

*Совместный выпуск*

## **ВЕСТНИК**

**Восточно–Казахстанского государственного  
технического университета  
им. Д. Серикбаева**

Главный редактор  
ректор, профессор

***Н.М. Темирбеков***



## **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

**Институт вычислительных технологий  
Сибирского отделения РАН**

Главный редактор  
академик

***Ю.И. Шокин***



**Вычислительные технологии**

**Часть 2**

г. Усть-Каменогорск, 2013 г.

## Редакционная коллегия журнала:

### ВЕСТНИК ВКГТУ:

Зам. главного редактора:

*д-р техн. н., профессор Ж.О. Кульсеитов,*  
*канд. геол.-мин. наук О.Д. Гавриленко*

Отв. секретарь - *О.Н. Николаенко*

*А.К. Адрышев, д-р техн. н.,*

*А.Н. Алексеенко, д-р ист. н.,*

*Ю.В. Баталов, д-р экон.н.,*

*Ю.А. Веригин, д-р техн. н.,*

*Б.А. Дьячков, д-р геол.-мин. н.,*

*М.В. Дудкин, д-р техн. н.,*

*Т.Т. Ипалаков, д-р техн. н.,*

*А.И. Квасов, д-р техн. н.,*

*Е.А. Колос, д-р экон. н.,*

*В.П. Колпакова, д-р техн. н.,*

*В.Х. Кумыков, д-р техн. н.,*

*Н.П. Малышев, канд. экон. н.,*

*Ж.Д. Назбиев, д-р. филол. н.,*

*С.В. Плотников, д-р физ.-мат. н.,*

*А.Д. Погребняк, д-р физ.-мат. н.,*

*М.С. Рафаилович, д-р геол.-мин. н.,*

*М.К. Скаков, д-р физ.-мат. н.,*

*Б.В. Сырнев, д-р техн. н.,*

*Г.О. Тлеукенова, Dr. Ing.,*

*А.К. Томилин, д-р физ.-мат. н.,*

*Е.М. Турганбаев, канд. физ.-мат. н., Dr. PhD.,*

*С.Д. Тыныбекова, д-р пед. н.,*

*Н.Г. Хисамиев, д-р физ.-мат. н.,*

*Ю.Н. Шапошник, д-р техн. н.*

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ:

Заместитель главного редактора –  
*чл.-кор. РАН А.М. Федотов*

Отв. секретарь - *канд. физ.-мат. наук*  
*А.В. Юрченко*

*У. Абдибеков, Казахстан*

*К. Е. Афанасьев, Россия*

*С. П. Баутин, Россия*

*акад. И. В. Бычков, Россия*

*чл.-кор. В. А. Гуцин, Россия*

*Н. Т. Данаев, Казахстан*

*Л. Жайнаков, Киргизия*

*Б. Т. Жумагулов, Казахстан*

*А. Канантай, Таиланд*

*М. Ковеня, Россия*

*акад. Н. А. Колчанов, Россия*

*Е. Краузе, Германия*

*В. Крейнович, США*

*Д. Крёнер, Германия*

*В. Ф. Куропатенко, Россия*

*Л. Лерэ, Франция*

*Х. Милошевич, Сербия*

*акад. Б. Г. Михайленко, Россия*

*В. В. Москвичев, Россия*

*акад. В. Я. Панченко, Россия*

*В. П. Потапов, Россия*

*К. Рознер, Германия*

*Б. Ру, Франция*

*М. Рэш, Германия*

*Н. Сатофука, Япония*

*чл.-кор. С. И. Смагин, Россия*

*чл.-кор. В.А. Сойфер, Россия*

*акад. А. Л. Стемпковский, Россия*

*М. Фрёнер, Германия*

*В. Ж. Хабаши, Канада*

*Джи-Хуан Хе, Китай*

*Ч. Хириш, Бельгия*

*акад. Б. Н. Четверушкин, Россия*

*Л. Б. Чубаров, Россия*

*чл.-кор. В. В. Шайдулов, Россия*

*Б. Эйнарссон, Швеция*

*З. Х. Юлдашев, Узбекистан*

**Программный комитет** Международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании – 2013 (ВИТ-2013)»:

Жумагулов Б.Т.	академик НАН РК, председатель, Казахстан,
Шокин Ю.И.	академик РАН, сопредседатель, Россия,
Темирбеков Н.М.	чл.-кор. НАН РК, сопредседатель оргкомитета, Казахстан,
Данаев Н.Т.	чл.-кор. НАН РК, сопредседатель оргкомитета, Казахстан,
Орунханов М.К.	академик НИА РК, Казахстан,
Бычков И.В.	академик РАН, Россия,
Стемповский А.Л.	академик РАН, Россия,
Мамбетказиев Е.А.	академик НАН РК, Казахстан,
Кальменов Т.Ш.	академик НАН РК, Казахстан,
Харин С.Н.	академик НАН РК, Казахстан,
Жайнаков А.Ж.	академик НАН КР, Кыргызстан,
Шаршеналиев Ж.Ш.	академик НАН КР, Кыргызстан,
Алиев Ф.А.	академик НАН Азербайджана, Азербайджан,
Алшанов Р.А.	академик МАИН, Казахстан,
Омирбаев С.М.	академик МАИН, Казахстан,
Бияшев Р.Г.	академик МАИН, Казахстан,
Искаков К.Т.	академик МАИН, Казахстан,
Шарипбаев А.А.	академик МАИН, Казахстан,
Ускенбаева Р.К.	академик МАИН, Казахстан,
Кабанихин С.И.	чл.-кор. РАН, Россия,
Смагин С.И.	чл.-кор. РАН, Россия,
Федотов А.М.	чл.-кор. РАН, Россия,
Шайдуров В.В.	чл.-кор. РАН, Россия,
Сойфер В.А.	чл.-кор. РАН, Россия,
Тулохонов А.К.	чл.-кор. РАН, Россия,
Калимолдаев М.Н.	чл.-кор. НАН РК, Казахстан,
Бектемесов М.А.	чл.-кор. НИА РК, Казахстан,
Чубаров Л.Б.	профессор, Россия,
Москвичев В.В.	профессор, Россия,
Потапов В.П.	профессор, Россия,
Потатуркин О.И.	профессор, Россия,
Жижимов О.Л.	профессор, Россия,
Голушко С.К.	профессор, Россия,
Бобров Л.К.	профессор, Россия,
Абдибеков У.С.	профессор, Казахстан,
Кувандыков А.У.	профессор, Казахстан,
Амирбеков Ш.А.	профессор, Казахстан,
Тукеев У.А.	профессор, Казахстан,
Габбасов М.Б.	профессор, Казахстан,
Крёнер Д.	профессор, Германия,
Рознер К.	профессор, Германия,
Рэш М.	профессор, Германия,
Шокина Н.Ю.	доктор PhD, Германия,
Панахов Е.	профессор, Турция,
Юлдашев З.Х.	профессор, Узбекистан,
Айнарсон Б.	профессор, Швеция,
Милошевич Х.	профессор, Сербия

## Содержание

<b>Вычислительные технологии</b>	<b>7</b>
Джайчибеков Н.Ж. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В СКАЧКЕ УПЛОТНЕНИЯ . . . . .	7
Калимолдаев М.Н., Дженалиев М.Т. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ . . . . .	11
Касенова А., Рахметуллина С. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА АДАПТИВНЫХ СЕТОК . . . . .	15
Касымханов С.Ж., Бакиров Ж.Б., Касымханова Д.Ж. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ВСТРЯХИВАЮЩИХ ФОРМОВОЧНЫХ МАШИН В ЛИТЕЙНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ . . . . .	20
Корнев В.А., Григорьева С.В. ОЦЕНКА И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РИСКОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА С УЧЕТОМ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НОРМАТИВОВ . . . . .	26
Коробицын В.А., Коробицын Д.В. ВИХРЕСОГЛАСОВАННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА КОСОУГОЛЬНЫХ 2D СЕТКАХ . . . . .	33
Красавин А.Л., Алонцева Д.Л. ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА СПЕКТРОГРАММ РЕНТГЕНОВСКИХ ФЛЮОРЕСЦЕНТНЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ . . . . .	36
Кульджабеков А.Б., Алибаева К.А., Инкарбеков М.К., Калтаев А. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕХНОЛОГИИ ПОСАДКИ МНОГОЯРУСНЫХ ФИЛЬТРОВ . . . . .	45
Лисицкий Д.В., Дышлюк С.С., Асылханова Ж.А. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЪЕКТНО-КАРТОГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ГЕОПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ В РЕГИОНАЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ . . . . .	52
Лутай С.С., Воробьев А.Л., Горячева А. А., Асылхан М.А. ПРИМЕНЕНИЕ ФИТОРЕГУЛЯТОРА ПРИРОДНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ ДЛЯ ВЫРАЩИВАНИЯ САДОВО-ПАРКОВЫХ КУЛЬТУР . . . . .	58
Макарова Н.А. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РЕАГИРУЮЩЕГО ПОТОКА ПРОДУКТОВ РЕАКЦИИ В ДВУХСТУПЕНЧАТОМ УСТРОЙСТВЕ ДЛЯ ДЕТОНАЦИОННОГО НАПЫЛЕНИЯ . . . . .	64
Матайбаева И.Е., Дьячков Б.А., Майорова Н.П., Черненко З.И. К ОЦЕНКЕ ПЕРСПЕКТИВ ДЕЛЬБЕГЕТЕЙСКОГО ОЛОВОРУДНОГО УЗЛА . . . . .	68
Мизерный А., Селтманн Р., Рафаилович М., Наумов Е. ОСНОВНЫЕ МИНЕРАЛЬНЫЕ АССОЦИАЦИИ МЕСТОРОЖДЕНИЯ СЕКИСОВСКОЕ (ВОСТОЧНЫЙ КАЗАХСТАН) . . . . .	71
Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ . . . . .	79
Моисеева Е.С., Найманова А.Ж. СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ВОЗДУХА С ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ ВДУВОМ ВОДОРОДА . . . . .	86

