АКАДЕМИЯ НАУК КАЗАХСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Ж. С. ЕРЖАНОВ, Ш. М. АЙТАЛИЕВ, Л. А. АЛЕКСЕЕВА

ДИНАМИКА ТОННЕЛЕЙ И ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

АЛМА-АТА
«Наука» Казахской ССР
1989

УДК 539.3+534.231;624.07:534.1

Ержанов Ж. С., Айталиев Ш. М., Алексеева Л. А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. — Алма-Ата: Наука, 1989. — 240 с.

Даны основы новой методики расчета сейсмонапряженного состояния подземных сооружений типа транспортных тоннелей (перегонных тоннелей метрополитена), протяженных горных выработок, трубопроводов глубокого и мелкого заложения и др. при динамических воздействиях. Рассматривается динамическая концентрация напряжений в обделках тоннелей и крепях горных выработок с более полным учетом влияющих факторов: дифракции упругих волн, их отражения и преломления на подземных конструкциях при разных способах заделки крепи. Привлекаются различные модели толщи грунтов и горных пород, такие, как упругая изотропная, анизотропная, двухкомпонентная, содержащая жидкую компоненту, и другие. Рассматриваются монолитные и сборные одно- и двухслойные тоннельные обделки. Изучается влияние глубины заложения сооружения на динамическое напряженное состояние в его окрестности и на дневной поверхности, а также воздействия нагрузок, движущихся вдоль тоннеля и трубопровода. Широко представлен анализ многовариантных расчетов на ЭВМ.

Для работников научно-исследовательских и проектных организаций, занимающихся проблемами механики деформируемого твердого тела, горных пород и грунтов, динамики подземных сооружений, а также студентов и аспирантов механико-математических факультетов университетов, горных, строительных и транспортных вузов.

Библиогр. 111 назв. Ил. 74. Табл. 3.

Ответственный редактор

доктор технических наук
Н. Н. ФОТИЕВА

Рецензенты:

доктора технических наук М. Т. АЛИМЖАНОВ, Т. ЖУНУСОВ,
доктор физико-математических наук И. А. ГАРАГАШ

Е $\frac{1603040000-046}{407(05)-89}$ 34.89

ISBN 5—628—00169—4

© Издательство «Наука» Казахской ССР, 1989

ботки. Территория СССР покрыта сетью тысячекилометровых нефте- и газопроводов: Средняя Азия — Центр, Бухара — Урал, Газли — Ташкент — Фрунзе — Алма-Ата, Саратов — Москва и др. Нефть и газ экспортируются по трубопроводам из восточных и северных районов в страны СЭВ, Западной Европы. Возросла пропускная способность магистральных трубопроводов: они изготавливаются из высокопрочных сталей в расчете на высокое внутреннее давление — до 7,5 МПа, диаметр труб достигает 1220—1420 мм и более. Трубопроводы для транспортировки воды — магистральные водоводы диаметром 1500—2500 мм — рассчитаны на гораздо меньшее давление (1,5—2,0 МПа), что позволяет вместо дорогостоящей стали использовать железобетон или другие материалы.

Прогнозные оценки характера поведения конструкций тоннелей и подземных трубопроводов при динамических воздействиях в реальных условиях строительства и эксплуатации, которые должны осуществляться на стадии их проектирования, определяются напряженно-деформированным состоянием сооружения во взаимодействии с окружающей породной или грунтовой толщей. Среди динамических воздействий особое место занимают последствия землетрясений, захватывающих район строительства, а также многократные промышленные взрывы при проходке тоннельных выработок, подвижные (транспортируемые) нагрузки на тоннели и трубопроводы.

Значительная часть территории Советского Союза, более $^1/_5$, сейсмически активна, подвержена землетрясениям в 7 баллов и более по 12-балльной шкале интенсивности землетрясений MSK-64. В сейсмоактивных районах и городах (Тбилиси, Ереван, Баку, Ташкент) функционируют подземные станции и тоннели метрополитенов, в зоне с 9—10-балльной сейсмикой проектируется Алма-Атинский метрополитен. В подобных районах Закавказья, Прикарпатья, Средней Азии, Юго-Востока Казахстана, Прибайкалья, Дальнего Востока эксплуатируются, строятся и проектируются гидротехнические и транспортные тоннели, магистральные подземные трубопроводы различного назначения. Так, в зоне хозяйственного освоения Байкало-Амурской магистрали с сейсмичностью на отдельных участках до 9—10 баллов построены и продолжают строиться железнодорожные тоннели, планируется строительство мощных магистральных трубопроводов. В сейсмически активных районах функционируют метрополитены Токио и Мехико, транспортные, в том числе подводные, тоннели в Японии, железнодорожные и гидротехнические тоннели в западных штатах США, транспортные тоннели, соединяющие Италию, Францию и Швейцарию, трансаляскинский нефтепровод, трансболивийский трубопровод, проектируемый трансконтинентальный газопровод от Аляски (Прадхо) до центральных штатов США и многие другие аналогичные сооружения. Особенности воздействия динамических возмущений на подземные сооружения освещены в обширной научно-технической литературе, преимущественно периодической [42, 49, 50, 75—78]. Наиболее полно представлены сведения о последствиях сейсмического воздействия землетрясений на магистральные нефте- и газопроводы, значительно меньше данных о тоннелях.

Тоннели и подземные трубопроводы представляют собой протяженные подземные сооружения, таковыми являются горные выработки шахт и рудников типа штреков, квершлагов и диагональных выработок. Для них известны в основном лишь качественные последствия воздействия землетрясений. Соответствующий анализ поведения подземных сооружений стал выполняться начиная с 1906 г. — землетрясение в Сан-Франциско (США) и 1923 г. — в Конто (Япония). Такие сведения систематизируются после землетрясений 1930 г. в северной части полуострова Идзу (Япония), 1943 г. в Андах (Чили), 1948 г. Фукуйского (Япония), 1952 г. в Южной Калифорнии (США), 1964 г. Анкориджского на Аляске. В нашей стране изучение повреждений подземных сооружений началось после Ташкентского землетрясения 1966 г. Достаточно полно изучены последствия воздействия на тоннели и другие подземные сооружения землетрясений 1970 г. в Дагестане, Газлийских 1976 и 1984 гг. в Кызыл-Кумах, Баткано-Исфаринского 1977 г. в районе г. Шураб.

При землетрясениях в зависимости от интенсивности сейсмического воздействия подземные сооружения получают повреждения разной степени — от незначительного сотрясения до заметных деформаций и полного разрушения. Так, разрушительное Таншанское землетрясение 1976 г. в КНР сопровождалось многочисленными обрушениями горных пород в подземных выработках угольных шахт, оказавшихся в зоне его влияния. Землетрясение 1985 г. силой 5 баллов (по принятой в Японии 7-балльной шкале) прервало движение поездов Токийского метрополитена. При Мексиканском землетрясении 1985 г. заметно пострадала одна из станций метрополитена; здесь обнаружился волноводный эффект распространения сейсмических волн в грунтовом основании города, когда наибольшие разрушения в северной его части оказались приуроченными к древней системе водопроводов и дренажных каналов, позднее засыпанных рыхлым грунтом. Боливийское землетрясение 1987 г. вывело из строя трансболивийский трубопровод почти по всей его 500-километровой длине.

Применительно к оценке динамического воздействия на напряженно-деформированное состояние подземных сооружений типа тоннелей и трубопроводов выделяются разные подходы. Первый —

сейсмодинамический, основы которого заложены А. А. Ильюшиным и Т. Р. Рашидовым, развитый далее Г. Х. Хожметовым, Я. Н. Мубараковым, А. А. Ишанходжаевым и др. [69, 70, 74, 76]; второй — квазистатический, предложенный Ш. Г. Напетваридзе и существенно развитый Н. Н. Фотиевой, использован в работах Н. С. Булычева, И. Я. Дормана, А. П. Козлова, А. С. Саммаля и др. [19, 30, 49, 86]. Этот подход обобщен на анизотропный породный массив в работах Ж. С. Ержанова, Ш. М. Айталиева, Ж. К. Масанова, а также И. Б. Баймаханова, М. А. Каюпова и др. [3, 32, 35]. Третий подход, учитывающий дифракцию, преломление и отражение сейсмических волн на подземных сооружениях и конструкциях, развивается Л. А. Алексеевой, а также В. В. Шершневым, Н. Б. Жанбырбаевым, В. Н. Украинцем и др. [1, 2, 4, 6—16, 31, 35, 82, 88]. Дифракция упругих волн на полостях и неоднородностях рассмотрена в работах А. Н. Гузя, В. Г. Головчана, В. Д. Кубенко, А. Н. Шульги, А. С. Космодамианского, В. И. Сторожева, В. Б. Поручикова, Б. М. Мардонова, М. Ш. Исраилова и др. [23, 24, 41, 66].

Предлагаемая книга посвящена систематическому обоснованию методик определения напряженно-деформированного состояния тоннелей и подземных трубопроводов во взаимодействии с окружающей породной или грунтовой толщей при динамических воздействиях. Рассматриваются стационарная и нестационарная дифракции и эффект многократных преломлений — отражений упругих (сейсмических) волн на указанных сооружениях и их конструктивных элементах; различные модели заключающих сооружения породного массива и грунтовой толщи: изотропная, анизотропная, многокомпонентная (водонасыщенная), а также конструкции тоннельных обделок — монолитные однослойная, многослойная и сборные.

Тоннели исследуются как сооружения глубокого и мелкого заложения; заглубленные в грунт трубопроводы рассматриваются как круговые тоннели мелкого заложения с пульсирующим внутренним давлением, когда необходимо учесть влияние дневной поверхности. Поэтому тоннели мелкого заложения и трубопроводы объединяет общность излагаемого подхода к определению их динамического напряженного состояния. Расчетные схемы предусматривают сейсмическое воздействие на тоннели и подземные магистральные трубопроводы как близких, так и дальних землетрясений. Соответствующие расчеты ведутся на воздействие как продольных и поперечных, так и поверхностных волн. Следует отметить, что в литературе отсутствуют какие-либо систематические исследования сейсмостойкости подземных сооружений при воздействии поверхностных сейсмических волн. В данной работе устанавливаются

условия появления поверхностных сейсмических волн на самих тоннелях и подземных трубопроводах, исследуются особенности их распространения вдоль продольной оси сооружений.

Содержание книги изложено в восьми главах. Первые две посвящены напряженно-деформированному состоянию неподкрепленного и подкрепленного монолитной обделкой круговых тоннелей глубокого заложения при стационарных динамических воздействиях. Строятся потенциалы Ламе смещений для однородного изотропного породного массива и водонасыщенной грунтовой толщи. Рассматриваются стационарные процессы дифракции на круговом тоннеле при плоской и антиплоской деформациях. Дается сравнительный анализ концентрации напряжений на поперечном контуре тоннелей, пройденных в породном массиве и водонасыщенной грунтовой толще. Для подкрепленного тоннеля обоснован метод многократных отражений — преломлений упругих волн, показана нормальность разрешающей системы уравнений. Приведен численный анализ влияния типа, частоты (длины), угла падения волны и контактных условий, толщины и эксцентренности обделки на ее напряженно-деформированное состояние.

В третьей главе изучено напряженно-деформированное состояние тоннеля (или трубопровода) при действии подвижных нагрузок, приложенных внутри тоннеля. Рассматриваются задачи о действии подвижной нагрузки в тоннеле, подкрепленном двухслойной обделкой с амортизирующим слоем, характеризующимся низким пределом упругости. Критическая скорость движения нагрузки, при которой появляются и начинают распространяться по тоннелю поверхностные волны, определяет точку бифуркации решения задачи. Проводится оценка влияния параметров амортизирующего слоя на величину критической скорости нагрузки. Рассчитано напряженно-деформированное состояние обделки и породного массива при докритических скоростях движения нагрузки. Приводится численный анализ напряженно-деформированного состояния обделок тоннелей разных конструкций.

Четвертая глава носит вспомогательный характер, в ней рассматривается нетронутый породный массив (без тоннеля), моделируемый упругими однородными изотропными полуплоскостью и полупространством. Рассмотрены задачи о возникновении поверхностных волн от действия сосредоточенного стационарного источника в таких полуплоскости и полупространстве, причем источник может быть либо одиночным, либо периодически расположенным вдоль некоторой оси, а также задача о сосредоточенной нагрузке, движущейся вдоль оси в упругом полупространстве. Даются асимптотика коротковолновая и дальнего поля источника в полуплоскости.

