екі оқиғаны тәуелді оқиғалар деп атайды.

Екінші тәсіл. Тәжірибе шарты 1 - мысалдағыдай, бірақ бірінші рет алынған шар қобдишаға қайта салынбайды. Бұл жағдайда екінші ретте A оқиғасының пайда болу ықтималдығы оның алдында қызыл шар *(B),* не ақ шар ($\overline{B}$ оқиғасы) шығуына байланысты. Егер бірінші сынауда қызыл шар шықса, онда екінші сынауда ақ шар шығу ықтималдығы 4/9 болады. Егер бірінші сынауда $\overline{B}$ оқиғасы пайда болса (ақ шар шықса), онда екінші ретте де ақ шар шығу (A оқиғасы) ықтималдығы 3/9=1/3-ке тең. Осы сияқты, егер бірінші сынауда қызыл шар ($\overline{B}$ оқиғасы) не ақ шар ($\overline{B}$ оқиғасы) шықты десек, онда екінші сынауда қызыл шар ($\overline{A}$ оқиғасы) пайда болу ықтималдығы сәйкес 5/9 және 2/3 сандарына тең. Екінші сөзбен айтқанда A және B оқиғалары- тәуелді оқиғалар, өйткені бірінші жолы B оқиғасының пайда болуы келесі жолы A оқиғасының пайда болу ықтималдығын өзгертіп отыр.

Шартты ықтималдық. 1-мысалда A оқиғасының ықтималдығын есептегенде комплексті шарттан басқа B оқиғасының пайда болу, не пайда болмауы әсер етіп, A оқиғасының ықтималдығын өзгертіп отырды. Мұндай ықтималдықты шартты ықтималдық деп атайды. Шартты ықтималдықты былай белгілейді: P(A/B) немесе $P_B(A)$. Бұл былай оқылады: B оқиғасы орындалғанда A оқиғасының пайда болу ықтималдығы. Жоғарыда айтылғандарға сүйене отырып, A және B оқиғаларының тәуелсіздігін $P(A/B)= P(A)$, $(P_B(A) = P(A))$ түрінде жазуға болады. Бұл жағдайда 1-мысалдан

$$P(A)=P(A/B)=0{,}4, \quad P(A)=P(A/\overline{B})=0{,}4$$

сондай-ақ

$$P(\overline{A})=P(\overline{A}/B)=0{,}6, \quad P(\overline{A})=P(\overline{A}/\overline{B})=0{,}6$$

Егер A және B оқиғалары бір-біріне тәуелді болса, онда сол мысалдан $P(A)=P(A/B)$, $P(A/B)=4/9$, $P(A/\overline{B})=1/3$; сондай-ақ

$$P(\overline{A}/B)=5/9, \quad P(\overline{A}/B)=2/3.$$

Шартты ықтималдықтың қасиеттері, шартсыз ықтималдық қасиеттеріндей.

1^0. Шартты ықтималдық мәні де, шартсыз ықтималдық мәні сияқты, нөл мен бір аралығында болады, яғни $0 \le P(A/B) \le 1$.

2^0. $P(U/B)=1$.

3^0. $P(V'/B)=0$.

4^0. Егер $A_1 \subset A_2$ болса, онда $P(A_1/B) \le P(A_2/B)$.

5^0. Егер $A_1 = A_2$ болса, онда $P(A_1/B) = P(A_2/B)$.

6^0. Егер $A_1, A_2, ..., A_n$ оқиғалары қос-қостан ұйлесімсіз, яғни $A_i\ A_j = V(i \neq j)$ және $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$ болса, онда

$$P(A/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B) + ... + P(A_n/B).$$

7^0. $A_1, A_2, ..., A_n$ қос-қостан ұйлесімсіз болса және олар оқиғалардың толық жүйесін құраса, яғни $U = A_1 + A_2 + ... + A_n$ болса, онда

$$P(U/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B) + ...$$
$$+ P(A_n/B) = 1$$

8^0. A мен $\overline{A}$ қарама-қарсы оқиғалар болса, онда

$$P(A/B)=1-P(\overline{A}/B).$$

Ықтималдықтарды көбейту теоремасы. Бұл теорема тәуелді немесе тәуелсіз екі және бірнеше оқиғалардың бірден пайда болу ықтималдығын есептеуге мүмкіндік береді.