Мукашева Р.У., Рахметуллина Ж.Т. АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА РАДИАЦИОННОГО ПОТОКА В ОБЛАЧНОЙ АТМОСФЕРЕ . . . . .	92
Мукимбеков М.Ж., Накибаева М.Т. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕФТЕДОБЫЧЕ . . . . .	97
Мукимбеков М.Ж., Накибаева М.Т. ОБ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В РАЗРАБОТКЕ ПЛАСТА . . . . .	103
Мурзабеков З.Н., Айпанов Ш.А. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БОКОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЕТА ЗА КОНЕЧНЫЙ ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ . . . . .	110
Мурзабеков З.Н., Мурзабеков А.З. ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУСТОРОННИХ ОГРАНИЧЕНИЙ . . . . .	116
Мусипова Г.Б. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ РЕГИОНА . . . . .	127
Нетесова В.Ю. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ РЕСУРСОВ ХОЗЯЙСТВУЮЩИХ СУБЪЕКТОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩАЯ ИХ ФИНАНСОВУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ . . . . .	132
Нурбаева Н.А., Ван Е.Ю., Касперская А.А., Карибаева М.К. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ОТ КОНЦЕНТРАЦИИ . . . . .	140
Нурмагамбетов А.А., Джомартова Ш.А., Мазаков Т.Ж. РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ . . . . .	143
Нурсадыкова Р.К., Тезекпаева Ш.Т., Хасенова З.Т. НЕЧЕТКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ МАТЛАВ . . . . .	147
Пененко А.В., Рахметуллина С.Ж. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИСТОЧНИКОВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА ПО ДАННЫМ СИСТЕМЫ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА . . . . .	152
Ракишева З.Б., Сухенко А.С. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДАТЧИКОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ -ОРИЕНТАЦИИ МАЛЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ . . . . .	164
Сагиндыков К.М. МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗИ ПОНЯТИЙ ДИСЦИПЛИН . . . . .	168
Саденова М.А., Абдулина С.А., Утегенова М.Е., Акижанов Е.О., Кенетбаев Б.С. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ НОСИТЕЛЕЙ ДЛЯ КАТАЛИЗАТОРОВ . . . . .	171
Сайфутдинов И.Н. ВОЗМОЖНОСТИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ ПРОГРАММНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА «COMSOL MULTIPHYSICS» . . . . .	174
Середович В.А., Тогузова М.М. АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ 3D МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ЗОНИРОВАНИЯ ТЕРРИТОРИЙ ПРОМЫШЛЕННЫХ ГОРОДОВ . . . . .	178
Симонов К.В., Кадена Л. ОЦЕНКА ДАННЫХ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА НА ОСНОВЕ ШИАРЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ . . . . .	181
Сороковая К.Е. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА И ТРАНСФОРМАЦИИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ АЭРОЗОЛЕЙ В АТМОСФЕРЕ . . . . .	186
Старостенков М.Д., Дёмина И.А., Попова Г.В., Денисова Н.Ф. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КООПЕРАТИВНЫХ СМЕЩЕНИЙ КОМПЛЕКСОВ АТОМОВ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА БИМЕТАЛЛОВ NI-AL, NI-FE И PT-AL . . . . .	192

Сырнев Б.В., Агапов В.А., Данилов С.Н., Абдулина С.А., Саденова М.А. РАЗРАБОТКА ПАКЕТА ПРОГРАММ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА В МЕТАЛЛУРГИИ . . . . .	203
Темирбеков А.Н. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА В ДВУХСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ . . . . .	206
Темирбеков Н.М. ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ «ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ» РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА С КОНТАКТНЫМ РАЗРЫВОМ . . . . .	211
Темирбеков Н.М., Малгаждаров Е.А., Токанова С.О. ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТОК В ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ . . . . .	215
Темирбекова Л.Н. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА . . . . .	220
Тлебалдинова А.С., Денисова Н.Ф., Касымханова Д.Ж., Рақышева М.А., Байгелов К.Ж. ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ РЕКОНСТРУКЦИИ СМАЗАННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ . . . . .	227
Толуханов А.Е., Панфилов М.Б., Калтаев А. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ БАКТЕРИЙ НА ОБРАЗОВАНИЕ МЕТАНА ПРИ ПОДЗЕМНОМ ХРАНЕНИИ ВОДОРОДА . . . . .	233
Урмашев Б.А., Данаев Н.Т., Алимжанов Е.С. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ «СКОРОСТЬ-ДАВЛЕНИЕ» . . . . .	240
Урмашев Б.А., Турсынбай А.Т., Макашев Е.П. О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕСКОЛЬКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ (ТРЕХКАМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ФАРМАКОКИНЕТИКИ) . . . . .	242
Усенова С.Б. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ НА ПРИМЕРЕ ТОО «БИПЭК АВТО» . . . . .	244
Федотов А.М., Федотова О.А. МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ . . . . .	249
Черный С.Г., Авдюшенко А.Ю., Чирков Д.В. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ В ГИДРОТУРБИНЕ С ЗАТВОРОМ . . . . .	266
Шайдуров В.В., Щепановская Г.И., Якубович М.В. О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ . . . . .	275
Шерьязданов Г.Б. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКИХ СРЕД В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ . . . . .	284
Шокин Ю.И. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ РЕГИОНАЛЬНОГО СПУТНИКОВОГО МОНИТОРИНГА НА ОСНОВЕ КОРПОРАТИВНОЙ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ СО РАН . . . . .	286
Юлдашев З.Х., Адылов А.А., Холмирзаев Х. СТРУКТУРА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НАПОЛНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЛЕДЖАМИ . . . . .	292

УДК 533.6.011

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В СКАЧКЕ УПЛОТНЕНИЯ

Н.Ж. Джайчибеков

Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, г. Астана

**Abstract.** In work the approximate solution of a task on structure of shock waves is provided in gases. Changes of average sizes of density, speed and internal energy of gas along width of jump of consolidation are given. On the basis of the described model the structure of jump of consolidation in gas for a case of final number of the Move is considered.

**Keywords:** jump of consolidation, number of the Move

**Аннотация.** В работе приводится приближенное решение задачи о структуре ударных волн в газах. Приведены изменения средних величин плотности, скорости и внутренней энергии газа вдоль ширины скачка уплотнения. На основе описанной модели рассмотрена структура скачка уплотнения в газе для случая конечного числа Маха.

**Ключевые слова:** скачка уплотнения, числа Маха

**Андатпа.** Ғылыми жұмыста газдардағы соққы толқындар туралы есептің жуықталған шешімі келтіріліледі. Газ тығыздығының, жылдамдығының және ішкі энергиясының орташа шамаларының нығыздау секірісінің көлденең бойымен өзгерулері келтірілген. Құрылған модельдің негізінде нығыздау секірісінің Мах санының ақырлы шамасына арналған құрылымы қарастырылды.

**Ключевые слова:** нығыздау секірісі, Мах саны

В [1 - 3] рассмотрено применение в динамике разреженного газа эвристической модели течения, ранее разработанной для описания течения газа с твердыми частицами [4]. В этой модели молекулы подразделяются на 2 множества, каждое из которых описывается континуально, причем столкновения молекул из одного множества порождают напряжения и тепловые потоки в этом множестве, а столкновения молекул разных множеств приводят к переходу частиц из одного множества в другое. В указанных работах частицы одного из множеств (назовем их s-частицами) двигались упорядоченно без хаотической составляющей скорости и естественно, что все столкновения таких частиц с частицами другого множества (t-частицами) приводили к переходу s-частиц в множество хаотически движущихся t-частиц.

Достоинством этой модели является ее простота, поскольку легко подсчитать массу, импульс и энергию, переносимые частицами при таком переходе, и не требуется никаких характеристик взаимодействия частиц, кроме частоты столкновений. Применение этой модели к расчету структуры скачка уплотнения [1] и обтекания сферы разреженным газом [2, 3] показало удовлетворительную точность.