В пятой главе существенно используются результаты предыдущей главы для решения задач о напряженно-деформированном состоянии неподкрепленного тоннеля мелкого заложения при стационарной дифракции сейсмических (упругих) волн. Рассматриваются задачи об установившихся колебаниях упругого однородного изотропного породного массива с круговым тоннелем как в пространственной, так и в плоской постановке. Показана нормальность соответствующей разрешающей системы уравнений. Устанавливается возникновение поверхностных волн. Для неподкрепленного тоннеля мелкого заложения решается задача о действии подвижной нагрузки в тоннеле при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях.

В шестой главе рассмотрена система параллельных тоннелей мелкого заложения. Показывается нормальность разрешающей системы уравнений для установившихся колебаний породного массива с параллельными тоннелями при действии периодических нагрузок (пространственный случай). Приводятся задачи об установившихся колебаниях породного пласта с системой тоннелей, находящегося на неподвижном основании. Изучены условия появления и распространения поверхностных сейсмических волн.

В седьмой главе рассмотрено воздействие на подземное сооружение нестационарных динамических процессов. Выводятся сингулярные уравнения задачи, описывается метод граничных интегральных уравнений и дается алгоритм его численной реализации. Показывается нестационарная дифракция плоских волн на тоннелях сложного профиля, глубокого и мелкого заложения.

Восьмая глава содержит комплекс разнообразных результатов. Описывается квазистатический метод решения задач о напряженно-деформированном состоянии упругого однородного анизотропного породного массива при сейсмическом воздействии.

Дается сравнительный анализ сейсмонапряженного состояния тоннелей, пройденных вдоль и вкрест простирания анизотропных горных пород. Излагается один из возможных приемов оптимизации формы поперечного сечения тоннеля, подверженного длинноволновому сейсмическому воздействию. Изучены упругопластические колебания сборных тоннельных обделок.

Книга написана на основе исследований, выполненных в Институте сейсмологии и Институте математики и механики АН КазССР, она сохраняет преемственность с предыдущими публикациями авторов. Главы первая и вторая написаны совместно Ж. С. Ержановым и Л. А. Алексеевой, главы третья — шестая — Л. А. Алексеевой, глава седьмая — Ш. М. Айталиевым и Л. А. Алексеевой, глава восьмая — Ж. С. Ержановым и Ш. М. Айталиевым. Авторы признательны М. А. Адайбековой, Г. К. Закирьяновой и Н. М. Махметовой за помощь в подготовке рукописи к печати.

Глава 1

ДИНАМИКА КРУГОВОГО ТОННЕЛЯ В УПРУГОМ И ВОДОНАСЫЩЕННОМ ПОРОДНЫХ МАССИВАХ ПРИ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Глава посвящена стационарной дифракции упругих волн на неподкрепленном тоннеле глубокого заложения. Напряжения в породном массиве вокруг такого тоннеля, обусловленные статическим полем силы тяжести, превалируют над напряжениями, возникающими при дифракции сейсмических волн. Однако в условиях высокой сейсмичности наложение динамического поля напряжений на статическое может привести к потере прочности горных пород вокруг сооружения. Такое динамическое гармоническое по времени поле исследуется в этой главе.

Неподкрепленный круговой тоннель в породном массиве моделирован цилиндрической полостью в линейно-деформируемых упругой и двухкомпонентной (водонасыщенной) изотропных средах. Изучены напряженно-деформированное состояние (НДС) поверхности тоннеля в условиях плоской и антиплоской деформации, влияние частоты и типа упругой волны, водонасыщенности окружающего массива. Рассмотрены пространственно-периодические задачи дифракции волн на поверхности тоннеля, влияние угла падения волны на концентрацию напряжений.

1.1. Стационарные процессы в упругой среде. Потенциалы Ламе

Рассмотрим линейно-упругую однородную изотропную среду с заданной плотностью ρ и параметрами Ламе λ, μ. Введем обозначения: u_i — компоненты вектора смещений в декартовой ($i=x, y, z$) или цилиндрической ($i=r, \theta, z$) системах координат; σ_{ij} — соответствующие компоненты тензора напряжений, связанного с u_i законом Гука:

$$\sigma_{ij}=\lambda\nabla_k u_k\delta_{ij}+\mu(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i). \tag{1.1}$$

Здесь и всюду далее по повторяющимся индексам проводится суммирование; δ_{ij} — символ Кронекера; ∇_i — ковариантная производная в соответствующей системе координат. В декартовой системе $\nabla_i = \partial/\partial x_i$. Иногда вместо обозначений x, y, z будем пользоваться x_1, x_2, x_3.

Уравнения движения упругой среды в отсутствие массовых сил имеют вид

$$(c_1^2 - c_2^2)\nabla_i \nabla_k u_k + c_2^2 \nabla_k \nabla_k u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

где $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$; $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорости распространения продольных и поперечных волн; $c_2 < c_1$.

При решении краевых динамических задач необходимо учесть граничные и начальные условия.

Пусть S — граница исследуемой области, D — область, занятая упругим телом.

Начальные условия определяют состояние среды в начальный момент времени t_0:

$$u_i(\vec{r}, t_0) = u_{0i}(\vec{r}), \tag{1.3}$$

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|_{t=t_0} = v_{0i}(\vec{r}), \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{r} \in D.$$

В зависимости от типа условий в динамике упругого тела обычно рассматриваются три краевые задачи:

первая —

$$u_i(\vec{r}, t) = w_i(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in S; \tag{1.4}$$

вторая —

$$\sigma_{ij}(\vec{r}, t) n_j(\vec{r}) = f_i(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in S. \tag{1.5}$$

В смешанной краевой задаче на части границы $S_1 (S = S_1 + S_2)$ задаются условия (1.4), а на ее дополнении S_2 — (1.5). Здесь u_{0i}, v_{0i}, w_i, f_i — известные функции; n_j — компоненты вектора внешней нормали к границе области.

Указанные постановки трех краевых задач динамики упругого тела являются классическими. Вопросы существования и единственности их решения на определенном классе функций и областей хорошо изучены [52]. Часто встречаются задачи с граничными условиями смешанного типа, когда на одной и той же границе области частично заданы компоненты напряжений и смещений или их линейные комбинации. В отличие от первых трех этот класс задач с точки зрения математической корректности их постановок мало изучен и зачастую требует обоснования полученных решений. Аналогичные трудности появляются при решении динамических задач в кусочно-однородных упругих средах с различными условиями контакта на границе раздела сред.

Среди класса динамических задач особо следует выделить задачи на установившиеся движения типа гармонических колебаний. Характеристики таких процессов $\chi(\vec{r}, t)$ имеют вид

$$\chi(\vec{r}, t) = \chi^*(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}, \tag{1.6}$$

ω — частота колебаний; $2\pi/\omega$ — их период. Величину $\chi^*(\vec{r}, \omega)$ называют комплексной амплитудой, модуль которой равен амплитуде колебаний, а аргумент характеризует сдвиг фаз.

Для установившихся движений в соотношениях (1.4), (1.5)

$$w_i(\vec{r}, t) = w_i^*(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad f_i(\vec{r}, t) = f_i^*(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \tag{1.7}$$

При постановке таких задач начальные условия не задаются. Значок * для комплексных амплитуд в задачах опустим, полагая зависимость от времени в виде (1.6). Условия (1.4), (1.5) приводятся к виду

$$u_i(\vec{r}) = w_i(\vec{r}) \text{ (I краевая задача)}; \tag{1.8}$$

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) n_j = f_i(\vec{r}) \text{ (II краевая задача) для } \vec{r} \in S. \tag{1.9}$$

В отличие от классических нестационарных задач задача стационарных колебаний при некоторых ω может не иметь решений, либо нарушается его единственность. При таких ω среда свободно колеблется в отсутствие внешних возбуждающих сил. Такая последовательность значений ω образует дискретный спектр так называемых «резонансных частот», при которых или вблизи которых при действии возбуждающей силы той же частоты в среде возникают большие деформации. В реальных конструкциях это явление может привести к разрушению, поэтому исследование таких задач имеет несомненный практический интерес.

Стационарные задачи возникают при решении нестационарных задач методом интегральных преобразований Фурье или Лапласа. Например, в случае преобразования Фурье характеристики процесса отыскиваются в виде интеграла Фурье:

$$\chi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi^*(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \qquad (1.10)$$

Для этого необходимо, чтобы преобразования Фурье допускали функции w_i и f_i в соотношениях (1.4), (1.5). Для определения $\chi^*(\vec{r}, \omega)$ получим рассмотренные выше стационарные задачи.

Для решения динамических задач часто используются потенциалы Ламе φ, $\vec{\psi}$:

$$\vec{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \vec{\psi}. \qquad (1.11)$$

Введение этих потенциалов позволяет перейти от связанной системы уравнений (1.2) к отдельным волновым уравнениям для каждого из потенциалов:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta\vec{\psi} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2}, \qquad (1.12)$$

что зачастую облегчает решение задачи, поскольку позволяет использовать известные решения уравнений Даламбера. В стационарном случае вместо уравнений (1.12) получим уравнения Гельмгольца для комплексных амплитуд потенциалов φ, $\vec{\psi}$:

$$\Delta\varphi^* + \alpha^2\varphi^* = 0, \quad \Delta\vec{\psi}^* + \beta^2\vec{\psi}^* = 0. \qquad (1.13)$$

Здесь Δ — «трехмерный» оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\alpha = \omega/c_1$, $\beta = \omega/c_2$ — волновые числа, $\alpha < \beta$. Связь между φ и $\vec{\psi}$ задается граничными и начальными (для нестационарных задач) условиями, которые нетрудно записать, используя (1.11) и закон Гука (1.1).

Потенциалы Ламе содержат 4 неизвестные функции, которые определяют 3 компоненты смещений u_i. Поэтому используются дополнительные условия, связывающие компоненты ψ_i, не нарушающие эквивалентность перехода. Например [52],

$$\operatorname{div} \vec{\psi} = 0. \qquad (1.14)$$

Известны различные удобные формы представления потенциала $\vec{\psi}$

через 2 скалярные функции ψ_1, ψ_2 [48, 52]. В случае плоской деформации ($u_i = u_i(x, y)$, $i = 1, 2$, $u_3 \equiv 0$) представим $\vec{\psi}$ в виде

$$\vec{\psi} = \vec{e}_3 \psi_1, \quad \psi_2 \equiv 0. \qquad (1.15)$$

В пространственном случае при использовании цилиндрической системы координат удобно представление

$$\vec{\psi} = \psi_1 \vec{e}_3 + \operatorname{rot}(\psi_2 \vec{e}_3) \qquad (1.16)$$

(здесь и всюду $\vec{e}_3$ — орт оси OZ (Ox_3)). Потенциалы ψ_1, ψ_2 должны удовлетворять уравнению Гельмгольца с волновым числом β.

1.2. Задача стационарной дифракции волн на тоннеле в упругом массиве. Плоская и антиплоская деформации

Рассмотрим бесконечно протяженный тоннель радиусом R, на который падает стационарная волна частоты ω. Предположим, что волна однородна вдоль оси тоннеля, т. е. ее характеристики не зависят от z, направление распространения перпендикулярно оси тоннеля OZ. Падающая волна отражается от его поверхности, отраженные волны накладываются на поле падающей волны. Результирующее волновое поле обусловливает напряженно-деформированное состояние (НДС) среды (рис. 1.1).

Будем считать известными потенциалы Ламе падающей волны φ^0, ψ_1^0, ψ_2^0, которые удовлетворяют уравнениям (1.13).