Теорема. Екі тәуелді оқиға көбейтіндісінің ықтималдығы біреуінің шартсыз ықтималдығы мен сол оқиға пайда болғандағы екінші оқиғаның шартты ықтималдығының кобейтіндісіне тең:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B).$$

Толық ықтималдық.

Күрделі оқиғалар ықтималдығын есептегенде ықтималдықтарды қосу, көбейту теоремаларын қатарынан жиі қолдануға тура келеді. Мұндай оқиғалардың ықтималдығын есептеуге арналған формуланы қорытудан бұрын мынадай мәселеге тоқтап өтейік.

$H_1, H_2, ..., H_n$ оқиғалары қос – қостан үйлесімсіз және оқиғалардың толық тобын құрайтын болсын. Ал B оқиғасы осы оқиғалардың тек біреуімен ғана бірігіп, орындалады дейік. Оның үстінде $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ және $P(B/H_1), P(B/H_2), ..., P(B/H_n)$ ықтималдықтары белгілі болсаын. Осы берілгендер бойынша B оқиғасының ықтималдығын анықтауға бола ма және ол неге тең деген сұрақ туады. Мұның жауабын толық ықтималдық формуласы береді.

$H_1, H_2, ..., H_n$ қос – қостан үйлесімсіз болғандықтан $BH_1, BH_2, ..., BH_n$ оқиғалары да қос – қостан үйлесімсіз. Олай болса,

$$B = BH_1 + BH_2 + ... + BH_n = \sum_{i=1}^{n} BH_k. \qquad (1)$$

Бұл оқиғаларға қосу теоремасын қолдануға болады: $P(B) = \sum P(BH_i)$.

Көбейту теоремасы бойынша $P(BH_i) = P(H_i)P(B/H_i)(i = 1,2,...,n)$ болады.

Демек,

$P(B)=P(H_1)P(B/H_1)+P(H_2)P(B/H_2)+...+P(H_n)P(B/H_n)$, немесе

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(B/H_i). \qquad (2)$$

Жоғарыдағы берілгендері бойынша B-ның ықтималдығын анықтайтын (2) формуласын *толық ықтималдық формуласы* деп атайды. Әдетте, $H_1, H_2, ..., H_n$ оқиғалары *гипотезалар (болжамдар)* деп атайды.

Байес формуласы

Осы уақытқа дейін қарастырып келген ықтималдықтар интуитивті түрде теориялық болжамдарға сүйеніп, тәжірибе жүргізілмей – ақ, комплексті шарт жөніндегі білім (түсінік) негізінде анықталып келді. Тәжірибеге дейінгі $H_1, H_2, ..., H_n$ гипотезалары (оқиғалары) ықтималдықтары сәйкес $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ болатын – ды.

Тәжірибе жүргізілді дейік, соның нәтижесінде B оқиғасының пайда болғаны анықталды, енді осы B оқиғасының пайда болуына байланысты $H_1, H_2, ..., H_n$ гипотезалары ықтималдықтарын қайта қаруға тура келеді. Мәселе $P(H_1/B), P(H_2/B), ..., P(H_n/B)$ ықтималдықтары мәндерін анықтауға тіреледі. Бұл ықтималдықтарды анықтау үшін, көбейту теоремесы мен толық ықтималдық формуласын пайдаланамыз. Тәуелді оқиғалар үшін көбейту теоремасы бойынша B оқиғасы мен H $(i = 1,2,...,n)$ гипотезасының бірге пайда болу ықтималдығы (5.(2-і) формуласын қараңыз) мынаған тең: $P(H_i)P(B/H_i) = P(B)P(H/B)$. Бұдан

$$P(H_i/B) = \frac{P(H_i)P(B/H_i)}{P(B)} \quad (i = 1,2,...,n) \qquad (1)$$

екені шығады. Бұл формулаға толық ықтималдық формуласындағы $P(B)$ мәнін қойсақ, онда $P(H_i/B) = \dfrac{P(H_i)P(B/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(B/H_i)}$ (2)