Предположение, что s-частицы движутся упорядоченно (с пренебрежимо малой хаотической составляющей скорости), ограничивает применение модели случаем гиперзвукового течения газа.

В настоящей работе дается обобщение описанной модели на случай, когда частицы обоих множеств имеют хаотическую составляющую скорости, это дает возможность использовать модель при любых числах Маха.

Как и раньше будем считать молекулы твердыми абсолютно упругими сферами и по-прежнему будем считать, что при любом столкновении частиц из разных множеств происходит переход частицы из одного множества в другое. В каждом из множеств будем считать распределение частиц по скоростям близким к максвелловскому и в соответствии с этим определять напряжения и тепловые потоки. Однако, если раньше было естественно считать, что упорядоченно движущиеся s-частицы после столкновений переходят в множество хаотически движущихся t-частиц, то теперь в случае, когда в обоих множествах есть хаотическое движение, будем считать вероятным и переход t-частиц в множество s-частиц. Обозначим  $\beta$  вероятность при столкновении s-частицы перейти в множество t-частиц, а вероятность t-частицы перейти в множество s-частиц, соответственно,  $1-\beta$ .

Вероятность перехода частиц из одного множества в другое естественно связать с интенсивностью хаотического движения частиц в соответствующем множестве, причем больше вероятность перехода в то множество, в котором больше интенсивность хаотического движения. Эту интенсивность можно характеризовать средним модулем скорости хаотического движения  $c_i = \sqrt{\frac{16\rho_i}{3\pi(k-1)\rho_i}}$ , где  $\rho$  - плотность i-го газа (i=s,t), k - показатель адиабаты, причем  $k = 5/3$ , если вращение частиц не учитывается, и  $k = 4/3$ , если энергия хаотического движения равномерно распределена по вращательным и поступательным степеням свободы.

Наиболее естественным является предположение, что  $\beta$  пропорционально  $c_s^t$ , поскольку  $c_s^t$  есть некоторый объем в пространстве скоростей, характеризующий интенсивность хаотического движения частиц, а  $\beta$  есть вероятность столкнувшейся частицы оказаться после столкновения в множестве t. Аналогично  $1-\beta$  пропорционально  $c_s^s$ , откуда следует  $\beta = \frac{c_t^3}{c_t^3 + c_s^3}$

Рассмотрим теперь на основе описанной модели структуру скачка уплотнения в газе, следуя [1], где это сделано для случая гиперзвукового потока перед скачком. Уравнения баланса массы, импульса и энергии для s- и t-компонентов потока при континуальном описании имеют вид:

$$\frac{d}{dx}(\rho_s v_s) = -I\beta + I(1-\beta), \quad \frac{d}{dx}(\rho_t v_t) = -I\beta - I(1-\beta), \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \rho_s v_s^2 + p_s - \frac{4}{3} \mu_s \frac{dv_s}{dx} \right) = -I\beta \left( v_s + \frac{\rho_s}{\rho_s v_s} \right) + I(1-\beta) \left( v_t + \frac{\rho_t}{\rho_t v_t} \right), \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \rho_t v_t^2 + p_t - \frac{4}{3} \mu_t \frac{dv_t}{dx} \right) = -I\beta \left( v_s + \frac{\rho_s}{\rho_s v_s} \right) + I(1-\beta) \left( v_t + \frac{\rho_t}{\rho_t v_t} \right), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \rho_s v_s \left( U_s + \frac{v_s^2}{2} + \frac{p_s}{\rho_s} \right) - \frac{4}{3} \mu_s v_s \frac{dv_s}{dx} - \frac{\lambda_s}{c_v} \frac{dU_s}{dx} \right] \left( \rho_s v_s^2 + p_s - \frac{4}{3} \mu_s v_s \frac{dv_s}{dx} \right) = \\ = -I\beta \left( v_s + \frac{p_s}{\rho_s v_s} \right) + I(1-\beta) \left( v_t + \frac{p_t}{\rho_t v_t} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \rho_t v_t \left( U_t + \frac{v_t^2}{2} + \frac{p_t}{\rho_t} \right) - \frac{4}{3} \mu_t v_t \frac{dv_t}{dx} - \frac{\lambda_t}{c_v} \frac{dU_t}{dx} \right] \left( \rho_t v_t^2 + p_t - \frac{4}{3} \mu_t v_t \frac{dv_t}{dx} \right) = \\ = I\beta \left( v_s + \frac{p_s}{\rho_s v_s} \right) - I(1-\beta) \left( v_t + \frac{p_t}{\rho_t v_t} \right), \end{aligned} \quad (5)$$



где  $\rho, v$ - плотность и скорость компонентов (индекс указывает соответствующий компонент),  $U$  - кинетическая энергия хаотического движения молекул,  $c_\nu$ - удельная теплоемкость газа при постоянном объеме,  $I$ - масса молекул одного множества, столкнувшихся с молекулами другого множества в единичном объеме в единицу времени. Приближенно будем полагать

$$I = \frac{\pi d^2}{m} \rho_s \rho_t \sqrt{(v_s - v_t)^2 + c_s^2 + c_t^2} \quad (6)$$

Здесь  $m$  - масса молекул,  $d$  - их диаметр;  $\mu, \lambda$  - вязкость и теплопроводность компонентов, которые могут быть определены как для газа из твердых сфер. Для каждого из компонентов считается справедливым уравнение состояния

$$p_i = (k - 1) \rho_i U_i, \quad (7)$$

Для расчета структуры скачка с помощью приведенных уравнений сформулируем граничные условия:

$$\text{при } x \rightarrow -\infty, \quad v_s \rightarrow v_{s-}, \quad \rho_s \rightarrow \rho_{s-}, \quad \rho_t \rightarrow \rho_{t-}, \quad U_s \rightarrow U_{s-}, \quad \rho_t \rightarrow 0;$$

$$\text{при } x \rightarrow +\infty, \quad v_t \rightarrow v_{t+}, \quad \rho_t \rightarrow \rho_{t+}, \quad \rho_s \rightarrow \rho_{s+}, \quad U_t \rightarrow U_{t+}, \quad \rho_s \rightarrow 0;$$

Вследствие сохранения массы, импульса и энергии потока должны выполняться условия динамической совместности:

$$\frac{v_{t+}}{v_{s-}} = \frac{\rho_{s-}}{\rho_{t+}} = \frac{2}{(k+1)M^2} + \frac{k-1}{k+1}, \quad \frac{p_{t+}}{p_{s-}} = \frac{2kM^2}{k+1} - \frac{k-1}{k+1},$$

где  $M = \frac{v_{s-}}{\sqrt{\frac{k p_{s-}}{\rho_{s-}}}}$  - число Маха потока перед скачком.

В дальнейшем перейдем к безразмерным переменным, взяв за масштабы скорости, плотности и длины соответственно  $v_{s-}, \rho_{s-}, \frac{m}{\pi d^2 \rho_{s-}}$  и сохранив прежние обозначения.

Сначала будем считать оба компонента невязкими и нетеплопроводными, положив  $\mu_s = \mu_t = 0$   $\lambda_s = \lambda_t = 0$  Тогда уравнения (1) - (5) можно записать в виде

$$\frac{dA_s}{dx} = I(1 - 2\beta), \quad \frac{dA_t}{dx} = I(2\beta - 1); \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx} (A_s B_s) = I[(1 - \beta) B_t - \beta B_t], \quad \frac{d}{dx} (A_t B_t) = I[\beta B_t - (1 - \beta) B_t]; \quad (9)$$

$$\frac{d}{dx} (A_s C_s) = I[(1 - \beta) C_t - \beta C_t], \quad \frac{d}{dx} (A_t C_t) = I[\beta C_t - (1 - \beta) C_t]; \quad (10)$$

где

$$A_s = \rho_s v_s, \quad A_t = \rho_t v_t, \quad B_s = v_s + \frac{p_s}{\rho_s v_s}, \quad B_t = v_t + \frac{p_t}{\rho_t v_t}, \quad C_s = U_s + \frac{v_s^2}{2} + \frac{p_s}{\rho_s}, \quad C_t = U_t + \frac{v_t^2}{2} + \frac{p_t}{\rho_t}$$

Складывая попарно уравнения (8), (9) и (10), легко получить после интегрирования и определения констант из граничных условий

$$A_s + A_t = \text{const} = 1, \quad A_s B_s + A_t B_t = \text{const} = 1 + \frac{1}{kM^2}, \quad A_s C_s + A_t C_t = \text{const} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(k-1)M^2}$$

Из решения уравнений (8 - 10) можно получить, что  $B_s, B_t, C_s, C_t$  не зависят от  $x$ , постоян-