В наших предположениях

$$\varphi^0 = \varphi^0(x, y), \quad \psi_i^0 = \psi_i^0(x, y), \quad i = 1, 2. \qquad (1.17)$$

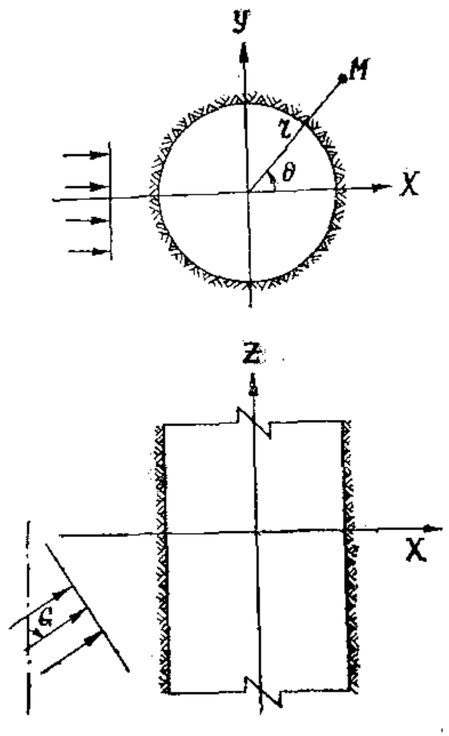


Рис. 1.1. Тоннель кругового сечения

Для смещений u_j^0 падающей волны из (1.16), (1.3) получим

$$u_x^0=\frac{\partial\varphi^0}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1^0}{\partial y},\quad u_y^0=\frac{\partial\varphi^0}{\partial y}-\frac{\partial\psi_1^0}{\partial x},\quad u_z^0=\beta^2\psi_2^0. \tag{1.18}$$

Из (1.18) следует, что потенциалы φ^0, ψ_1^0 порождают плоское напряженно-деформированное состояние среды ($u_j=u_j(x,\ y)$, $j=1,\ 2,\ u_3\equiv0$), потенциал ψ_2^0 — антиплоское ($u_1=u_2\equiv0$, $u_3=u_3(x,\ y)$).

Результирующее поле Φ_j в силу линейности задачи будем искать в виде

$$\Phi_j=\varphi_j^0+\varphi_j,\quad j=1,\ 2,\ 3, \tag{1.19}$$

где φ_j — потенциалы отраженных волн. Здесь для удобства записи через φ_1, $i\varphi_2$, $i\varphi_3$ обозначены φ, ψ_1, ψ_2, соответственно введены обозначения φ_j^0. Обозначим Σ, σ, σ^0 — тензоры напряжений результирующего, отраженного и падающего полей. Поверхность тоннеля свободна от напряжений:

$$\Sigma_{rj}=\sigma_{rj}+\sigma_{rj}^0=0 \text{ при } r=R,\ j=r,\ \theta,\ z. \tag{1.20}$$

Поскольку поле падающей волны и граничные условия (1.20) не зависят от z, таким же свойством обладает поле отраженных волн. Потенциалы φ_j должны также удовлетворять двухмерным уравнениям Гельмгольца, которые в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\alpha_j^2\right)\varphi_j=0,\quad j=1,\ 2,\ 3. \tag{1.21}$$

Здесь и далее $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\alpha_3=\beta$.

Уравнения (1.21) допускают класс частных решений вида $H_n^{(1)}(\alpha_j r)e^{in\theta}$, $H_n^{(2)}(\alpha_j r)e^{in\theta}$, где $H_n^{(j)}$ — функции Ханкеля 1-го и 2-го рода, для них при $\alpha_j r\to\infty$ справедливы следующие асимптотики [80]:

$$H_n^{(1)}(\alpha_j r)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_j r}}e^{i(\alpha_j r-n\pi/2-\pi/4)};$$
$$H_n^{(2)}(\alpha_j r)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_j r}}e^{-i(\alpha_j r-n\pi/2-\pi/4)} \tag{1.22}$$

С учетом временного множителя $e^{-i\omega t}$ функция $H_n^{(1)}$ описывает волну, уходящую на ∞ и убывающую как $r^{-1/2}$. Подобным образом ведет себя волна, описываемая функцией $H_n^{(2)}(\alpha_j r)e^{i\omega t}$. Поскольку нами выбран множитель $e^{-i\omega t}$, представим φ_j в виде

$$\varphi_j=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_j^n H_n^{(1)}(\alpha_j r)e^{in\theta},\quad j=1,\ 2,\ 3, \tag{1.23}$$

что соответствует физическому представлению о волнах, отраженных тоннелем, которые должны затухать на ∞ и распространяться от поверхности тоннеля. В дальнейшем вместо $H_n^{(1)}$ пишем H_n.

Неопределенные коэффициенты a_j^n определяются из граничных условий (1.20), для чего необходимо напряжения σ_{rj}^0, порождаемые падающей волной, на контуре поперечного сечения тоннеля разложить в ряд Фурье по θ:

$$\sigma_{rj}^0(R,\ \theta)=2\mu\text{э}_j\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_{jn}e^{in\theta},\quad j=r,\ \theta,\ z,\ \text{э}_r=1, \tag{1.24}$$
$$\text{э}_\theta=\text{э}_z=i.$$

Перемещения и напряжения через φ_j в цилиндрической системе координат определяют выражениями [23, 24, 52]:

$$\begin{cases} u_r=\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial\theta},\quad u_\theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial r};\\ \dfrac{-\sigma_{rr}}{2\mu}=0{,}5\beta^2\varphi+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial\theta}-\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial r\partial\theta}\right);\\ \dfrac{\sigma_{r\theta}}{2\mu}=0{,}5\beta^2\psi_1+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\psi_1}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}\right);\\ \dfrac{\sigma_{\theta\theta}}{2\mu}=(\alpha^2-0{,}5\beta^2)\varphi+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial\theta}-\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial r\partial\theta}\right);\\ \dfrac{\sigma_{zz}}{2\mu}=(\alpha^2-0{,}5\beta^2)\varphi; \end{cases} \tag{1.25}$$

$$\begin{cases} u_z=\beta^2\psi_2;\\ \dfrac{\sigma_{\theta z}}{2\mu}=\dfrac{\beta^2}{2r}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial\theta};\\ \dfrac{\sigma_{rz}}{2\mu}=0{,}5\beta^2\dfrac{\partial\psi_2}{\partial z}. \end{cases} \tag{1.26}$$

В случае плоской деформации $\psi_2=0$ напряженно-деформированное состояние среды определяется по формулам (1.25), остальные компоненты нулевые; при антиплоской деформации $\varphi_1=\varphi_2=0$, НДС среды определяется соотношениями (1.26).

Напряжения σ_{rj} $(j=\theta, r, z)$, порождаемые потенциалами (1.23), имеют вид

$$\sigma_{rr}=-\frac{2\mu}{r^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}(a_1^n\Phi_{1n}^H(\beta r,\ \alpha r)+a_2^n\Phi_{2n}^H(\beta r));$$

$$\sigma_{r\theta}=\frac{2\mu i}{r^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}(a_2^n\Phi_{1n}^H(\beta r,\ \beta r)+a_1^n\Phi_{2n}^H(\alpha r)); \qquad (1.27)$$

$$\sigma_{rz}=\frac{\mu i}{r^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}a_3^n(\beta r)^3H_n'(\beta r),$$

где

$$\Phi_{1n}^H(z_1,\ z_2)=(0{,}5z_1^2-n^2)H_n(z_2)+z_2H_n'(z_2);$$
$$\Phi_{2n}^H(z)=n(zH_n'(z)-H_n(z)). \qquad (1.28)$$

Подставляя (1.27), (1.24) в граничные условия (1.20) и приравнивая коэффициенты Фурье при $e^{in\theta}$ левой и правой частей, получим бесконечную систему линейных уравнений блочно-диагонального типа для определения неизвестных коэффициентов a_j^n, разрешая которую найдем

$$a_1^n=\frac{R^2}{\Delta_n}(\sigma_{1n}\Phi_{1n}^H(\beta R,\ \beta R)+\sigma_{2n}\Phi_{2n}^H(\beta R));$$

$$a_2^n=-\frac{R^2}{\Delta_n}(\sigma_{1n}\Phi_{2n}^H(\alpha R)+\sigma_{2n}\Phi_{1n}^H(\beta R,\ \alpha R)); \qquad (1.29)$$

$$a_3^n=-\frac{2\sigma_{3n}}{\beta^3H_n'(\beta r)},$$

где

$$\Delta_n=\Phi_{1n}^H(\beta R,\ \alpha R)\Phi_{1n}^H(\beta R,\ \beta R)-\Phi_{2n}^H(\alpha R)\Phi_{2n}^H(\beta R).$$

После определения a_j^n можно найти все характеристики НДС, используя формулы (1.19), (1.25), (1.26) для любого типа стационарной волны, удовлетворяющей условиям (1.17). Частные типы волн рассматривались ранее.

Задача дифракции плоских продольных и поперечных гармонических волн на круговой цилиндрической полости в условиях плоской деформации исследована авторами [24, 56, 103, 104]. Приведем ее решение, пользуясь принятой здесь системой обозначений.

Амплитуды потенциалов падающей волны имеют вид

$$\varphi_j^0=\exp(i\alpha_jx),\ \varphi_k^0=0,\quad k\neq j. \qquad (1.30)$$

При $j=1$ падает продольная волна расширения — сжатия (PP). При $j=2$ поперечная SV-волна. Рассмотрим также случай $j=3$, что соответствует падению SH-волны (волны антиплоской деформации).

Потенциалы (1.30) можно представить в виде ряда [37]

$$\varphi_j^0=e^{i\alpha_jx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^nJ_n(\alpha_jr)e^{in\theta}. \qquad (1.31)$$

В этом случае σ_{jn} определяются по формулам

$$\sigma_{1n}=-\frac{2\mu}{R^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}(b_1^n\Phi_{1n}^J(\beta R,\ \alpha R)+b_2^n\Phi_{2n}^J(\beta R));$$

$$\sigma_{2n}=\frac{2\mu i}{R^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}(b_2^n\Phi_{1n}^J(\beta R,\ \beta R)+b_1^n\Phi_{2n}^J(\alpha R));$$

$$\sigma_{3n}=\frac{\mu i}{R^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}b_3^n(\beta R)^3H_n'(\beta R).$$

Здесь Φ_{jn}^J определяются из (1.28) заменой H_n на J_n — функцию Бесселя 1-го рода. Коэффициенты b_j^n равны коэффициентам при $J_n(\alpha_jr)e^{in\theta}$ в разложении (1.31) потенциалов падающей волны.

Характер распределения напряжений и перемещений на контуре полости при дифракции плоских продольных и поперечных волн изображен на рис. 1.2—1.4. На рис. 1.2 представлены эпюры амплитуд нормальных тангенциальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$, отнесенных к максимальному напряжению в падающей волне $\sigma_0=\mu\beta^2$:

$$(\sigma_0=\max\sigma_{xx}^0=\mu\beta^2)\ (j=1),\quad (\sigma_0=\max\sigma_{xy}^0=\mu\beta^2)\ (j=2).$$

Для SH-волны $\sigma_0=\mu\beta^3$. Рассмотрены три частоты: $\omega=1$, 50, 100 Гц (кривые *1, 2, 3* соответственно). Диапазон частот $1\div50$ Гц

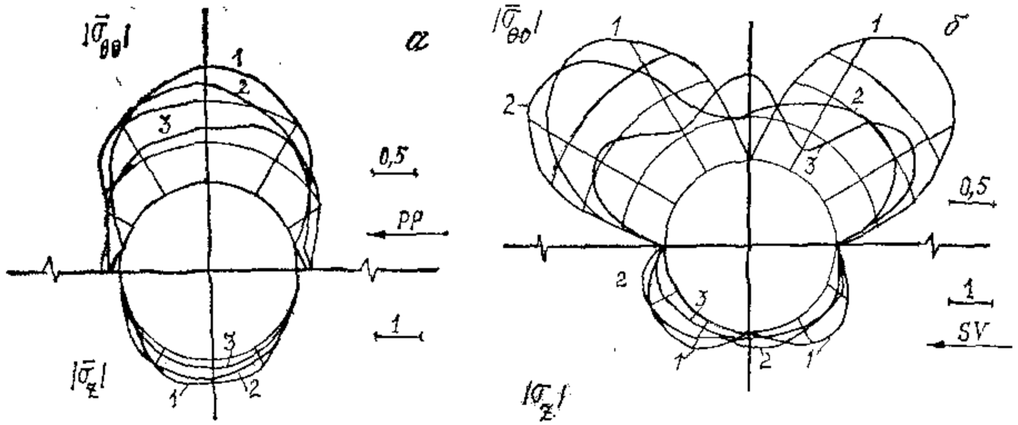


Рис. 1.2. Амплитуды нормальных тангенциальных напряжений при дифракции *PP*- (*а*) и *SV*-волны (*б*) на неподкрепленном тоннеле. *1—3*—ω=1, 50, 100 Гц. Плоская деформация