болады. Осы (2) формуласы *Байес формуласы* деп аталады.

Егер бірнеше сынақ жүргізсек, сонымен қатар әрбір сынақтағы оқиғаның пайда болу ықтималдығы A болып, ол ешқандай басқа сынақтарға тәуелді болмаса, онда мұндай сынақ A оқиғасына қатысты тәуелсіз деп аталады.

Әртүрлі тәуелсіз сынақтарында A оқиғасының ықтималдықтары әртүрлі немесе бірдей болуы мүмкін. Бұдан әрі біз әрбір тәуелсіз сынақта ықтималдықтары тұрақты болатын оқиғаларды ғана қарастырамы.

2.4 Бернулидің қарапайым схемасы және оның жалпы түрі. Муавр-Лапластың локальдық және интегралдық теоремалары. Пуассонның шектік теоремасы.

Лапластың локальдық теоремасы. n санының үлкен мәндерінде Бернулли формуласын қолдану өте күрделі. Егер n саны айтарлықтай үлкен болса, n-тәуелсіз сынақтардағы A оқиғасының тура m рет пайда болу ықтималдығын Лапластың локальдық теоремасынан асиптотикалық формула ретінде алуға болады.

Дербес жағдай үшін, яғни, $p=\frac{1}{2}$ болғандағы асиптотикалық формуланы 1730 жылы

Муавр тапқан. 1783 жылы Лаплас кез келген p үшін $(p\neq 0, p\neq 1)$ жалпыланған.

Сондықтан, бұл теореманы Муавр-Лаплас теоремасы деп атайды.

Муавр Лаплас локальдық теоремасы. Егер әрбір сынақтағы A оқиғасының пайда болу ықтималдығы тұрақты p $(p\neq 0)$ болса, онда $p_m(m)$ ықтималдығы, яғни n тәуелсіз сынақтағы A оқиғасының тура m-рет пайда болуы ықтималдығы жуықтап алғанда

$$y=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

мұндағы $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ функциясының мәніне тең.

Аргументтің оң мәндері үшін $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

функциясының мәндері анықталған арнайы кестелер бар. $\varphi(\tilde{o})$-функциясы жұп болғандықтан бұл кестемен аргументтің теріс мәндері үшін де қолдануға болады.

Сонымен, n- тәуелсіз сынақтардағы A оқиғасының тура m - рет пайда болу ықтималдығы жуықтап алғанда

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\text{ мұндағы } x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Муавр-Лапластың интегралдық теоремасы.

Айталық, әрқайсысында A оқиғасының пайда болу ықтималдығы тұрақты $p(0<p<1)$ болатын n- сынақ жүргізілген болсын.

Осы n- сынақта A оқиғасының m_1-реттен аз емес және m_2-реттен көп емес пайда болуының ықтималдығын қалай табуға болады?

Бұл сұраққа Лапластың интегралдық теоремасы жауап береді.

Теорема. Егер әрбір сынақта A оқиғасының пайда болу ықтималдығы тұрақты p $(\delta \neq 0,\ \delta \neq 1)$ болса, онда, $P_n(m_1, m_2)$ ықтималдығы, яғни n- тәуелсіз сынақтардағы A оқиғасының m_1-реттен аз емес және m_2-реттен көп емес пайда болуының ықтималдығы жуықтап алғанда келесі анықталған интегралға тең.