ными также являются  $v_s, v_t, U_s, U_t$  и зависящие от них  $c_s, c_t, \beta$ , а изменяются только плотности компонент  $\rho_s, \rho_t$  и зависящие от них  $p_s, p_t, I$ . Из первого уравнения (8) имеем  $\frac{d\rho_s}{dx} = -D\rho_s(1 - \rho_s)$  откуда, выбрав за начало отсчета  $x$  точку, где  $\rho_s = 0.5$ , имеем  $\rho_s = \frac{1}{1+e^{Dx}}$ , а из второго уравнения (8) получим  $\rho_t = \frac{e^{Dx}\rho_{t+}}{1+e^{Dx}}$ . Здесь обозначено

$$D = (2\beta - 1) \sqrt{(M^2 - 1)^2 + \frac{4}{\pi k} \left( (kM^2 + 1)^2 = k(M^2 - 1)^2 \right) / \left( \frac{k-1}{2} M^2 + 1 \right)} \quad (11)$$

То обстоятельство, что скорости и внутренние энергии компонент в соответствии с полученным решением не зависят от  $x$ , приводит к тому, что их вязкость и теплопроводность не существенны и полученное решение справедливо и для вязкого теплопроводного газа. Тогда средние значения плотности, скорости и энергии по смеси будут

$$\bar{\rho} = \rho_s + \rho_t = \frac{1}{1 + e^{Dx}} \left( 1 + e^{Dx} \frac{M^2(k+1)}{2 + M^2(k-1)} \right)$$

$$\bar{v} = \frac{\rho_s v_s + \rho_t v_t}{\bar{\rho}} = \frac{1 + e^{Dx}}{1 + e^{Dx} \frac{M^2(k+1)}{2 + M^2(k-1)}}$$

$$\bar{U} = \frac{\rho_s U_s + \rho_t U_t}{\bar{\rho}} = \frac{\left[ \frac{1}{k(k-1)M^2} + \frac{e^{Dx}}{2k} \left( \frac{k+1}{k-1} - \frac{1}{H} \right) \right]}{1 + e^{Dx} H}$$

Таким образом, можно считать приведенную двухкомпонентную модель потока из твердых частиц, а также исходную четырехкомпонентную модель газозвеси [4] применимой даже в тех случаях, когда путь свободного пробега частиц сравним с газодинамическим масштабом. Более того, не исключено, что представления, положенные в основу построения этих моделей, будут полезны в аэродинамике разреженных газов при рассмотрении переходных режимов от сплошной среды к свободномолекулярному обтеканию.

## Список литературы

- [1] 1. Матвеев С.К., Кочерыженков Г.В. Структура ударных волн в газах и газозвесях. // Сб. Динамические процессы в газах и твердых телах. Л., 1990. С. 28 – 36.
- [2] Джайчибеков Н.Ж., Матвеев С.К. Применение трехкомпонентной модели к расчету обтекания тел газозвесью и разреженным газом. Журнал ПМТФ. СО АН СССР, Новосибирск, 1991, №1, – С. 39-42.
- [3] Матвеев С.К., Джайчибеков Н.Ж. Расчет обтекания сферы разреженным газом при произвольном числе Кнудсена. // Вестник Санкт-Петербургского университета. Санкт-Петербург. 1992. сер.1, вып.2. (№8) – С. 77-81.
- [4] Матвеев С.К. Математическое описание обтекания тел потоком газозвеси с учетом влияния отраженных частиц. // Сб. Движение сжимаемых жидкостей и неоднородных сред. Л., 1982. Вып.7. С. 189 – 201.

УДК 517.977.1/5; 517.958:52/59

## ОПТИМАЛЬНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М.Н. Калимолдаев, М.Т. Дженалиев

Институт проблем информатики и управления, г. Алматы

**Аннотация.** В данной работе решена задача синтеза управления для электроэнергетической системы. При этом использованы конструкции метода функций Беллмана-Кротова в форме необходимых и достаточных условий оптимальности [1, 2].

**Ключевые слова:** оптимальность, электроэнергетическая система

**Постановка задачи.** Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = 0.5 \sum_{i=1}^l \int_0^T (k_i y_i^2 + r_i u_i^2) dt + \Lambda(x(T), y(T)), \quad (1)$$

при условиях:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= y_i, & \frac{dy_i}{dt} &= -\lambda_i y_i - f_i(x) + b_i u_i, \\ x_i(t_0) &= x_{i0}, & y_i(t_0) &= y_{i0}, \quad i = \overline{1, l}, \quad t \in (t_0, T), \\ x(t), y(t) &: (t_0, T) \rightarrow R^l, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u_i \in R^1$  – скалярное управление;  $f_i(x)$  – непрерывно дифференцируемая вектор функция, удовлетворяющая условию интегрируемости:

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i}, \quad \forall i \neq k; \quad (3)$$

моменты времени  $t_0, T$  будем считать заданными;  $r_i, \lambda_i, k_i$  – положительные постоянные; терминальные значения  $x(T), y(T)$  заранее неизвестны.

Проблема синтеза для задачи Коши (1)–(3) крайне важна в задачах оптимизации работы электроэнергетических систем.

**Основная лемма.** Следуя формализму Беллмана-Кротова [1, 2], покажем справедливость следующей леммы.

**Лемма.** Для того чтобы управление  $u_i^0(y_i) = -\frac{b_i}{r_i} y_i, i = \overline{1, l}$  и соответствующее решение системы (2)–(3)  $\{x(t), y(t)\}$  было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы

$$K(x(T), y(T)) = \Lambda(x(T), y(T)), \quad k_i = 2\lambda_i + \frac{b_i^2}{r_i}, \quad i \in \overline{1, l},$$

$$K(x, y) = 0.5 \sum_{i=1}^l y_i^2 - \sum_{\substack{i=1, \\ x_j=0, j>i}}^l \int_0^{x_i} f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_l) d\xi_i \quad (4)$$

функция Беллмана-Кротова, причем,

$$J(u^0) = \min_u J(u) = K(x(t_0), y(t_0)).$$

**Задача оптимального управления мощностью паровых турбин.** Одной из моделей, описывающей переходные процессы в электрической системе, является следующая система дифференциальных уравнений [3, 4]:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_i}{dt} &= S_i, \quad H_i \frac{dS_i}{dt} = -D_i S_i - E_i^2 Y_{ii} \sin \alpha_{ii} - P_i \sin(\delta_i - \alpha_i) - \\ &- \sum_{j=1, j \neq i}^l P_{ij} \sin(\delta_{ij} - \alpha_{ij}) + u_i, \quad i \in \overline{1, l}, \quad t \in (0, T), \\ \delta_{ij} &= \delta_i - \delta_j, \quad P_i = E_i U Y_{i, n+1}, \quad P_{ij} = E_i E_j Y_{ij}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\delta_i$  – угол поворота ротора  $i$ -го генератора относительно некоторой синхронной оси вращения (ось вращения шин постоянного напряжения, которая совершает вращение со скоростью 50 об./сек.;  $S_i$  – скольжение  $i$ -го генератора;  $H_i$  – постоянная инерции  $i$ -й машины;  $u_i = P_i$  – механические мощности, которые подводятся к генератору;  $E_i$  – ЭДС  $i$ -й машины;  $Y_{ij}$  – взаимная проводимость  $i$ -й и  $j$ -й ветвей системы;  $U = \text{const}$  – напряжение на шинах постоянного напряжения;  $Y_{i, n+1}$  – характеризует связь (проводимость)  $i$ -го генератора с шинами постоянного напряжения;  $D_i = \text{const} \geq 0$  – механическое демпфирование;  $\alpha_{ij}, \alpha_i$  – постоянные величины, учитывающие влияние активных сопротивлений в статорных цепях генераторов.

Сложность анализа модели (5) заключается в учете  $\alpha_{ij}$ ,  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ . Так как при этом  $\delta_{ij} = -\delta_{ji}$ , то модель (5) не является консервативной; не удастся построить для нее функции Ляпунова в форме первого интеграла. Систему принято называть позиционной моделью.