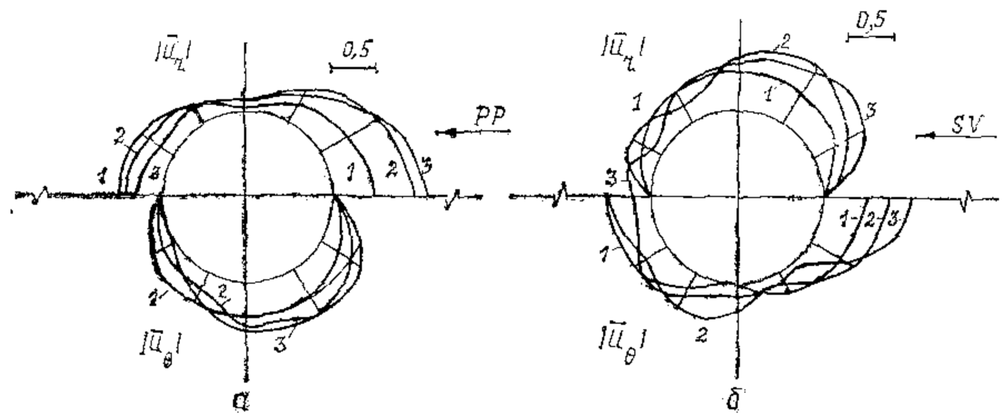


Рис. 1.3. Амплитуды радиальных и тангенциальных перемещений при дифракции *PP*- (*а*) и *SV*-волны (*б*). *1—3*—ω=1, 50, 100 Гц

характерен для сейсмических воздействий от землетрясений, 50÷100 Гц — от промышленных взрывов. В качестве окружающей тоннель среды рассмотрен алевролит: $\lambda=1687$, $\mu=2532$ МПа, $\rho=2{,}5$ г/см^3. Как следует из расчетов, при дифракции *PP*-волн низкой частоты (длинных волн) максимальные напряжения возникают на концах диаметра, перпендикулярного направлению распространения волны. При росте частоты максимумы отклоняются. С ростом частоты изменение коэффициента концентрации напряжений k

$$k=\max_{\theta}|\sigma_{\theta\theta}|/\sigma_0$$

имеет колебательный характер с понижением каждого последующего локального максимума. На рис. 1.5 показано поведение $|\bar{\sigma}_{\theta\theta}|=|\sigma_{\theta\theta}|/\sigma_0|$ в фиксированных точках полости. Как видим, максимальное k находится в области низких частот, характерных для сейсмических волн: $\omega\simeq25$ Гц.

Дифракция длинных поперечных волн ($\alpha_2R\ll1$) вызывает максимальную концентрацию напряжений при $\theta=\pm\pi/4+\pi k$ $(k=0, 1)$. При низких частотах картина амплитуд НДС почти симметрична относительно вертикального диаметра. Возрастание волновых чисел нарушает ее симметрию. Это, конечно, не относится к картине реального НДС, которая асимметрична и меняется со временем. Напряжения в момент $t=0$ описываются $\mathrm{Re}\,\sigma_{\theta\theta}$, а через четверть периода при $t=\frac{\pi}{2\omega}$ — $\mathrm{Im}\,\sigma_{\theta\theta}$. На рис. 1.4 изображены $\mathrm{Re}\,\sigma_{\theta\theta}$ (верхняя полуплоскость) и $\mathrm{Im}\,\sigma_{\theta\theta}$ (нижняя). При низких частотах $\mathrm{Im}\,\sigma_{\theta\theta}\simeq0$. Поскольку

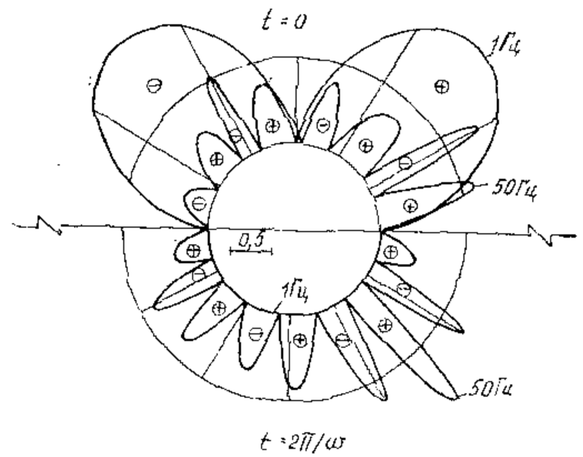


Рис. 1.4. Напряженное состояние поверхности тоннеля для $t=0$, $\pi/2\omega$ при дифракции *SV*-волны

$$\sigma_{\theta\theta}e^{-i\omega t}=|\sigma_{\theta\theta}|e^{-i(\omega t-\gamma)},\ \gamma=\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}\,\sigma_{\theta\theta}}{\mathrm{Re}\,\sigma_{\theta\theta}}\sim0.$$

Это значит, что все точки контура полости движутся почти в фазе. При высоких частотах по поверхности полости распространяются короткие волны.

Напряженное состояние контура полости при дифракции *SH*-волны изображено на рис. 1.6, *а, б*. В этом случае на контуре полости отличны от нуля лишь $\sigma_{\theta z}$ и u_z.

Сравнение напряженных состояний тоннеля при дифракции трех типов волн показывает, что максимальную концентрацию напряжений вызывают поперечные *SV*-волны, $\max\limits_{\omega} k\sim4{,}7$. С ростом ω напряжения на полости стремятся к постоянным значениям, зависящим от угла θ. Причем со стороны падения волны (зоны $|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}-$

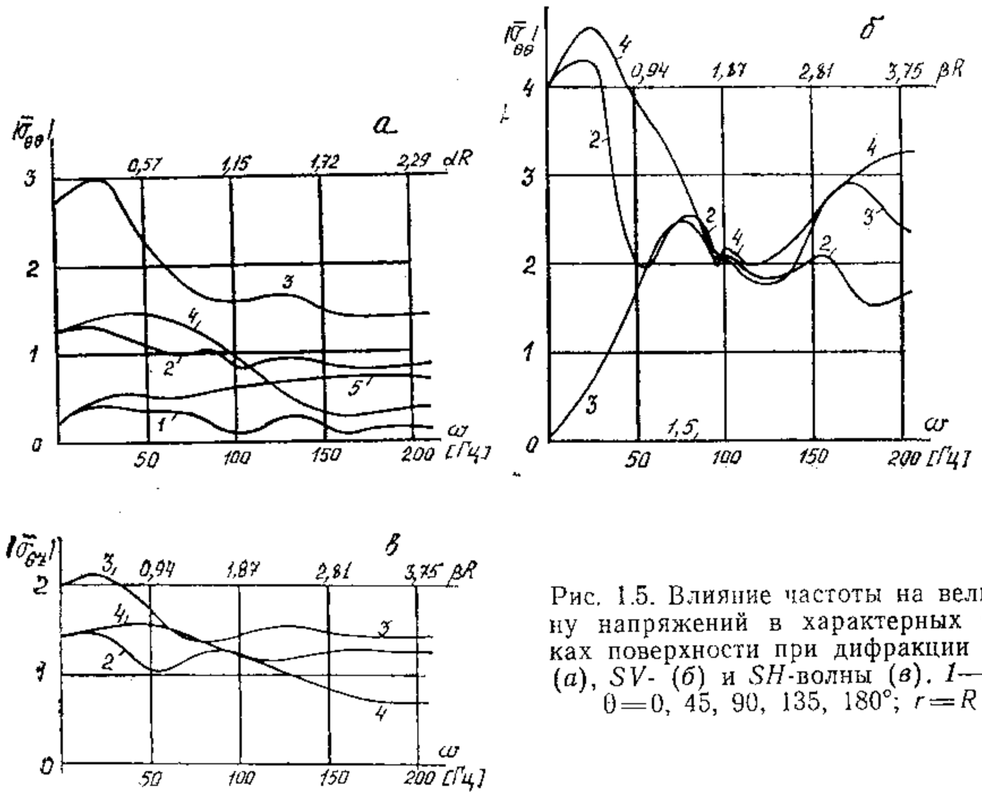


Рис. 1.5. Влияние частоты на величину напряжений в характерных точках поверхности при дифракции PP- (*а*), SV- (*б*) и SH-волны (*в*). *1—5* — $\theta=0$, 45, 90, 135, 180°; $r=R$

«света») граница полости для каждого луча падающей волны становится практически плоской. Концентрация напряжений в точке падения зависит от угла падения и стремится к соответствующему значению решения задачи об отражении плоской волны границей

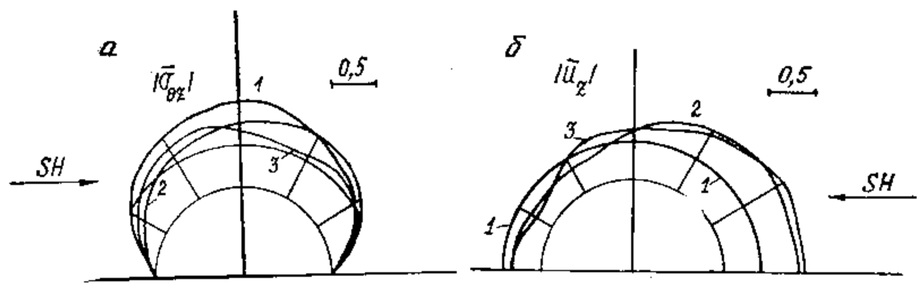


Рис. 1.6. Амплитуды касательных напряжений (*а*) и продольных перемещений (*б*) на поверхности тоннеля при дифракции SH-волны. *1—3* — $\omega=1$, 50, 100 Гц. Антиплоская деформация

полуплоскости. С противоположной стороны (в зоне «тени») смещения с ростом ω стремятся к нулю.

Отметим также, что выход на асимптотику (см. рис. 1.5) при

дифракции PP- и SH-волн происходит раньше, чем для поперечной SV-волны.

1.3. Пространственные задачи дифракции плоских гармонических волн на тоннеле в упругом массиве

Рассмотрим круговую цилиндрическую полость радиусом R в упругом пространстве, ось которой совпадает с осью OZ. На поверхности полости действует гармоническая по t, z нагрузка вида

$$\sigma_{rj}=\sum_l P_{jl}(\theta)e^{i(\gamma lz-\omega t)},\ j=r,\ \theta,\ z \text{ при } r=R. \tag{1.32}$$

Здесь $P_{jl}(\theta)$ — известные функции, допускающие разложение в ряд Фурье по θ:

$$P_{jl}(\theta)=2\mu э_j\sum_n p_{jl}^{(n)}e^{in\theta},\ э_1=1,\ э_2=э_3=i; \tag{1.33}$$

$2\pi/\gamma=T$ — период по z действующей нагрузки. Требуется определить НДС среды. Для этого воспользуемся представлением решения через потенциал Ламе, используя для векторного потенциала $\vec{\psi}$ форму (1.16). Компоненты перемещений u_i и тензора напряжений в цилиндрической системе координат имеют вид [23]

$$\begin{gathered}
u_r=\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial r\partial z};\\
u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial\theta\partial z};\\
u_z=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\left(\beta^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_3;\\
-\frac{\sigma_{rr}}{2\mu}=\left(0{,}5\beta^2+D_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_1+D_2\varphi_2+\left(\beta^2+D_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\varphi_3}{\partial z};\\
\frac{\sigma_{r\theta}}{2\mu}=-D_2\varphi_1+0{,}5\left(\beta^2+2D_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_2-D_2\frac{\partial\varphi_3}{\partial z};\\
\frac{\sigma_{rz}}{2\mu}=\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r\partial z}+\frac{1}{2r}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\theta\partial z}+\left(0{,}5\beta^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\varphi_3}{\partial r};\\
\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2\mu}=(\alpha^2-0{,}5\beta^2+D_1)\varphi_1+D_2\varphi_2+D_1\frac{\partial\varphi_3}{\partial z};\\
\frac{\sigma_{\theta z}}{2\mu}=\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta\partial z}-0{,}5\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(0{,}5\beta^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_3;
\end{gathered} \tag{1.34}$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{2\mu}=\left(\alpha^2-0{,}5\beta^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_1+\left(\beta^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}.$$

Здесь

$$D_1=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right),\quad D_2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial}{\partial r}\right).$$

В силу периодичности по z действующих нагрузок потенциалы φ_j $(j=1, 2, 3)$ представим в аналогичном виде:

$$\varphi_j(x,\ y,\ z)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Phi_{jl}(x,\ y)e^{i\gamma lz}. \tag{1.35}$$

Поскольку φ_j удовлетворяют трехмерным уравнениям Гельмгольца (1.10), Φ_{jl} должны удовлетворять их двухмерным аналогам:

$$\Delta_2\Phi_{jl}+(\alpha_j^2-\gamma^2l^2)\Phi_{jl}=0, \tag{1.36}$$

Δ_2 — двухмерный оператор Лапласа.