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ , мұндағы } x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}};\ x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$\int e^{-\frac{z^2}{2}} dz$-қарапайым функциялар арқылы өрнектелмейтін-діктен есеп шығаруда арнайы кестені қолданамыз.

Кестеде аргумент x-тің оң мәндері мен $x=0$ үшін

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

функциясының мәндері беріледі $\phi(x)$-тақ функциясы болғандықтан бұл кестемен аргументтің теріс мәндері үшін де қолданамыз. Кестемен $x=5$ дейін қолдануға болады. $X>5$ үшін $\phi(x)=5$ деп қабылдаймыз $\phi(x)$-функциясын Лаплас функциясы деп атайды.

Сонымен, ізделініп отырған ықтималдық

$$P_n(m_1, m_2) = \phi(x'') - \phi(x'), \text{ мұндағы } x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Пуассоның шектік теоремасы.

Теорема.Әр санауда А оқиғаның пайда болу ықтималдығы $\frac{\lambda}{n}$ (мұндағы λ саны n нен тәуелсіз) болып. Онда тәуелсіз санаулар саны өте үлкен болғанда (яғна $n \to \infty$) А оқиғасының дәл m рет пайда болу ықтималды.

Бүл теореманың дәлелдеуі Бернули схемасы және $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ екінші тамаша шекке сүйенеді. $\sum P(m;\lambda) = P(0;\lambda) + P(1;\lambda) + P(2;\lambda) + \ldots = 1$ екенін алу қиын емес.

«n -тәуелсіз сынақта A оқиғасының тура m рет пайда болу ықтималдығы қандай? -деген сұраққа жауап беріп көрейік. Біздің есебімізде A оқиғасының қатарынан m-рет пайда болуы міндетті емес. Мысалы, 4 тәуелсіз сынақта A оқиғасының тура 3 рет пайда болу мүмкіндіктері келесідей.

$$\overline{A}AAA,\ A\overline{A}AA,\ AA\overline{A}A,\ AAA\overline{A}.$$

Ізделініп отырған ықтималдықты $P_n(m)$ арқылы белгілейік.

Қойылған есепті келесі түрдегі *Бернулли формуласы* арқылы шешуге болады $P_n(m) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$

2.5 Кездейсоқ шамалар және олардың үлестіру заңдары. Дискретті және үздіксіз кездейсоқ шамалардын үлестіру түрлері. Үлестірудің интегралдық және дифференциалдық функциялары.

Кездейсоқ шамалар ұғымы. Кездейсоқ себептер нәтижесінде сандық мәні өзгеріп, оны анықтауға мүмкін емес болатын шамалармен жиі-жиі кездесіп отырдық. Оған төмендегі мысалдар айғақ.

1-мысал. Жаңа туған 50 нәрестенің нешеуі ұл бала болуы мүмкін?

Жаңа туған 50 нәрестенің нешеуі ұл болуын алдын-ала айта алмаймыз. Өйткені ескеруге мүмкін емес көптеген себептер нәтижесінде нәрестенің ұл бала болу саны 0,1,2,...,50 болып өзгеріп отырады. Бұлар кездейсоқ шаманың қабылдайтын мүмкін мәндері болады.

2-мысал. Кез келген мақта қауашағында неше шит болуы мүмкін?

Қауашақта неше шит болуын алдын- ала айта алмаймыз, яғни бұл кездейсоқ шама. Ал қауашақтағы шит саны *1,2,3,...,n* болуы сол кездейсоқ шаманың қабылдайтын мүмкін мәндері.

3-мысал. Ойын кубын лақтырғанда ұпай санының пайда болуын алдын-ала айта алмаймыз.

Бұл мысалда ұпай саны- кездейсоқ шама, куб жақтарын көрсететін *1,2,3,4,5,6* сандары- кездейсоқ шаманың қабылдайтын мүмкін мәндер .