Пусть переменные состояния и управления в установившемся после аварийном режиме равны:

$$S_i = 0, \quad \delta_i = \delta_i^F, \quad u_i = u_i^F, \quad i = \overline{1, l}. \quad (6)$$

Для получения системы возмущенного движения перейдем к уравнениям в отклонениях, полагая:

$$S_i = \Delta S_i, \quad \delta_i = \delta_i^F + \Delta \delta_i, \quad u_i = u_i^F + \Delta u_i, \quad i = \overline{1, l}. \quad (7)$$

Далее, для удобства переменные  $\Delta u_i$ ,  $\Delta \delta_i$ ,  $\Delta S_i$  заново обозначая через  $u_i$ ,  $\delta_i$ ,  $S_i$ , из (6) получим:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = S_i, \quad \frac{dS_i}{dt} = \frac{1}{H_i} [-D_i S_i - f_i(\delta_i) - N_i(\delta) + M_i(\delta) + u_i], \quad i = \overline{1, l}, \quad t \in (0, T), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} f_i(\delta_i) &= P_i [\sin(\delta_i + \delta_i^F - \alpha_i) - \sin(\delta_i^F - \alpha_i)], \\ N_i(\delta) &= \sum_{j=1, j \neq i}^l \bar{N}_{ij}(\delta_1, \dots, \delta_l) = \sum_{j=1, j \neq i}^l \Gamma_{ij}^1 [\sin(\delta_{ij} + \delta_{ij}^F) - \sin \delta_{ij}^F], \\ M_i(\delta) &= \sum_{j=1, j \neq i}^l \bar{M}_{ij}(\delta_1, \dots, \delta_l) = \Gamma_{ij}^2 [\cos(\delta_{ij} + \delta_{ij}^F) - \cos \delta_{ij}^F], \end{aligned}$$

$$\Gamma_{ij}^1 = P_{ij} \cos \alpha_i, \Gamma_{ij}^2 = P_{ij} \sin \alpha_i, P_{ij} = P_{ji}, \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, k = 1, 2.$$

Управление будем искать в виде:

$$u_i = \nu_i - M_i(\delta), \quad i = \overline{1, l}, \quad \text{где функция } \nu_i \text{ подлежит определению.} \quad (9)$$

Требуется минимизировать функционал

$$J(\nu) = J(\nu_1, \dots, \nu_l) = 0.5 \sum_{i=1}^l \int_0^T (w_{si} S_i^2 + w_{\nu i} \nu_i^2) dt + \Lambda(\delta(T), S(T)), \quad (10)$$

при условиях (8)–(9), где  $w_{si}, w_{\nu i}$  – положительные постоянные весовые коэффициенты;  $f_i(\delta_i)$  –  $2\pi$ -периодическая непрерывно дифференцируемая функция;  $N_i(\delta)$  –  $2\pi$ -периодическая непрерывно дифференцируемая функция относительно  $\delta_{ij}$ ; для  $N_i(\delta)$  выполняется условие интегрируемости типа (3);  $T$  – длительность переходного процесса, считается заданной. Кроме того, заданы начальные условия:

$$\delta_i(0) = \delta_{i0}, \quad S_i(0) = S_{i0}, \quad i = \overline{1, l}, \quad (11)$$

а величины  $\delta_i(T), S_i(T)$  являются неизвестными.

На основе леммы получаем

**Теорема.** Для того чтобы управление  $\nu_i^0 = -S_i/w_{\nu i}, i = \overline{1, l}$  и соответствующее решение  $\{\delta^0, S^0\}$  системы (8) было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Lambda(\delta(T), S(T)) = K(\delta(T), S(T)), \quad w_{si} = 2D_i + 1/w_{\nu i} > 0, \quad i = \overline{1, l},$$

$$K(\delta, S) = 0.5 \sum_{i=1}^l \left[ H_i S_i^2 + \int_0^{\delta_i} f_i(\delta_i) d\delta_i \right] + \sum_{\substack{i=1, \\ \delta_j=0, j>i}}^l \int_0^{\delta_i} N_i(\delta_1, \dots, \delta_{i-l}, \xi_i, \delta_{i+1}, \dots, \delta_l) d\xi_i$$

– функция Беллмана-Кротова, причем,

$$J(\nu^0) = \min_{\nu} J(\nu) = K(\delta^0, S^0). \quad (12)$$

Заметим, что при доказательстве теоремы предположения (9) из леммы принимают вид:

$$K_{\delta_i} S_i = \frac{K_{S_i}}{H_i} [f_i(\delta_i) + N_i(\delta)], \quad \text{т.е. } K_{S_i} = H_i S_i, \quad K_{\delta_i} = f_i(\delta_i) + N_i(\delta), \quad i = \overline{1, l}. \quad (13)$$

**Численный пример. Оптимальное управление движением двухмашинной энергетической системы.** В системе (5) принимаем  $i = 1, 2$ , и предполагаем, что механическое демпфирование отсутствует, т.е. коэффициенты  $D_1, D_2$  равны нулю. Согласно соотношений (5)–(11) задача оптимального управления принимает вид [5]:

$$J(u) = J(u_1, u_2) = 0.5 \sum_{i=1}^2 \int_0^T (S_i^2 + 0.1\nu_i^2) dt + 0.5[\delta^2(T) + S^2(T)], \quad (14)$$

$$\frac{d\delta_i}{dt} = S_i, \quad \frac{dS_i}{dt} = \frac{1}{H_i} [-f_i(\delta_i) - N_1(\delta) + \nu_i], \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

где  $f_i(\delta_i) = P_i[\sin(\delta_i + \delta_i^F - \alpha_i) - \sin(\delta_i^F - \alpha_i)]$ ,  $i = 1, 2$ ,  $N_1(\delta) = \Gamma_1[\sin(\delta_{12} + \delta_{12}^F) - \sin \delta_{12}^F]$ ,  $M_1(\delta) = \Gamma_2[\cos(\delta_{12} + \delta_{12}^F) - \cos \delta_{12}^F]$ ,  $\delta_{12}^F = \delta_1^F - \delta_2^F$ ,  $\Gamma_1 = P_{12} \cos \alpha_{12}$ ,  $\Gamma_2 = P_{12} \sin \alpha_{12}$ ,  $\delta_{12} = \delta_1 - \delta_2$ ,  $\delta_{21} = -\delta_{12}$ .

Числовые данные системы (15):

$$\alpha_1 = -0.052; \alpha_2 = -0.104; H_1 = 2135; H_2 = 1256; P_1 = 0.85;$$

$$P_2 = 0.69; P_{12} = 0.9; \delta_1^F = 0.827; \delta_2^F = 0.828; \alpha_{12} = -0.078;$$

и начальные данные:

$$\delta_1(0) = 0.18; \delta_2(0) = 0.1; S_1(0) = 0.001; S_2(0) = 0.002. \quad (16)$$

Согласно формулы (12) функция Беллмана-Кротова и ее частные производные будут иметь вид:

$$K(\delta, S) \approx 1067.5S_1^2 + 628S_2^2 + 2.004 - \cos(\delta_1 + 0.879) - 0.77\delta_1 - \cos(\delta_2 + 0.932) - 0.83\delta_2,$$

$$K_{\delta_1}(\delta, S) = 0.425[\sin(\delta_1 + 0.879) - \sin 0.879] + 0.9 \sin(\delta_1 - \delta_2),$$

$$K_{\delta_2}(\delta, S) = 0.345[\sin(\delta_2 + 0.932) - \sin 0.932] + 0.9 \sin(\delta_1 - \delta_2),$$

$$K_{S_1}(\delta, S) = 2135S_1, \quad K_{S_2}(\delta, S) = 1256S_2.$$

Управления по принципу обратной связи (синтез) определяются по формулам:

$$\nu_1^0(\delta, S) = -S_1, \quad \nu_2^0(\delta, S) = -S_2, \quad (17)$$

при этом использовано предположение (13).

Результаты численного расчета оптимальной пары вектор-функций состояние-управление

$$\{\delta^0(t), S^0(t); \nu^0(t) = \nu^0(\delta^0(t), S^0(t))\}$$

получены из соотношений (15)–(17), которые отражены на рисунках 1 и 2.

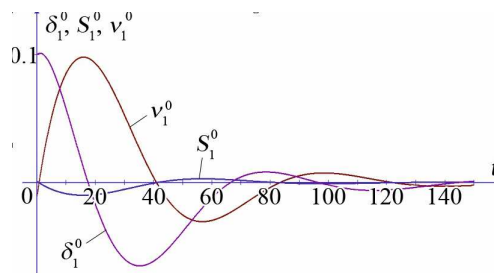


Рисунок 1 Результаты численного расчета

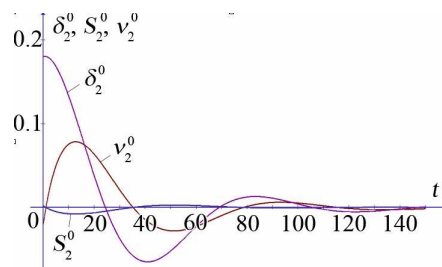


Рисунок 2 Результаты численного расчета

## Список литературы

- [1] *Krotov V.F.* Global methods in optimal control theory. M.Dekker. – 1996. 399p.
- [2] *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления.- М.Физматлит. 1997. 288с.
- [3] *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 896с.
- [4] *Blekhman I.I., Fradkov A.L.* On general definitions of synchronization// In: Selected topics in vibrational mechanics. Ed. I.I. Blekhman, Singapore, World Scientific. 2004. P.179-188.
- [5] *Горев А.А.* Переходные процессы синхронной машины. М.:Наука, Ленинградск. отд-ние, 1985. 502с.

УДК 519.6

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА АДАПТИВНЫХ СЕТОК

А. Касенова, С. Рахметуллина

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева

**Summary.** In this article approach of the solution of a problem of heat conductivity with use of a method of adaptive grids is offered. As in the course of a heat transfer in two-layer materials from an influence source the function characterizing temperature, undergoes strong changes near influence area, use of adaptive grids is one of optimum approaches at the solution of such tasks. For calculations the method of final differences, the scheme a predictor - the proofreader on a uniform motionless grid and on an adaptive grid, and also a pro-race method is used.