В зависимости от величины $(\alpha_j^2-\gamma^2l^2)$ решение (1.35) будем брать в различном виде. Обозначим

$$k_j=\sqrt{|\alpha_j^2-(\gamma l)^2|},\quad k_j>0.$$

Если

$$\alpha_j^2>\gamma^2l^2,$$

$$\Phi_{jl}=э_j\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{jl}^{(n)}H_n(k_jr)e^{in\theta}; \tag{1.37}$$

если

$$\alpha_j^2<\gamma^2l^2,$$

$$\Phi_{jl}=э_j\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{jl}^{(n)}K_n(k_jr)e^{in\theta}; \tag{1.38}$$

если

$$\alpha_j^2=\gamma^2l^2,$$

$$\Phi_{jl}=э_j\left(a_{jl}^0\ln r+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{a}_{jl}^{(n)}r^{-|n|}e^{in\theta}\right). \tag{1.39}$$

Здесь $K_n(\cdot)$ — функция Макдональда.

Коэффициенты $a_{jl}^{(n)}$ определяются из граничных условий (1.32). Приравнивая коэффициенты Фурье при $e^{i(n\theta+\gamma lz)}$ левой и правой частей, получим разрешающую систему уравнений.

Рассмотрим подробнее несколько случаев. Заметим, что функция $e^{i(\gamma lz-\omega t)}$ описывает периодическую вдоль оси z волну, бегущую со скоростью $c=\frac{\omega}{\gamma l}$. В случае (1.37) $|\gamma l|<\alpha_j$, отсюда $c>c_j$, т. е. скорость движения нагрузки вдоль оси выше j-й скорости звука в среде. Если $c>c_1$, такой случай называют *сверхзвуковым*, при $c<c_2$ — дозвуковым. Случай $c_2<c<c_1$ назовем *межзвуковым* и *звуковым* при $c=c_j$.

В разложении Фурье (1.32) действующей нагрузки могут оказаться члены, соответствующие различным скоростям, поскольку c зависит от l, $c(l)\to 0$ при $|l|\to\infty$. Рассмотрим потенциалы поля, порождаемые соответствующей гармоникой, в каждом из характерных случаев.

Пусть $c\neq c_j$ $(j=1, 2)$. При $c>c_1$ потенциалы объемных и сдвиговых волн выражаются через (1.35), (1.37). Исходя из асимптотики для функций Ганкеля при $r\to\infty$ (1.22), из (1.37) следует, что от поверхности тоннеля распространяются бегущие волны, затухающие на ∞ как $r^{-\frac{1}{2}}$. Коэффициенты $a_{jl}^{(n)}$ определяются из граничных условий (1.32). Приравнивая коэффициенты Фурье при $e^{i(n\theta+\gamma lz)}$ левой и правой частей, получим разрешающую систему уравнений для определения $a_{jl}^{(n)}$:

$$\sum_{j=1}^{3}a_{jl}^{(n)}s_{jkl}^{(n)}=R^2p_{kl}^{(n)},\quad k=1,\ 2,\ 3,\quad n=0,\ \pm1,\ \ldots; \tag{1.40}$$

где

$$s_{11l}^{(n)}=-\Phi_{1n}^H(\beta_l^2R^2-(\gamma lR)^2,\ \alpha_lR),\quad s_{21l}^{(n)}=-\Phi_{2n}^H(\beta_lR);$$

$$s_{31l}^{(n)}=\gamma l\Phi_{1n}^H(2\beta_l^2R^2,\ \beta_lR),\quad s_{12l}^{(n)}=\Phi_{2n}^H(\alpha_lR);$$

$$s_{22l}^{(n)}=\Phi_{1n}^H(\beta_l^2R^2,\ \beta_lR),\quad s_{32l}^{(n)}=-\gamma l\Phi_{2n}^H(\beta_lR);$$

$$s_{33l}^{(n)}=0{,}5(\beta_l^2R^2-(\gamma lR)^2)\beta_lH_n'(\beta_lR);$$

$$s_{13l}^{(n)}=(\gamma lR)\alpha_lRH_n'(\alpha_lR);$$

$$s_{23l}^{(n)}=-0{,}5n\gamma lRH_n(\beta_lR);$$

$$\alpha_l=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2 l^2},\ \beta_l=\sqrt{\beta^2-\gamma^2 l^2},\ \operatorname{Re}\chi_l\geqslant 0,\ \operatorname{Im}\chi_l\geqslant 0\ (\chi=\alpha,\ \beta),$$

откуда

$$a_{jl}^{(n)}=\frac{\Delta_{jl}^{(n)}}{\Delta_l^{(n)}}\ \text{при}\ \Delta_l^{(n)}\neq 0, \tag{1.41}$$

где $\Delta_l^{(n)}$ — определитель системы (1.40); $\Delta_{jl}^{(n)}$ — определитель матрицы, полученной из матрицы $\{s_{jkl}^{(n)}\}$ системы заменой j-го столбца на столбец свободных членов; Φ_{jn}^H определены в (1.28).

После вычисления $a_{jl}^{(n)}$ можно найти все характеристики НДС.

Если $c_2<c<c_1$, потенциал объемных волн Φ_{1l} имеет вид (1.38), а сдвиговых волн — (1.37). Это значит, что объемные волны становятся поверхностными, их амплитуды максимальны на поверхности тоннеля, экспоненциально убывают с удалением от него, волны движутся вдоль оси тоннеля со скоростью c. Сдвиговые же волны распространяются на бесконечность от тоннеля и убывают гораздо медленнее (как $r^{-1/2}$). Коэффициенты рядов определяются формулами, аналогичными (1.40), в которых вместо $H_n(\alpha_1 R)$ и $H_n'(\alpha_1 R)$ используются $K_n(k_1R)$, $K_n'(k_1R)$.

При $c<c_2$ объемные и сдвиговые волны становятся поверхностными, их энергия сосредоточена вблизи поверхности тоннеля. Все три потенциала имеют вид (1.38), а в соотношениях (1.40) все H_n и H_n' следует заменить на K_n, K_n'.

Во всех трех случаях можно пользоваться представлением (1.37), если положить $k_j=\sqrt{\alpha_j^2-(\gamma l)^2}$ и учесть условия излучения:

$$\operatorname{Re}k_j\geqslant 0,\ \operatorname{Im}k_j\geqslant 0. \tag{1.42}$$

Как известно [80], в этой области ряды (1.37) описывают волны, распространяющиеся в сторону возрастания r, затухающие с ростом r.

При совпадении c с одной из скоростей звука c_j соответствующий потенциал имеет вид (1.39). Нетрудно получить разрешающую систему уравнений и в этом случае. Здесь мы ее не приводим.

Соотношения (1.41) определяют $a_{jl}^{(n)}$, если $\Delta_l^{(n)}$ отличен от нуля. Поскольку в формулы (1.40) значение l входит в комбинации с γ, $\Delta_l^{(n)}=\Delta^{(n)}(\gamma l, c)$. Величина $\lambda=2\pi/(\gamma l)$ — длина бегущей по z волны, поэтому можем записать $\Delta_l^{(n)}=\Delta^{(n)}(\lambda, c)$.

Если
$$\Delta^{(n)}(\lambda, c)=0, \tag{1.43}$$

однородная система уравнений, соответствующая (1.40), имеет ненулевое решение. Тогда решение системы в зависимости от ранга ее расширенной матрицы либо не существует, либо не единственно. Исследование дисперсионных соотношений (1.43) освещено в главе 4, п. 4.1.

Рассмотрим задачу дифракции плоских гармонических волн:

$$\varphi_j^0=A_j\exp(i\alpha_j(e_x x+e_y y+e_z z)),\ \varphi_k^0=0,\ \text{для}\ k\neq j.$$

Здесь единичный вектор $\vec{e}=(e_x, e_y, e_z)$ характеризует направление распространения волны. В расчетах принято $\vec{e}=(\sin G,\ 0,\ \cos G)$, где G — угол между волновым вектором и осью OZ.

Результирующее поле Φ_j имеет вид $\Phi_k=\varphi_k+\varphi_k^0$, $k=1, 2, 3$. Потенциалы отраженного поля φ_j определяем, исходя из решения вышеизложенной задачи. Для этого воспользуемся представлением (1.31), откуда

$$\varphi_j^0=A_j e^{i\gamma z}\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\alpha_{jx}r)e^{in\theta}, \tag{1.44}$$

где $\gamma=\alpha_j\cos G$, $\alpha_{jx}=\alpha_j\sin G$. Пользуясь соотношениями (1.34), находим σ_{rr}^0, $\sigma_{r\theta}^0$, σ_{rz}^0 при $r=R$. Граничные условия на поверхности тоннеля:

$$\sigma_{rj}=-\sigma_{rj}^0\ (j=r,\ \theta,\ z).$$

При дифракции PP-волны $c=\omega/(\alpha_1\cos G)$, поэтому $c>c_1$, т. е. реализуется сверхзвуковой случай. При дифракции сдвиговых волн обоих типов $c=\omega/(\alpha_2\cos G)$. Если $G>\arccos(\alpha_1/\alpha_2)=G^*$, также имеем сверхзвуковой случай, если же $0<G<G^*$ — межзвуковой. G^* — критическое значение угла падения — называют *углом предельного отражения*.

Расчеты проводились для алевролита с $G^*\simeq 52°$. На рис. 1.7 представлены эпюры напряжений для трех углов падения: 30, 60, 90° (кривые *1*, *2*, *3*), т. е. рассмотрены межзвуковая и сверхзвуковые нагрузки. Радиус полости $R=3$ м. Рис. 1.7, *а* и *б* описывает дифракцию PP- и SV-волны; из 6 компонент напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ достигают максимальной величины, а при дифракции SH-волн (φ_3^0) максимальны $\sigma_{\theta z}$. Эти компоненты и представлены на рисунках. Верхняя полуплоскость соответствует частоте 1 Гц, нижняя — 100. Для низких частот ($\alpha_j R<0{,}1$), как и в случае плоской деформации, графики почти симметричны относительно вертикальной оси,

перпендикулярной проекции волнового вектора на плоскость OXY, для любых углов. Отметим, что $|\mathrm{Re}\,\sigma_{\theta\theta}| \simeq |\sigma_{\theta\theta}|$, $\mathrm{Im}\,\sigma_{\theta\theta} \simeq 0$, т. е. все точки на контуре полости движутся почти в фазе.