4-мысал. Қолдағы лотереяның ұтыс мөлшерін білмейміз.

Лотереяның ұтыс мүлшерін- кездейсоқ шама, ал оның ұту мөлшерінің түрлі мәндері- сол кездейсоқ шама қабылдайтын мүмкін мәндер.

Бұл келтірілген мысалдардың бәрінде де қарастырып отырған шаманың пайда болуын алдын ала айтуға мүмкін емес. Өйткені, оның өзгеруі қандай да ескеруге болмайтын кездейсоқ себептерге байланысты. Сондықтан да олардың қабылдайтын мәндері әр түрлі, мәселен, бірінші мысалда *0,1,2,...,50*, екіншіде *1,2,3,...,n*, үшіншіде - *1,2,3,4,5,6* сандары және т.с.с.

Алдымен дискретті (үзілісті) кездейсоқ шамаларды қарастырайық.

Келешекте кездейсоқ шамаларды *X,Y,...* әріптерімен белгілейміз, ал олардың қабылдайтын мүмкін мәндерін $x_1, x_2, x_3, ..., y_1, y_2, y_3, ...$ арқылы белгілейміз.

Дискретті кездейсоқ шамалардың үлестіру заңдары.

Кездейсоқ шаманы білу дегенімізде, оның нақтылы сандық мәнін білу деп түсінуден аулақ болу керек. Мысалы, баланың бойы 1 метр 50см болды десек, оның өсу мөлшері белгілі бір сандық мәнді қабылдап, кездейсоқ шама болудан өтті. Олай болса, сол кездейсоқ шама туралы толық мәлімет алуымыз үшін не білуіміз керек деген сұрау өзінен-өзі туады. Осыған жауап қайырайық.

Кездейсоқ шаманың қабылдай алатын барлық сандық мәндерін білу керектігі жоғарыда келтірілген мысалдарда айтылды. Былайша айтқанда, тәжірибе нәтижесінде кездейсоқ X шамасы $x_1, x_2, ..., x_n$ мәндерінің бірін қабылдасын, яғни қос-қостан үйлесімсіз оқиғалардың толық тобын жасайтын $X=x_1$, $X=x_2$,...,$X=x_n$ оқиғаларының бірі пайда болсын.

Бірақ бұл жеткіліксіз. Өйткені x_i мәнін қандай ықтималдықпен қабылдауын да білу қажет. Бұл оқиғалардың ықтималдықтарын сәйкес $\rho_i (i = 1, 2, ..., n)$ арқылы белгілейміз, яғни $\rho_1 = P(X = x_1)$, $\rho_2 = P(X = x_2)$, $\rho_n = P(X = x_n)$ оқиғалардың толық тобын жасағандықтан,

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1,$$

яғни кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндері ықтималдықтарының қосындысы бірге тең. Мұны екінші сөзбен айтқанда, бірге тең бұл қосынды ықтималдық кездейсоқ шаманың дербес x_i мәндері бойынша қандайда бір жолдармен үлестіріліп таратылып отыр.

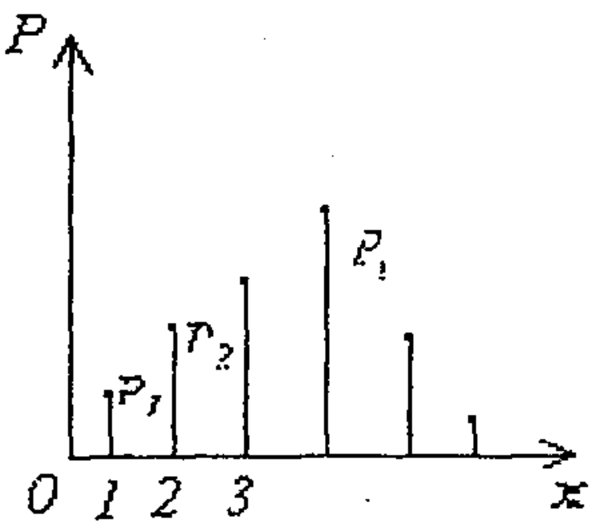
Сонымен, кездейсоқ шама мәндерімен оларға сәйкес ықтималдықтарды байланыстыратын ереже дискретті кездейсоқ шаманың үлестіру заңы делінеді. Бұл заң таблица, график немесе формула түрінде өрнектелуі мүмкін. Әрқайсысын жеке-жеке қарастырайық.