**Keywords:** Adaptive grids, pro-race method, differential scheme

**Андатпа.** Мақалада адаптивті торлар әдісін пайдаланып жылуөткізгіштік есебін шешу жолдары ұсынылған. Екіқабатты материалдардағы жылу тасымалдау үдерісінде әсер ету ошағынан температураны сипаттайтын функция, әсер ету аймағы маңында қатты өзгерістерге ұшырайтындықтан, адаптивті торларды пайдалану мұндай есептерді шешуде ең тиімді әдістердің бірі болып табылады. Есептеулер үшін ақырғы айырымдар әдісі, бірқалыпты жылжымайтын тордағы және адаптивті тордағы предиктор-корректор сызбасы, сонымен қатар қуалау әдісі қолданылады.

**Кілттік сөздер:** Адаптивті торлар, қуалау әдісі, айырымдық сызба

**Аннотация.** В данной статье предложен подход решения задачи теплопроводности с использованием метода адаптивных сеток. Поскольку в процессе теплопередачи в двухслойных материалах от источника воздействия функция, характеризующая температуру, претерпевает сильные изменения вблизи области воздействия, то использование адаптивных сеток является одним из оптимальных подходов при решении такого рода задач. Для расчетов используется метод конечных разностей, схема предиктор - корректор на равномерной неподвижной сетке и на адаптивной сетке, а также метод прогонки.

**Ключевые слова :** Адаптивные сетки, метод прогонки, разностная схема

**Введение.** Задача математического и компьютерного моделирования процессов теплопроводности в двухслойных материалах в зависимости от параметров воздействия дает возможность прогнозировать, какие именно структуры и фазы формируются в материалах в зависимости от достигаемых в процессе воздействия температур. На основе результатов моделирования можно выбирать параметры воздействия так, чтобы формировать достаточно высокие температуры на границе покрытия с подложкой для ускорения диффузионных процессов с целью улучшения адгезии покрытия к подложке.

При математическом моделировании процессов теплопроводности используются численные методы, и одним из методов является метод конечных разностей. При использовании этого метода в рассматриваемой области строят сетку по времени и пространству и находят решение поставленной задачи на дискретной области. [6]

В данной статье рассматривается подход решения задачи теплопроводности с использованием метода адаптивных сеток. Преимущество данного подхода заключается в том, что на адаптивных сетках с небольшим количеством узлов можно добиться такой же точности решения, как на регулярных сетках с очень большим числом узлов. В двухслойных материалах в точках воздействия источника градиент температуры значительно выше, чем вдали от источника и использование метода адаптивных сеток позволяет адаптироваться расчетной сетке под поведение искомой функции, чем больше градиент функции, тем гуще сетка. В результате получаются не просто криволинейные сетки, а сетки, которые приспособляются к процессу изменения температуры на рассматриваемой области.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую постановку задачи теплопроводности. Удельный тепловой поток на расстоянии  $r$  от точки пересечения оси симметрии пучка с поверхностью образца задается выражением (1)

$$q(r) = q_{max} \cdot \exp(-k \cdot r^2), \quad (1)$$

где  $q_{max} = \frac{k \cdot N}{\pi}$ ;  $N$  - мощность пучка;  $N = U_k \cdot I$ ;  $U_k$  - катодное напряжение;  $I$  - сила тока пучка;  $k$  - коэффициент сосредоточенности теплового потока;  $k = \frac{1.125}{R^2}$



Характер теплообмена с окружающей средой на ненагреваемой плоскости подложки и торцах образца мало сказывается на распределении температур в зоне контакта подложки и покрытия, и мы моделируем образец бесконечной пластиной толщины  $h$ , лежащей на поверхности полупространства, заполненного веществом с заданными теплофизическими характеристиками.

Считаем, что в момент времени  $t_0 = \frac{x_0}{v}$  на поверхности начинает действовать нормально-круговой источник, центр которого движется равномерно со скоростью  $v$  по оси  $X$ , и выключается в момент времени  $t_1 = -t_0$ , причем моменту времени  $t = 0$  соответствует прохождение центром пучка точки с координатами  $(0,0)$

Поскольку нагрев происходит в вакууме, мы полагаем, что единственным механизмом тепловых потерь с нагреваемой поверхности покрытия является тепловое излучение, описываемое уравнением Стефана-Больцмана

$$p = \sigma \cdot \varepsilon \cdot T^4, \quad (2)$$

где  $p$  - поверхностная плотность мощности излучения ( $\frac{Bm}{m^2}$ );  $\sigma$  - постоянная Стефана-Больцмана;  $\varepsilon$  - коэффициент черноты для материала покрытия.

Таким образом, необходимо найти функции  $T_1(x, y, z, t)$  (температура покрытия) и  $T_2(x, y, z, t)$  (температура подложки), определенные в областях  $S_1$  и  $S_2$  соответственно. Область  $S_1$  определяется неравенствами  $0 \leq z < h, t_0 \leq t \leq t_1$ , а область  $S_2$  неравенствами  $h \leq z < \infty$  и  $t_0 \leq t \leq t_1$  для обеих областей  $x \in (-\infty, \infty)$  и  $y \in (-\infty, \infty)$ .

Рассмотрим точку  $P$ , принадлежащую поверхности двухслойного материала, тогда уравнение теплопроводности описывается выражениями (3) и (4):

$$\rho_1 \cdot C_1 \cdot \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad (3)$$

$$\rho_2 \cdot C_2 \cdot \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_2 \cdot \frac{\partial T_2}{\partial r} \right). \quad (4)$$

Где  $r = \sqrt{(X_c(t) - x)^2 + y^2}$  - расстояние от точки  $P$  до центра нормально-кругового источника  $X_c(t) = X_0 + v \cdot t$ ,  $\lambda_1 = \lambda_1(T)$ ,  $\lambda_2 = \lambda_2(T)$  коэффициенты теплопроводности материала покрытия и подложки, соответственно, рассматриваемые как функции от температуры,  $C_1 = C_1(T)$  и  $C_2 = C_2(T)$  - удельные теплоемкости материала покрытия и подложки соответственно, также рассматриваемые как функции температуры,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  плотности материалов покрытия и подложки (константы).

Задача (3)-(4) решается при следующих начальных и краевых условиях,

**начальные условия:**

$T_1(x, 0) = T_2(x, 0) = T^0$ , где  $T^0$  начальная температура образца;

**краевые условия:**

при

$$z = 0, \lambda_1((T_1)_p) \cdot \left( \frac{\partial T_1}{\partial z} \right)_p = q_{max} \cdot \exp(-k \cdot r^2) - \sigma \cdot \varepsilon \cdot ((T_1)_p)^4, \quad (5)$$

где  $(T_1)_p = T_1(x, y, 0)$  и  $\left( \frac{\partial T_1}{\partial z} \right)_p$  соответственно значения температуры и нормальной производной температуры в точке,  $k$  - коэффициент сосредоточенности, связанный с радиусом пучка,  $\sigma$  - постоянная Стефана-Больцмана,  $\varepsilon$  - коэффициент черноты для материала покрытия. [4]

**Численное решение. Схема предиктор-корректор на равномерной сетке.**

Рассмотрим одномерную по пространству задачу, при вычислении значений функций  $\lambda_1(T)$  и  $\lambda_2(T)$  используем полиномиальную интерполяцию по табличным значениям коэффициентов теплопроводности никеля и железа, то есть, считаем, что на каждом шаге по времени коэффициент теплопроводности является константой.

Для численного решения поставленной задачи рассмотрим схему предиктор-корректор на равномерной неподвижной сетке с узлами  $x_j = jp$  и шагом  $p > 0$ .