При высоких частотах симметрия нарушается. Как и при плоской деформации, максимумы при дифракции PP-волн для низких частот находятся на вертикальном диаметре, SV-волн — в точках

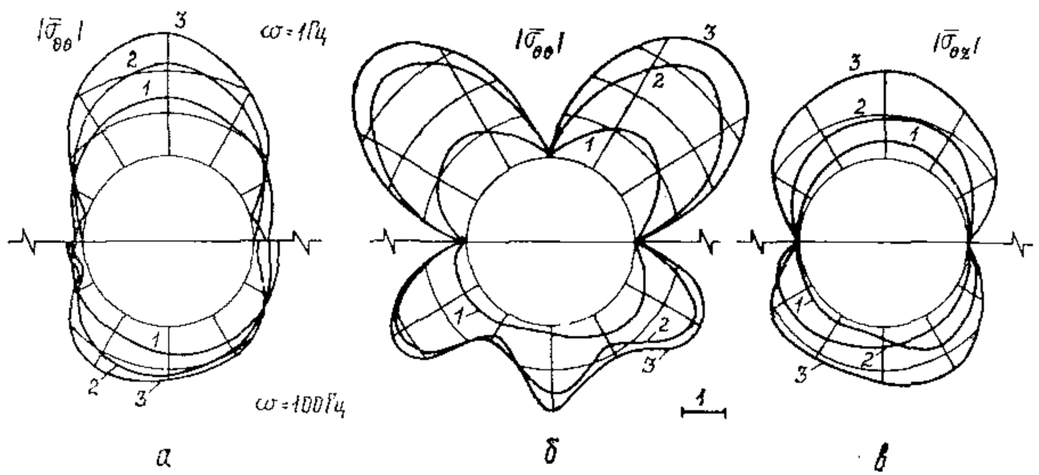


Рис. 1.7. Влияние угла падения G на концентрацию напряжений при дифракции PP- (*а*), SV- (*б*), SH-волны (*в*). *1—3* — $G=30$, 60, 90°

$\theta=\pi/4\pm\pi k$. Вообще при низких частотах положение максимумов слабо зависит от G. Этого нельзя сказать о случае дифракции более коротких волн ($\alpha_j R\sim 1$), однако значение $\max|\sigma_{\theta\theta}|$ меняется с изменением G.

На рис. 1.8 показана зависимость характерных напряжений в точках $r=R$, $\theta=0$, 45, 90° при дифракции PP-, SV- и SH-волн. Как видим, с ростом G напряжения возрастают и достигают максимума при $G=90°$, что соответствует плоской деформации. Исключением является $|\sigma_{\theta\theta}|$ для SH-волны. Величина его растет, а потом убывает до нуля при $G=90°$. Причем $\max\limits_{G}|\sigma_{\theta\theta}|/\sigma_0$ близки к $\max\limits_{\theta}|\sigma_{\theta\theta}|/\sigma_0$ при $G=90°$ для PP- и SV-волны. SV-волны при любых G вызывают максимальную концентрацию напряжений.

Во всех приведенных расчетах порядок членов разложения в рядах (1.37), (1.38) изменялся от $-N$ до N, причем $|N|<15$. Фактическое N выбиралось программой, исходя из требуемой точности представления рядов (1.44), для которых относительная погрешность полагалась равной 10^{-5}. Точность вычислений в рассмотренном диапазоне частот растет с ростом ω. При $\alpha_j R\sim 0{,}01$ относительная погрешность вычисления напряжений порядка 1 %, при

$\alpha_j R\sim 10-10^{-3}$ %. Программа с достаточной точностью определяет решение для $5°<G<90°$, $G\neq G^*\pm\Delta G$, $\Delta G<3°$. Расчет дифракционных задач для сдвиговых волн непосредственно вблизи критического угла G^* и $G=0$ неустойчив, что связано с неустойчивостью расчета $H_n(\alpha r)$, $K_n(\alpha r)$ для малых волновых чисел: $K_n(\alpha r)\to\infty$, $H_n(\alpha r)\to\infty$ при $\alpha r\to 0$.

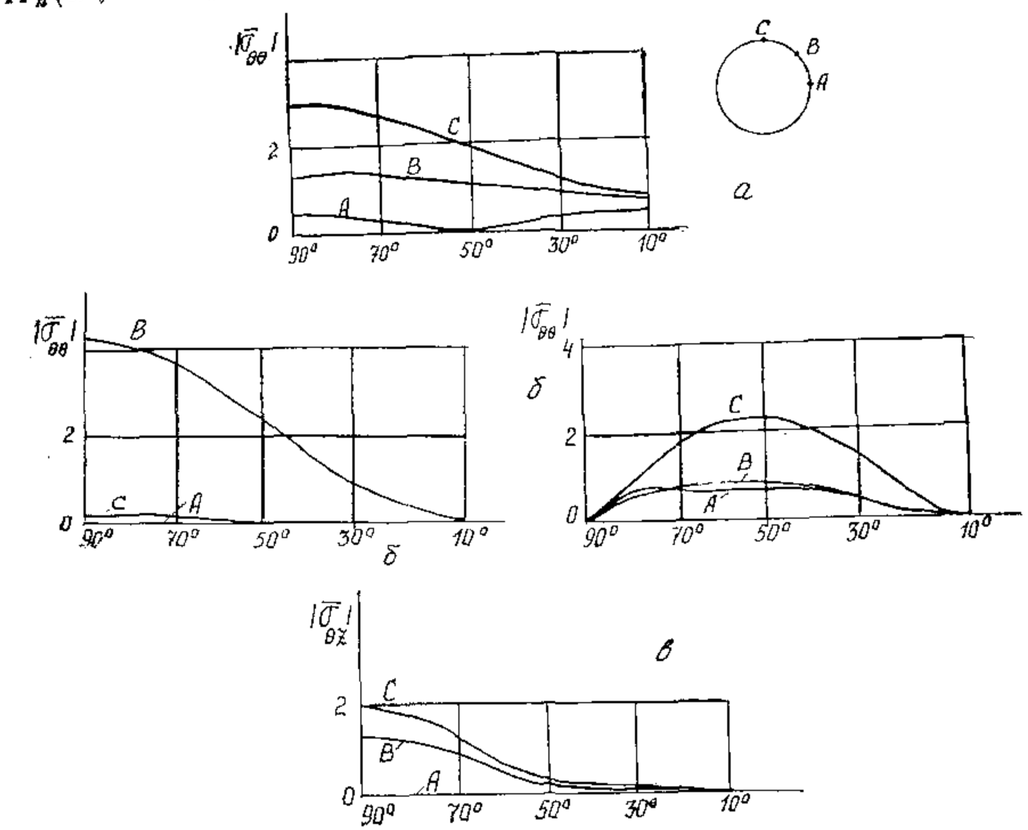


Рис. 1.8. Зависимость напряжений от угла падения PP- (*а*), SV- (*б*), SH-волны (*в*) в фиксированных точках полости A, B, C

Заметим, что в диапазоне частот 1 Гц$\leqslant\omega\leqslant$200 Гц определитель $\Delta_1^{(n)}$ (2.41) не обращается в ноль.

1.4. Стационарные процессы в двухкомпонентной среде Био. Потенциалы смещений

Для описания состояния двухкомпонентной среды Био введем следующие обозначения: U_i, u_i — декартовы ($i=x$, y, z) или цилиндрические ($i=r$, θ, z) компоненты смещения жидкости и упру-

гого скелета соответственно; p, σ_{ij} — давление жидкости и компоненты тензора напряжений в упругом скелете. Для линейной изотропной среды Био связь между введенными величинами имеет вид обобщенного закона Гука [18, 67, 73]:

$$\sigma_{ij}=(A\nabla_k u_k+Q\nabla_k U_k)\delta_{ij}+N(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i);$$
$$\sigma=-mp=R\nabla_k U_k+Q\nabla_k u_k. \tag{1.45}$$

Здесь A, N, Q, R — константы среды Био, имеющие размерность напряжений. Уравнения движения в отсутствие вязкости жидкости имеют вид

$$\nabla_i((A+N)\nabla_k u_i+Q\nabla_k U_k)+N\nabla_k\nabla_k u_i=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}u_i+\rho_{12}U_i);$$
$$\nabla_i(Q\nabla_k u_k+R\nabla_k U_k)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}u_i+\rho_{22}U_i). \tag{1.46}$$

Константы ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} имеют размерность плотности и связаны с плотностью частиц скелета ρ_c и жидкости $\rho_ж$ по Био соотношениями

$$\rho_{11}=(1-m)\rho_c-\rho_{12},\quad \rho_{22}=m\rho_ж-\rho_{12}, \tag{1.47}$$

где m — пористость среды. Константа присоединенной плотности ρ_{12} связана с дисперсией отклонения микроскоростей частиц жидкости в порах от средней скорости потока жидкости U, зависит от геометрии пор. Вопрос о ее экспериментальном определении до сих пор не совсем ясен и полемизируется в печати [51]. Био и Виллис решили ряд модельных задач для определения констант A, N, Q, R, ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22}, а Фатт [99] экспериментально определил их, включая присоединенную плотность, для песчаника, насыщенного керосином. К сожалению, лишь для этой среды известны все константы среды Био.

Модель Био при $\rho_{12}=0$ совпадает с моделью Френкеля — Николаевского [51]. На основе сопоставления этих моделей В. Н. Николаевским были предложены формулы для расчета констант среды Био через величины, экспериментальное определение которых хорошо известно:

$$A=(1-m)\lambda_1+(1-m)^2(1-\beta_1K)^2\beta^{-1};\quad N=(1-m)\lambda_2;$$
$$R=m^2\beta^{-1};\quad Q=(1-m)m(1-\beta_1K)\beta^{-1}; \tag{1.48}$$
$$\beta=(1-m)\beta_1(1-\beta_1K)+m\beta_2;\quad K=\lambda_1+\frac{2}{3}\lambda_2.$$

Здесь $(1-m)\lambda_1$, $(1-m)\lambda_2$ — параметры Ламе сухого пористого скелета; β_1, β_2 — коэффициенты сжимаемости частиц жидкости и скелета; $K_i=\beta_i^{-1}$ — соответствующий коэффициент объемного расширения.

Введем скалярные и векторные потенциалы Φ_1, Φ_2, $\vec{\Psi}_1$, $\vec{\Psi}_2$ для перемещений упругой и жидкой компоненты:

$$\vec{u}=\operatorname{grad}\Phi_1+\operatorname{rot}\vec{\Psi}_1;\quad \vec{U}=\operatorname{grad}\Phi_2+\operatorname{rot}\vec{\Psi}_2. \tag{1.49}$$

В результате уравнения движения (1.46) преобразуются:

$$\left((A+2N)\Delta-\rho_{11}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_1+\left(Q\Delta-\rho_{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_2=0;$$
$$\left(Q\Delta-\rho_{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_1+\left(R\Delta-\rho_{22}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_2=0; \tag{1.50}$$

$$\left(N\Delta-\rho_{11}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\Psi}_1-\rho_{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\Psi}_2=0;$$
$$\rho_{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\Psi}_1+\rho_{22}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\Psi}_2=0. \tag{1.51}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа. Из (1.51) следует

$$\vec{\Psi}_2=-\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\vec{\Psi}_1, \tag{1.52}$$

а потенциалы $\vec{\Psi}_j$ удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta\vec{\Psi}_j=\frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2\vec{\Psi}_j}{\partial t^2}, \tag{1.53}$$

где $c_3=\sqrt{\dfrac{N\rho_{22}}{\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2}}$ — скорость распространения сдвиговых волн в среде Био.

Используя операторный метод Гольденвейзера, из (1.50) получим

$$\left(\Delta-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_j=0,\quad j=1,\ 2, \tag{1.54}$$

где c_1, c_2 — корни биквадратного уравнения

$$(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)c^4+(2Q\rho_{12}+(A+2N)\rho_{22}-R\rho_{11})c^2+$$
$$+R(A+2N)-Q^2=0. \qquad (1.55)$$

Поскольку для среды Био $A+2N>0$, $R>0$, $Q>0$, $\rho_{11}>0$, $\rho_{22}>0$, $\rho_{12}<0$, поэтому $2Q\rho_{12}-(A+2N)\rho_{22}-R\rho_{11}<0$. В силу положительной определенности кинетической энергии и упругого потенциала среды Био

$$\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2>0,\ (A+2N)R-Q^2>0,$$

поэтому действительные корни уравнения (1.55) всегда существуют и, по теореме Виета, положительны:

$$c_{1,2}^2=((A+2N)\rho_{22}+R\rho_{11}-2Q\rho_{12}\pm$$
$$\pm\sqrt{((A+2N)\rho_{22}-R\rho_{11})^2+4((A+2N)\rho_{12}-Q\rho_{11})(R\rho_{12}-Q\rho_{22})}/$$
$$/(2(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)). \qquad (1.56)$$

Верхний знак в (1.56) соответствует c_1, нижний — c_2, $c_1>c_2$. Из (1.54) следует, что в среде Био существуют две скорости, с которой может распространяться объемная деформация. Волны, распространяющиеся со скоростью c_1, называют волнами 1-го рода, со скоростью c_2 — 2-го (иногда — волной переупаковки [51], она распространяется в среде медленнее, чем волны 1-го рода и сдвиговые).