I. Үлестіру таблицасы. Мұндай таблицада кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндері саналады да оған сәйкес ықтималдықтар мәні көрсетіледі.

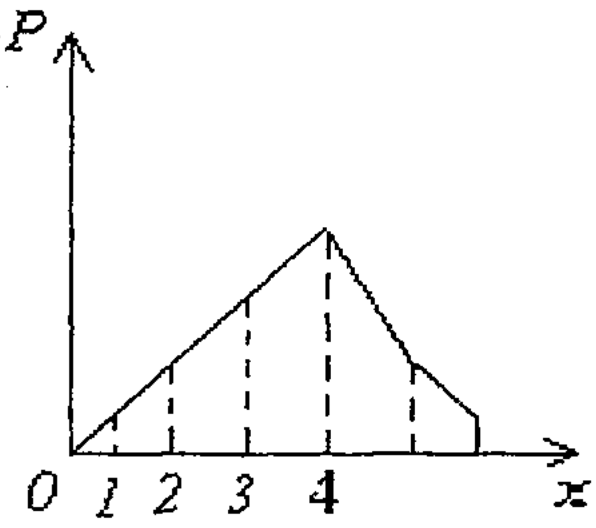
Кездейсоқ шама мәндері	**X**	x_1	x_2	x_3	...	x_n	Қосынды
Кездейсоқ шама мәніне сәйкес ықтималдық	P_i=X(x=x_i)	P_1	p_2	p_3		p_n	1

Таблица түрінде берілген дискретті кездейсоқ шама ықтималдықтарының үлестіру заңын үлестірілуі қатары деп те атайды.

II.Үлестіру көпбұрышы. Енді таблица күйінде келтірілген кездейсоқ шама үлестіруін график түрінде де көрсетуге болатынын қарастырайық. Ол үшін абсциссалар осі бойына $\tilde{O}'$ кездейсоқ шамасы мәндерін, $(x_i=d_i)$, ординаталар осі бойына сәйкес ықтималдық



1-сурет



2-сурет

p_i мәндерін саламыз (1,2-суреттер). Сөйтіп, ықтималдықтар үлестіруінің графигін жасаймыз. Ол екі түрде көрсетілген. Бірінші суретте кездейсоқ шама мәндеріне сәйкес ықтималдықтар ординаталар осіне параллель кесінділермен берілген. Екінші суретте ординаталардың ұштары қосылған. Соның нәтижесінде көпбұрыш алдық. Ол көпбұрышты ықтималдықтардың үлестіру көпбұрышы немесе кездейсоқ шаманың үлестіру көпбұрышы деп атаймыз. *1,2,3* мысалдардағы ықтималдықтардың үлестіру көпбұрышын сызуды оқырмандарға тапсырамыз.

Енді үлестіру заңының функционалды тәуелділік (формула) түрін қарастырайық. Биномдық, пуассондық, геометриялық және гипергеометриялық үлестірулерді алайық.

1.Биномдық үлестіру $P_n(x) = C_n^x \quad p^x \quad q^{n-k} \quad (x = 0,1,2,...,n)$ формуласымен берілетін-ді, мұнда $\sum\limits_{x=0}^{n} P_n(x) = \sum\limits_{x=0}^{n} e_n^x p^x q^{n-x} = 1$.