Уравнения (3), (4), (5) запишем в виде

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{r} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2},$$

$$T_i(x, 0) = T^0, \quad , i = 1, 2 \quad (6)$$

$$\lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} = q_{max} \exp(-kr^2) - \sigma \varepsilon T_1^4 \quad x = 0$$

Введем обозначение  $\mu_i = \frac{\lambda_i}{r \rho_i c_i}$ , тогда первое уравнение системы (6) примет вид:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} - \mu_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} = 0, i = 1, 2. \quad (7)$$

Аппроксимируем уравнение (7) явной схемой предиктор-корректор, которая на неподвижной равномерной сетке имеет вид:

$$\frac{T_{ij+1/2}^* - \frac{1}{2} (T_{ij+1}^n + T_{ij}^n)}{\tau/2} - \mu_i \frac{T_{ij-1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij+1}^n}{h^2} = 0, i = 1, 2; j = 0, \dots, N-1 \quad (8)$$

$$\frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\tau} - \mu_i \frac{T_{ij-1/2}^* - 2T_{ij}^* + T_{ij+1/2}^*}{h^2} = 0, i = 1, 2; j = 0, \dots, N-1 \quad (9)$$

На шаге предиктор вычисляются вспомогательные величины  $T_{ij+1/2}^*$ , определенные в узлах с полуцелыми индексами. На шаге корректор вычисляются искомые величины  $T_{ij}^{n+1}$ . [2]

**Схема предиктор-корректор на подвижной сетке.** Для того чтобы построить схему на подвижной сетке надо переписать задачу в новых координатах, связанных с исходными координатами гладким преобразованием

$$x = x(q, t), 0 \leq q \leq 1, 0 \leq t \leq T \quad (10)$$

с положительным якобианом  $J(q) = x_q$ , взаимнооднозначно отображающим единичный отрезок  $[0,1]$  на область решения. В новых переменных уравнение (7) запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} - \frac{\mu_i}{J} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial T_i}{\partial q} \right) = 0 \quad (11)$$

Аппроксимируем уравнение (11) явной схемой предиктор-корректор, которая на подвижной равномерной сетке имеет вид:

$$\frac{T_{ij+1/2}^* - \frac{1}{2} (T_{ij+1}^n + T_{ij}^n)}{\tau/2} - \frac{\mu_i}{J_{j+1/2}^n} \left( \frac{T_{iqj+1/2}^n}{J_{j+1/2}^n} - \frac{T_{iqj-1/2}^n}{J_{j-1/2}^n} \right) = 0, i = 1, 2; j = 0, \dots, N-1 \quad (12)$$

$$\frac{T_{ij+1}^n + T_{ij}^n}{\tau} - \frac{\mu_i}{J_{j+1/2}^n} \left( \frac{T_{iqj+1/2}^*}{J_{j+1/2}^n} - \frac{T_{iqj-1/2}^*}{J_{j-1/2}^n} \right) = 0, i = 1, 2; j = 0, \dots, N-1 \quad (13)$$

$$J_{j+1/2}^n = x_{q,j+1/2}^n = \frac{x_{j+1}^n - x_j^n}{h},$$

$$T_{iq,j+1/2}^n = \frac{T_{ij+1}^n - T_{ij}^n}{h},$$

$$T_{iq,j+1/2}^* = \frac{T_{ij+1}^* - T_{ij}^*}{h},$$

Применим к решению поставленной задачи (6) метод адаптивных сеток.

**Алгоритм метода адаптивных сеток.** Алгоритм метода адаптивных сеток заключается в следующем:

1) на первом шаге по времени берется равномерная сетка на отрезке с шагом  $h = 1/N, x_j^0$  - узлы этой сетки. Выполняется решение задачи методом предиктор-корректор на равномерной сетке.[1]

2) строится управляющая функция

$$w_{j+1/2} = 1 + \alpha_1 \left| \frac{T_{ij+1}^n T_{ij}^n}{h_{j+1/2}^n} \right|.$$

3) Для определения координат узлов новой сетки  $x_j^{n+1}$  методом прогонки решается задача:

$$\frac{1}{h} \left( w(x_{j+1/2}) \frac{x_{j+1} - x_j}{h} - w(x_{j-1/2}) \frac{x_j - x_{j-1}}{h} \right) = 0, j = 1, \dots, N - 1,$$

$$x_0 = 0, x_N = l$$

4) на построенной сетке  $x_j^{n+1}$  находится решение разностной задачи, на адаптивной сетке выполняется решение задачи методом предиктор-корректор на подвижной сетке [1].

**Компьютерная реализация.** Численный алгоритм методом предиктор-корректор реализован программно в среде объектно-ориентированного программирования Visual Studio 2010 на языке C#. Данные, полученные в результате работы системы, отображающие распределение температурного поля, в виде графика представлены на рисунке 1.

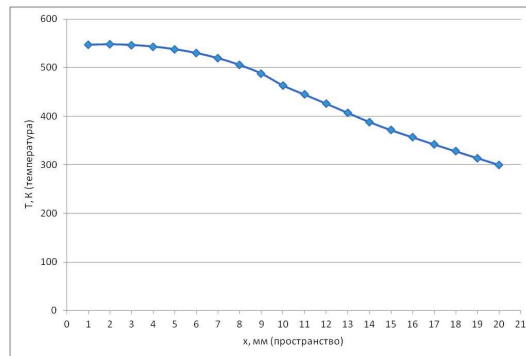


Рисунок 1 Распределение температурного поля в образце

Для расчета процесса формирования температурного поля была введена сетка 20 шагов по пространству и 20 шагов по времени, начальная температура была равна 300К при мощности 1500 Вт и времени воздействия на материал 60 секунд была смоделирована температура в 540 К,

Произведены расчеты на адаптивной сетке, которые согласуются с экспериментальными данными [4].

Вывод. В данной статье предложено решение задачи теплопроводности с использованием метода адаптивных сеток. Решение применено для расчетов температурных полей, образующихся при нагреве двухслойных металлических поглотителей (защитных никелевых покрытий на стальных подложках). Расчетные температурные профили позволяют прогнозировать достижение заданных температур на поверхности покрытия и на границе покрытия с подложкой при использовании определенных параметров источника (мощности, времени воздействия).

## Список литературы

- [1] Разностные схемы на адаптивных сетках: Часть 1. Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И. // Задачи для уравнений в частных производных с одной пространственной переменной. Новосибирск. 2005.
- [2] МО монотонизации явной схемы предиктор-корректор. Шокин Ю.И., Сергеева Ю.В., Хакимзянов Г.С. // Вестник КазНУ. Серия: Математика, механика, информатика. - Алматы, 2005. - N 2. - С.103-114.
- [3] Метод адаптивных сеток в одномерных нестационарных задачах конвекции-диффузии. Дегтярев Л.М., Иванов Т.С. // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, №7.
- [4] Modification of Ni -Based Plasma Detonation Coatings by a Low-Energy DC E-beam. Darya Alontseva, Alexander Krasavin, Alexander Pogrebnyak, Alyona Russakova. // Acta Physica Polonica A, 2013, Vol. 123, No 5, P.867-870.
- [5] Моделирование термодинамических процессов / Б.М. Каганович, С.ТТ. Филиппов, Е.Г. Анциферов. — Новосибирск: ВО "Наука". Сибирская издательская фирма, 1993. — 101 с. ISBN 5—05—030314
- [6] Расчет температурного поля при лазерном облучении слоистого композита. Евтушенко А.А., Иваник Е.Г., Матысяк Я. // Инженерно-физический журнал. - 1999. - Т. 72, №1. - 132-137.

УДК 621.744

## ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ВСТРЯХИВАЮЩИХ ФОРМОВОЧНЫХ МАШИН В ЛИТЕЙНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

С.Ж. Касымханов, Ж.Б. Бакиров, Д.Ж. Касымханова

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева  
Карагандинский государственный технический университет им. Е.А. Букетова

**Аннотация.** В статье предложена обобщенная динамическая модель встряхивающих формовочных машин, в которой детали формовочной машины и уплотняемая смесь представлены

как элементы единой реомеханической модели. Приведен алгоритм моделирования работы встряхивающей формовочной машины с использованием компьютера.

**Ключевые слова:** встряхивающая формовочная машина

Обособленное изучение работы основных механизмов формовочной машины и процессов уплотнения форм позволяет создать работоспособные механизмы и машины, но не может решать задачи оптимизации этих объектов как технологических систем.

Для решения этой задачи надо разработать динамическую модель объекта, включающую в себя динамическую модель всех взаимодействующих частей, а также модель осуществляемых на машине технологических процессов. Наличие такой модели позволяет построить математическую модель исследуемых процессов и проводить компьютерные эксперименты с целью выбора оптимальных параметров механической системы и технологического процесса, то есть проводить имитационное моделирование.

Исходя из вышеизложенного предложена обобщенная динамическая модель встряхивающих формовочных машин (ВФМ), в которой детали и узлы формовочной машины, оснастка и уплотняемая смесь представлены как элементы единой реомеханической модели (рисунок 1).

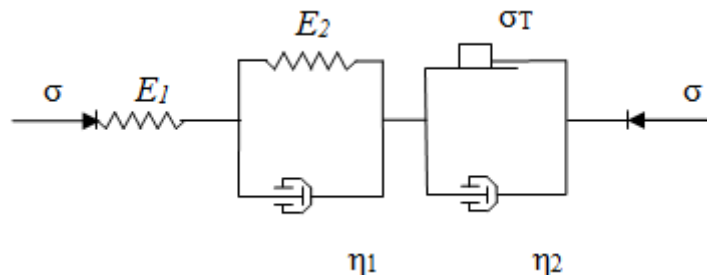


Рисунок 1 Динамическая модель встряхивающей формовочной машины

Эта модель включает четыре жестких инерционных элемента, последовательно соединенных упругодиссипативными элементами. Масса  $m_1$  означает массу фундамента машины, а  $c_1$ ,  $\delta_1$  моделируют упругодиссипативные свойства подушки фундамента и подстилающего грунта;  $m_2$  – масса станины, а  $c_2$ ,  $\delta_2$  объединяет упругодиссипативные свойства станины и амортизирующих элементов, посредством которых она установлена на фундамент (если таковые имеются). Масса  $m_3$  соответствует массе стола с оснасткой, а  $c_3$ ,  $\delta_3$  объединяет упругодиссипативные свойства амортизаторов, установленных на ударной поверхности станины и бойков. Четвертым элементом является формовочная смесь с массой  $m_4$  и упруговязкими свойствами  $c_4$ ,  $\delta_4$ .