Потенциалы Φ_j удобно представить в виде

$$\Phi_1=\varphi_1+\xi_2\varphi_2,\ \Phi_2=\xi_1\varphi_1+\varphi_2, \qquad (1.57)$$

где новые потенциалы φ_j удовлетворяют волновым уравнениям

$$\Delta\varphi_j=c_j^{-2}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial t^2},\ j=1,\ 2, \qquad (1.58)$$

а ξ_1, ξ_2 определяются соотношениями

$$\xi_1=\frac{A+2N-\rho_{11}c_1^2}{\rho_{12}c_1^2-Q}=\frac{Q-\rho_{12}c_1^2}{\rho_{22}c_1^2-R};$$
$$\xi_2=\frac{R-\rho_{22}c_2^2}{\rho_{12}c_2^2-Q}=\frac{Q-\rho_{12}c_2^2}{\rho_{11}c_2^2-(A+2N)}. \qquad (1.59)$$

Таким образом, решение системы уравнений Био сведется к решению трех волновых уравнений ((1.52), (1.58)) для векторного потенциала $\vec{\Psi}_1$ и двух скалярных (φ_1, φ_2).

Форма представления (1.57) предложена В. В. Шершневым [88]. В отличие от общепринятой [67, 73]

$$\Phi_1=\varphi_1+\varphi_2,\ \Phi_2=\gamma_1\varphi_1+\gamma_2\varphi_2 \qquad (1.60)$$

она позволяет естественным образом осуществлять предельный переход к среде с разделенными компонентами. Из (1.49), (1.57) следует

$$\vec{u}=\operatorname{grad}(\varphi_1+\xi_2\varphi_2)+\operatorname{rot}\vec{\Psi}_1;$$
$$\vec{U}=\operatorname{grad}(\xi_1\varphi_1+\varphi_2)-\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\operatorname{rot}\vec{\Psi}_1. \qquad (1.61)$$

При $\xi_1=\xi_2=0$, $\rho_{12}=0$ скелет и жидкость двигаются независимо друг от друга. Связь между компонентами, как следует из (1.45), (1.46), обусловлена константами ρ_{12}, Q. Если $\rho_{12}\to 0$, $Q\to 0$, как вытекает из (1.59), $\xi_1\to 0$, $\xi_2\to 0$. В этом случае

$$\vec{u}=\operatorname{grad}\varphi_1+\operatorname{rot}\vec{\Psi}_1,\ \vec{U}=\operatorname{grad}\varphi_2. \qquad (1.62)$$

При этом скорости распространения продольных волн 1-го рода и сдвиговых волн стремятся $\left(\text{при условии } \frac{A+2N}{(1-m)\rho_c}>\frac{R}{m\rho_ж}\right)$ к скоростям продольных и поперечных волн соответствующей упругой изотропной среды с коэффициентами Ламе A, N и плотностью $(1-m)\rho_c$:

$$c_1\to\sqrt{\frac{A+2N}{(1-m)\rho_c}},\quad c_3\to\sqrt{\frac{N}{(1-m)\rho_c}}. \qquad (1.63)$$

Величина $c_2\to\sqrt{\frac{R}{\rho_{22}}}$, что соответствует скорости распространения объемных волн в идеальной жидкости.

В формулах (1.60) при $\rho_{12}\to 0$, $Q\to 0$ $\gamma_1=\xi_1\to 0$, но $\gamma_2=\frac{1}{\xi_2}\to\infty$, поэтому потенциал Φ_2 не определен.

Если перейти к пределу по пористости m, $m\to 0$, что соответствует заполнению пор материалом упругого скелета, из (1.48) получим $Q\to 0$, $R\to 0$, $N\to\lambda_2$, $A\to\lambda_1$, так как из физических сооб-

ражений $K \to \frac{1}{\beta_1}$. Однако теоретически зависимость коэффициента объемного расширения скелета K от пористости m неясна, поэтому выполнить такой предельный переход в расчетах затруднительно.

При стационарных установившихся процессах $\varphi_j = \varphi_j(\vec{r}) e^{-i\omega t}$, комплексные потенциалы удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta\varphi_j + \alpha_j^2 \varphi_j = 0, \tag{1.64}$$

здесь $\alpha_j = \omega / c_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, $\alpha_3 = \alpha_4$. Через φ_3, φ_4 обозначены функции, определяющие векторный потециал $\vec{\Psi}_1$:

$$\vec{\Psi}_1 = \varphi_3 \vec{e}_3, \quad \varphi_4 = 0 \tag{1.65}$$

при плоской деформации;

$$\vec{\Psi}_1 = (\varphi_3 \vec{e}_3 + \operatorname{rot} \varphi_4 \vec{e}_3) \tag{1.66}$$

в трехмерном случае.

Этой формой представления векторных потенциалов будем пользоваться для решения дифракционных задач.

1.5. Задача стационарной дифракции волн на тоннеле в водонасыщенном массиве. Плоская деформация

Рассмотрим круговой тоннель радиусом R_0 в водонасыщенном массиве, моделируемом средой Био. Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z), ось OZ которой направим вдоль оси тоннеля.

Предположим, что на поверхности тоннеля действуют стационарные нагрузки, не зависящие от z:

$$\sigma_{rr} = p_1(\theta), \quad \sigma_{r\theta} = i p_2(\theta), \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma = p_3(\theta), \quad r = R_0. \tag{1.67}$$

При этих условиях в среде реализуется состояние плоской деформации, которое можно описать тремя скалярными потенциалами: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ((1.57), (1.65)).

Перемещения и напряжения через φ_j в цилиндрической системе координат в случае плоской деформации имеют вид

$$u_r = \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \xi_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta};$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} + \frac{\xi_2}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial r};$$

$$U_r = \xi_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta}; \tag{1.68}$$

$$U_\theta = \frac{\xi_1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} + \frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\frac{\partial\varphi_3}{\partial r};$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{2N} = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{A+2N+\xi_1 Q}{2N}(\alpha_1 r)^2\varphi_1 + r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta^2} + \right.$$

$$+ \frac{(A+2N)\xi_2 + Q}{2N}(\alpha_2 r)^2\varphi_2 + \xi_2 r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \xi_2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\theta^2} +$$

$$\left. + \frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta} - r\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial r\partial\theta}\right);$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{2N} = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} - r\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r\partial\theta} + \xi_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} - r\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r\partial\theta}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{(\alpha_3 r)^2}{2}\varphi_3 - r\frac{\partial\varphi_3}{\partial r} - \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial\theta^2}\right);$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2N} = \frac{1}{r^2}\left(-\frac{A+\xi_1 Q}{2N}(\alpha_1 r)^2\varphi_1 + r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\xi_2 A + Q}{2N}(\alpha_2 r)^2\varphi_2 + \xi_2 r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \xi_2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta} - r\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial r\partial\theta}\right);$$

$$\sigma = -(Q + \xi_1 R)\alpha_1^2\varphi_1 - (\xi_2 Q + R)\alpha_2^2\varphi_2.$$

Потенциалы среды представим в виде

$$\varphi_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{jn} H_n(\alpha_j r) e^{in\theta}, \quad j = 1, 2;$$

$$\varphi_3 = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{3n} H_n(\alpha_3 r) e^{in\theta}. \tag{1.69}$$

Подставляя (1.69) в граничные условия (1.67) и приравнивая коэффициенты Фурье левой и правой частей, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_{jn}:

$$\sum_{j=1}^{3} s_{kn}^{(j)} a_{jn} = p_{kn}, \quad k=1,\ 2,\ 3,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$$

где

$$s_{1n}^{(1)} = -H_n(\alpha_1 R_0)((A+2N+\xi_1 Q)\alpha_1^2 - 2Nn^2 R_0^{-2}) -$$

$$-2N\alpha_1 R_0^{-1} H_n'(\alpha_1 R_0);$$

$$s_{1n}^{(2)} = -H_n(\alpha_2 R_0)(((A+2N)\xi_2 + Q)\alpha_2^2 - 2N\xi_2 n^2 R_0^{-2}) +$$

$$+2N\xi_2 \alpha_2 R_0^{-1} H_n'(\alpha_2 R_0);$$

$$s_{1n}^{(3)} = 2NR_0^{-2} n(H_n(\alpha_3 R_0) - \alpha_3 R_0 H_n'(\alpha_3 R_0));$$

$$s_{2n}^{(1)} = -2NR_0^{-2} n(H_n(\alpha_1 R_0) - \alpha_1 R_0 H_n'(\alpha_1 R_0));$$

$$s_{2n}^{(2)} = -2NR_0^{-2} n(H_n(\alpha_2 R_0) - \alpha_2 R_0 H_n'(\alpha_2 R_0));$$

$$s_{2n}^{(3)} = -2NR_0^{-2}((n^2 - 0{,}5\alpha_3^2 R_0^2) H_n(\alpha_3 R_0) + \alpha_3 R_0 H_n'(\alpha_3 R_0));$$

$$s_{3n}^{(1)} = -(Q+\xi_1 R)\alpha_1^2 H_n(\alpha_1 R_0);$$

$$s_{3n}^{(2)} = -(Q\xi_2 + R)\alpha_2^2 H_n(\alpha_2 R_0), \quad s_{3n}^{(3)} = 0.$$

Решение системы

$$a_{jn} = D_{jn}/D_n,$$

где D_n — определитель матрицы системы при фиксированном n; D_{jn} — определитель матрицы, полученной из матрицы для D_n заменой j-го столбца на столбец свободных членов.

Используя асимптотические представления функций $H_n(z)$ при $n \to \infty$ [80]:

$$H_n'(z) \sim -\frac{n}{z} H_n(z), \quad H_n(z) \sim -i(n-1)!\pi \left(\frac{2}{z}\right)^n, \tag{1.70}$$

нетрудно получить асимптотические представления и оценки определителей D_n, D_{jn} для больших n:

$$D_n \sim Cn^2 H_n(\alpha_1 R_0) H_n(\alpha_2 R_0) H_n(\alpha_3 R_0);$$

$$|D_{jn}| < C_j n^2 \sum_{k=1}^{3} |p_{kn}| \cdot \begin{cases} |H_n(\alpha_2 R_0) H_n(\alpha_3 R_0)|, & j=1, \\ |H_n(\alpha_1 R_0) H_n(\alpha_3 R_0)|, & j=2, \\ |H_n(\alpha_1 R_0) H_n(\alpha_2 R_0)|, & j=3, \end{cases}$$

где C, C_j — константы, не зависящие от n. Отсюда следует оценка сходимости рядов Фурье — Бесселя:

$$\left| \sum_{|n|>N} a_{jn} H_n(\alpha_j r) e^{in\theta} \right| < C_2 \sum_{|n|>N} (R_0/r)^{|n|} \sum_{k=1}^{3} |p_{kn}| <$$

$$< 2C_2 \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{3} |p_{kn}|.$$

Из этого неравенства следуют сходимость и дважды дифференцируемость рядов (1.69) в области $r > R_0$, если абсолютно сходится ряд Фурье для действующих нагрузок.

В задачах стационарной дифракции волн на круговом отверстии в среде Био, как и ранее, положим поле падающей волны заданным потенциалами φ_j^0, которые удовлетворяют соответствующим уравнениям Гельмгольца (1.64), а результирующее поле ищем в виде

$$\Phi_j = \varphi_j^0 + \varphi_j,$$

где φ_j — потенциалы отраженных волн, подлежащие определению.

Поверхность полости свободна от напряжений:

$$\Sigma_{rj} = 0, \quad j = r,\ \theta,\ \Sigma = 0 \text{ при } r = R_0. \tag{1.71}$$

Тогда граничные условия для потенциала отраженных волн принимают вид

$$\sigma_{rj} = -\sigma_{rj}^0, \quad j = r,\ \theta,\ \sigma = -mp = -\sigma_0 \text{ при } r = R_0. \tag{1.72}$$

Здесь σ_{rj}, p — тензор напряжений и давление, порожденные потенциалом отраженных волн. Для определения φ_j ($j=1, 2, 3$) приходим к решению вышеописанной задачи.