2.Геометриялық үлестіру. $P(x = n) = pq^{n-1}$ формуласымен өрнектеледі: n=1,2,3,... десек, бірінші мүшесі p еселігі $q(0<q<1)$ болған геометриялық прогрессия $p, pq, pq^2, ..., pq^{n-1}$ аламыз. Осы себептен бұл формуланы геометриялық үлестіру деп атайды, мұнда $\sum\limits_{n=0}^{n} pq^{n-1} = 1$ (3-мысалды қараңыз).

Математикалық күтім (орта)

Бул ұғымға түсінік беруден бұрын бір мысал келтірейік.

1-мысал. Кітаптарды тез сату мақсатымен ұтылыссыз лотерея ұйымдастырылған. Таратылған 500 лотерея билетінің бәрі де ұтады, бірақ ұтыс мөлшері әр түрлі. Мұның 250-і 10 тиыннан, 150-і 20 тиыннан, 50-і 30 тиыннан, қалған 50-і 60 тиыннан ұтады. Сатып алынған бір лотерея билетінің орташа ұтыс мөлшері (ұтқан кітаптың орташа бағасы) неге тең?

Шешуі. Күтіп отырған орташа ұтысты анықтау үшін сатылған кітаптардың жалпы сомасын анықтап, оны жалпы билеттер санына бөлеміз, яғни $(250 \cdot 0{,}1 + 150 \cdot 0{,}2 + 50 \cdot 0{,}3 + 50 \cdot 0{,}6)$ сом=100 сом қосындысын 500-ге бөлеміз, сонда

$\frac{100\ сом}{500} = 0,2$ сом болады. Ал бұл күтім отырған орташа ұтысты анықтау үшін әр ұтысқа келетін билет санын олардың жалпы санына бөліп, сәйкес ұтыс мөлшеріне көбейтіп те табуымызға болады, яғни

$$\left(0,1 \cdot \frac{250}{500} + 0,2 \cdot \frac{150}{500} + 0,3 \cdot \frac{50}{500} + 0,6 \cdot \frac{50}{500}\right) \text{сом}=0,2 \text{ сом}.$$

Осы жазылғандарды ықтималдықтар теориясы тілімен айтсақ, онда ұтыс мөлшері кездейсоқ X шамасы 0,1; 0,2; 0,3; 0,6 сом мәндерді сәйкес

$$\frac{250}{500} = 0,5;\ \frac{150}{500} = 0,3;\ \frac{50}{500} = 0,1;\ \frac{50}{500} = 0,1$$

ықтималдықтарымен (салыстырмалы жиілікпен) қабылдайды дейміз. Сәйкес таблица мынадай болады:

Ұтыс мөлшері (X)	0,1	0,2	0,3	0,6	Σ
Ықтималдығы (p_i)	0,5	0,3	0,1	0,1	0,1

Бұл таблицадағы X мәндерін p_i сәйкес мәндеріне көбейтіп қоссақ, онда әрбір билетке сәйкес келетін орташа ұтыс мөлшері 0,2 сом екенін аламыз. Осы қарастырылған мысалға ұқсас орташа мән орнына математикалық күтім ұғымын енгізейік.

Анықтама. Дискретті кездейсоқ шама X-тің математикалық күтімі деп оның барлық мүмкін мәндерін сәйкес ықтималдықтарына көбейтілген қосындысын айтамыз.

Мысал. Бернулли схемасы бойынша үлестірілген кездейсоқ шаманың математикалық күтімін анықтау керек.

Шешуі. Бернулли схемасында биномдық үлестіру

$$P(\{X = x) = C_n^x\ p^x q^{n-x} \quad (x = 0,1,..., n)$$

болатын. Олай болса, анықтама бойынша

$$M(X) = \sum_{x=0}^{n} xP(X = x) = \sum_{x=0}^{n} xC^x p^x q^{n-x} =$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = np \sum_{x-1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x} = np,$$

яғни

$$M\ (X) = np\ .$$