Составим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение модели:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 &= -c_1 x_1 - B_1 \dot{x}_1 + c_2(x_2 - x_1) + B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - R_{10}; \\
 m_2 \ddot{x}_2 &= -c_2(x_2 - x_1) - B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3(x_3 - x_2) + B_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - R_{23}; \\
 m_3 \ddot{x}_3 &= -c_3(x_3 - x_2) - B_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + c_4(x_4 - x_3) + B_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - R_{23} \text{Sign} x_3 - R_{43} + G_3; \\
 m_4 \ddot{x}_4 &= -c_4(x_4 - x_3) - B_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - R_{43}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $x_j$  – абсолютные перемещения масс;

$R_{10}$  – сила трения между фундаментом и грунтом;

$R_{23}$  – сила трения в поршневой паре;

$R_{43}$  – сила трения между формовочной смесью и опокой, которая определяется следующим об-

разом:

$$R_{43} = f_4 F_\delta = f_4 \xi_4 F_6 = f_4 \xi_4 [c_4(x_4 - x_3) + \epsilon_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3)],$$

где  $F_\delta, F_B$  – сила бокового давления и вертикальная сила в смеси;  
 $f_4 \xi_4$  – коэффициенты трения и бокового давления.

Аналогично силу трения  $R_{10}$  можно определить так:

$$R_{10} = \int_0^{h_0} f_0 \xi_0 \sigma \Pi dy = f_0 \xi_0 g \rho_0 \Pi h_0^2 / 2,$$

где  $f_0 \xi_0$  – коэффициенты трения и бокового давления в грунте;

$h_0, \Pi$  – высота и периметр фундамента;

$\sigma = \rho_0 g y$  – напряжение в грунте на глубине  $y$  от поверхности.

Экспериментально установлено, что силу  $R_{23}$  в встряхивающих механизмах можно принять равным  $(10 \div 15)\%$  от веса подвижных частей машины [1].

Анализ многочисленных литературных источников позволяет дать следующие рекомендации по выбору упругодиссипативных характеристик модели. Для утрамбованного грунта в зависимости от его состава  $c_1 = (400 \div 500)$  Мн/м. При гармонических колебаниях линеаризованный коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью определяется по формуле:

$$\epsilon = c\psi / 2\pi\omega, \quad (2)$$

где  $\omega$  – круговая частота колебаний, которая здесь равна частоте собственных колебаний стола

$$\omega = \omega_3 = \sqrt{c_3/m_3}$$

$\psi$  – коэффициент рассеяния энергии, который для грунта можно принять равным  $0,25 \div 0,3$ .

Если станина установлена непосредственно на фундамент то коэффициент жесткости  $c_2$  определяется жесткостью ребер станины, а  $\epsilon_2$  можно определить по формуле (2), приняв  $\psi = 0,17$  [2].

Часто для уменьшения нагрузки на основание машины между станиной и фундаментом устанавливаются амортизирующие элементы (резиновые и деревянные прокладки). В этом случае приведенные упругодиссипативные характеристики определяются по формулам для последовательного соединения:

$$c_2^{-1} = c_{np}^{-1} = \sum c_i^{-1}, \quad \psi_2 = \psi_{np} = c_{np} \sum \psi_i / c_i.$$

Жесткости отдельных элементов рассчитываются, а  $\psi_i$  выбираются по экспериментальным данным.

Упругодиссипативные параметры  $c_3, \epsilon_3$  определяются в основном видом амортизаторов, воспринимающих удар стола (резиновые или текстолитовые элементы). При определении  $\epsilon_3$  надо учесть силы сопротивления в направляющих стола, давление воздуха в подпоршневом пространстве. Это можно сделать через коэффициент восстановления скорости после удара  $k$ , который непосредственно связан с безразмерным коэффициентом демпфирования

$$n = \epsilon_3 / 2m_3\omega_3.$$

Для встряхивающей формовочной машины коэффициент  $k$  меняется от 0,3 до 0,5 [1], а связь между коэффициентами  $n$  и  $k$  можно найти в работе [3].

В настоящей работе впервые ставится вопрос об определении упругодиссипативных характеристик (УДХ) формовочной смеси. Нами ранее предложена пятиэлементная реологическая модель смеси при динамическом уплотнении и методика определения ее параметров (рисунок 2).

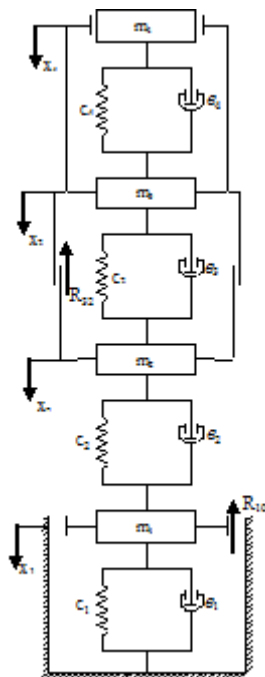


Рисунок 2 Реологическая модель формовочной смеси

Согласно этой модели связь между напряжением и деформацией описывается выражениями

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \sigma = E_2\varepsilon_2 + \eta_1\dot{\varepsilon}_2 \quad \text{при } \sigma \leq \sigma_T; \tag{3}$$

$$\sigma = \sigma_T + \eta_2\dot{\varepsilon} \quad \text{при } \sigma > \sigma_T. \tag{4}$$

где  $\varepsilon_i$  – деформация пружин;

$\sigma, \varepsilon$  – суммарные напряжения.

В соотношениях (3), (4) модули упругости  $E_i$ , коэффициенты вязкости  $\eta_i$  и предел текучести  $\sigma_T$  зависят от плотности смеси.

Определим упругодиссипативные характеристики смеси при  $\sigma \leq \sigma_T$ . Так как  $\varepsilon_1 = \sigma/E_1$ , то из (3) имеем:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\sigma}/E_1 + (\sigma - E_2\varepsilon_2)/\eta_1.$$

Учитывая, что  $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$ , это уравнение преобразуем к виду:

$$\dot{\sigma} = E_1\dot{\varepsilon} + E_1E_2\varepsilon/\eta_1 - \sigma(E_1 - E_2)/\eta_1. \tag{5}$$

Для формовочной смеси можно записать:

$$A\sigma = cx + \varepsilon x \quad (6)$$

где  $x$  – перемещение смеси относительно стола;  
 $\sigma, c, \varepsilon$  – напряжение и упругодиссипативные характеристики смеси;  
 $A$  – площадь опои.

Из последнего уравнения системы (1) следует:

$$m_4\ddot{x} = -(1 + f_4\xi_4)(cx + \varepsilon\dot{x}).$$

Дифференцируя (6) и исключая оттуда  $\ddot{x}$ , получим:

$$A\dot{\sigma} = \varepsilon c(1 + f_4\xi_4)x/m + [c - \varepsilon^2(1 + f_4\xi_4)/m] \dot{x}.$$

В уравнений (5) можно положить:

$$\varepsilon = x/h, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{x}/h,$$

где  $h$  – высота опои.

Подставляя далее (5) в последнее уравнение и приравнивая члены при  $x$  и  $\dot{x}$  в обеих частях полученного выражения приходим к системе:

$$AE_1E_2/\eta_1h - (E_1 + E_2)c/\eta_1 = -\varepsilon c(1 + f_4\xi_4)/m_4;$$

$$AE_1/h - (E_1 + E_2)\varepsilon/\eta_1 = c - \varepsilon^2(1 + f_4\xi_4)/m_4.$$

Эта система сводится к следующему кубическому уравнению:

$$\varepsilon^3 + a\varepsilon^2 + d\varepsilon + e = 0, \quad (7)$$

где

$$a = -2m_4(E_1 + E_2)/\eta_1(1 + f_4\xi_4), \quad d = a^2/4 + AE_1m_4/(1 + f_4\xi_4)h, \quad e = -A[E_1m_4/(1 + f_4\xi_4)]\eta_1h.$$

Это уравнение имеет один действительный и два комплексно – сопряженных корня. После определения действительного корня  $\varepsilon = \varepsilon_4$  коэффициент жесткости смеси определяется выражением:

$$c = c_4 = \frac{m_4E_1E_2A/h}{m_4(E_1E_2) - \varepsilon_4\eta_1(1 + f_4\xi_4)}. \quad (8)$$

При  $\sigma > \sigma_T$  упругодиссипативные характеристики смеси можно найти приравнивая выражения (4) и (6):

$$c_4x = A\sigma_T, \quad \varepsilon_4 = A\eta_2/h \quad (9)$$