1.6. Расчет напряженно-деформированного состояния поверхности тоннеля в водонасыщенном массиве при дифракции плоских и цилиндрических волн

Рассмотрим задачу стационарной дифракции плоских продольных и поперечных волн на круговом отверстии радиусом $R_0 = 3$ м в среде Био. Потенциал падающей волны φ_k^0:

$$\varphi_k^0 = \exp(i\alpha_k x - i\omega t), \quad \varphi_j^0 = 0, \quad j \neq k. \tag{1.73}$$

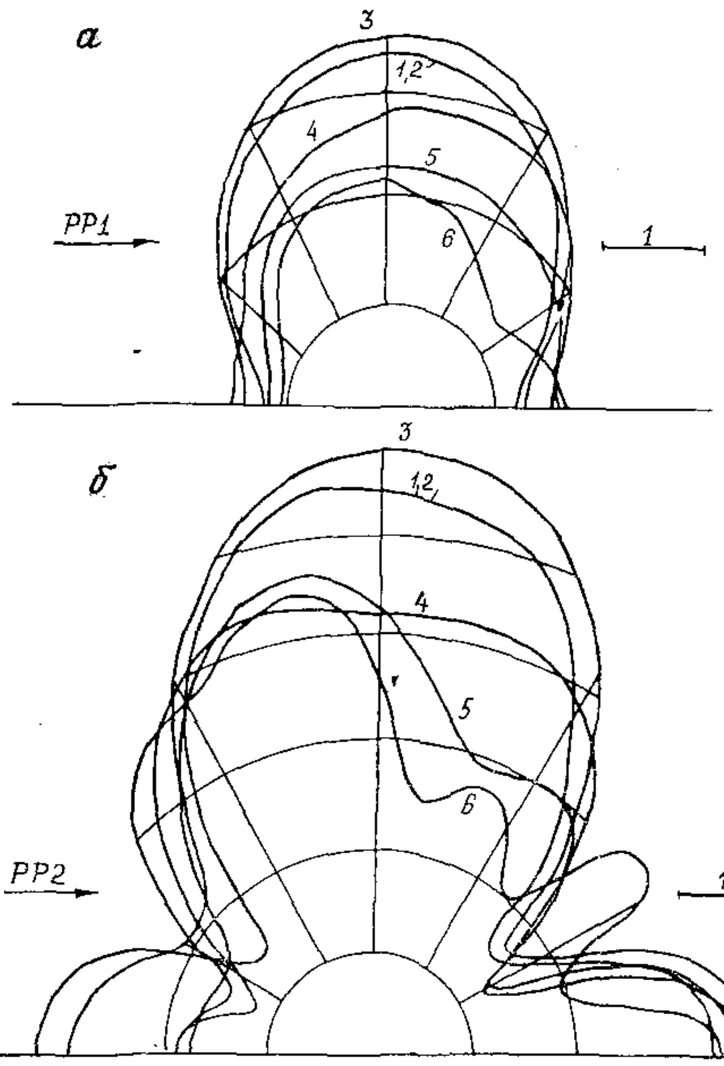


Рис. 1.9. Амплитуды нормальных тангенциальных напряжений на поверхности тоннеля в водонасыщенном массиве при дифракции продольных волн 1-го (*а*) и 2-го (*б*) рода. *1—6*—$\omega=1$, 10, 30, 70, 100, 200 Гц (то же, для рис. 1.10)

Случай $k=1$ соответствует продольной волне 1-го рода, $k=2$ — 2-го, при $k=3$ дифрагирует поперечная волна.

Приведем результаты расчетов, выполненных В. В. Шершневым [88] для среды Био с параметрами [73, 99]: $A=409{,}6$, $N=253{,}6$, $Q=68{,}5$, $R=29{,}5$ МПа, $\rho_{11}=1926$, $\rho_{12}=-1{,}9$, $\rho_{22}=215{,}1$ кг/м^3. Скорости распространения волн в такой среде, м/с: $c_1=2252$, $c_2=1031$, $c_3=1147$, коэффициенты ξ_1, ξ_2 равны соответственно 0,872 и —0,09647. Отсюда следует, как и указывалось в работе [67], что

направление движения жидкости и скелета в волне 1-го рода совпадает, а в волне 2-го рода движение находится в противофазе.

На рис. 1.9, *а* показаны эпюры амплитуд напряжений в скелете $\sigma_{\theta\theta}$, отнесенные к максимальному напряжению в падающей волне при дифракции волн 1-го рода на тоннеле. Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют частотам 1, 10, 30, 70, 100, 200 Гц. При низких частотах, соответствующих длинным волнам ($\alpha_j r\sim 0{,}1$ и меньше), графики амплитуд почти симметричны относительно вертикального диаметра ($\theta=90°$), перпендикулярного направлению распространения волны, и имеют максимум при $\theta=90°$. С ростом частоты асимметрия нарастает, максимум смещается. Поведение коэффициента концентрации k напряжений в скелете среды Био носит колебательный характер (см. рис. 1.12, кривая *1*): вначале он растет, достигая максимума в области $\omega\simeq 25$ Гц, потом начинает падать. В точке максимума $k\simeq 2{,}5$.

На рис. 1.9, *б* представлены $|\sigma_{\theta\theta}|/\sigma_{max}$ на контуре поперечного сечения тоннеля при дифракции волны 2-го рода. По-прежнему при низких частотах максимум достигается в точках вертикального диаметра, перпендикулярного направлению распространения волны: $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$, $r=R_0$. Ярко выражены локальные максимумы в точках горизонтального диаметра $\theta=0$, π, $r=R_0$. При низких частотах эпюра симметрична относительно вертикальной оси. С ростом частоты нарастает асимметрия, максимум $|\sigma_{\theta\theta}|$ сдвигается в сторону падающей волны, появляются локальные максимумы и минимумы по контуру полости. Коэффициент концентрации напряжений с ростом частоты колеблется, но наблюдается понижение каждого последующего локального максимума.

Концентрация напряжений на полости при дифракции продольной волны 2-го рода выше, чем для 1-го рода. Максимальное значение k достигает при $\omega\simeq 21$ Гц и равняется 5,6, т. е. более чем в 2 раза превышает максимум от продольной волны 1-го рода.

Напряжения и перемещения при дифракции поперечной ($k=3$) и $PP1$-волн показаны на рис. 1.10, 1.11. В отличие от предыдущих случаев максимумы $|\sigma_{\theta\theta}|$ находятся вблизи $\theta=\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{3\pi}{4}$, та же симметрия при низких частотах и то же падение локальных максимумов k с ростом частот (рис. 1.12, кривая *3*). Максимальные напряжения (возникают при $\omega\simeq 34$ Гц) достигают 5.

Сравнением k для трех типов волн (рис. 1.12) установлено, что наибольшую концентрацию напряжений в области низких частот вызывают продольные волны 2-го рода (волны переупаковки).

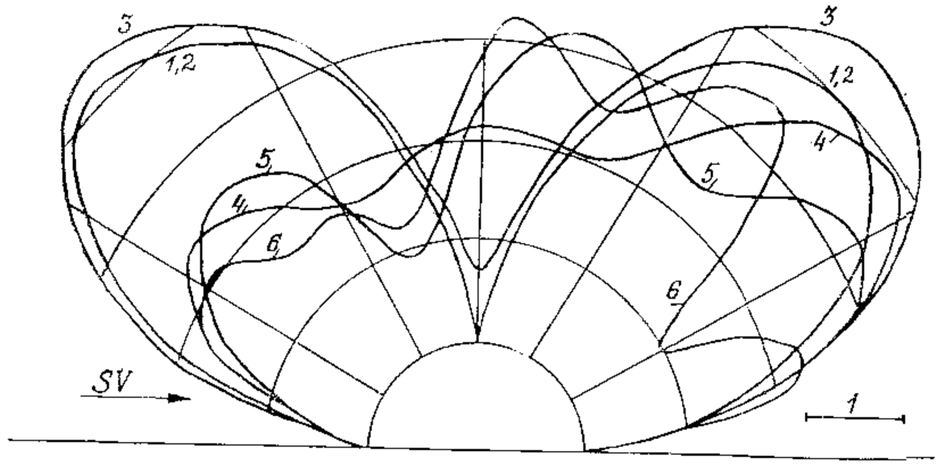


Рис. 1.10. Амплитуды нормальных тангенциальных напряжений на поверхности тоннеля в среде Био при дифракции поперечных волн

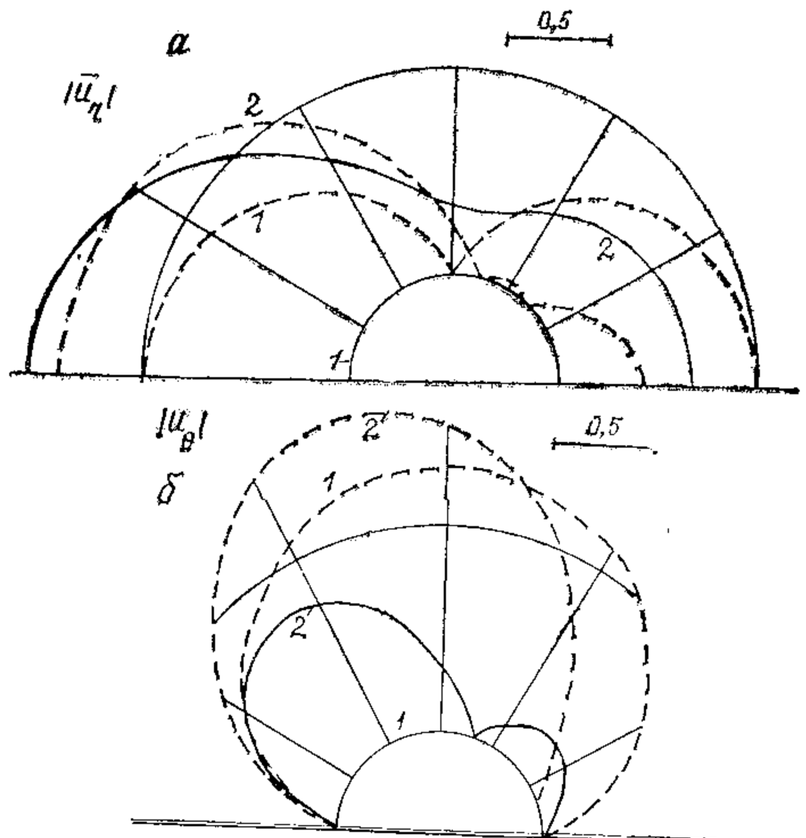


Рис. 1.11. Перемещения среды Био на контуре полости при дифракции $PP1$-волны при $t=0$ (сплошная линия) и $t=\pi/2\omega$ (штриховая). $1-2-\omega=1$ и 70 Гц

При росте частоты концентрации напряжений при дифракции поперечных и продольных волн 2-го рода сравнимы по величине, но значительно превосходят концентрацию напряжений на поверхности от волн 1-го рода.

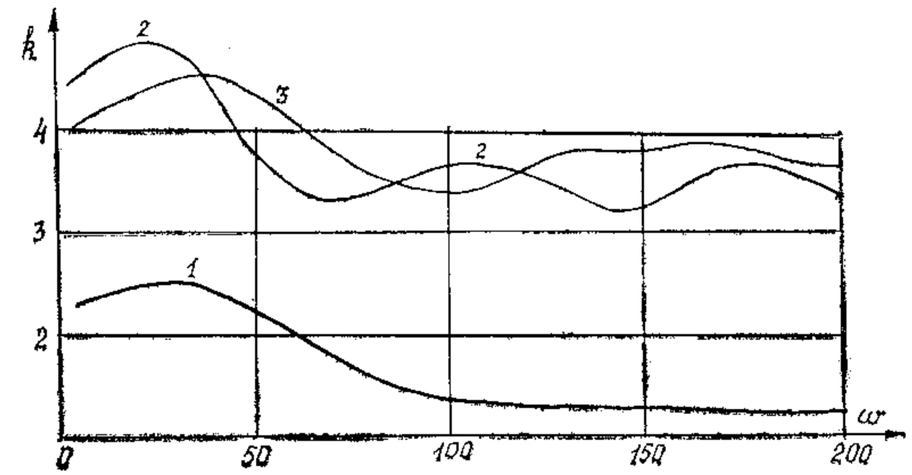


Рис. 1.12. Влияние частоты падающей волны на концентрацию напряжений на полости в среде Био. 1 — $PP1$; 2 — $PP2$, 3 — SV

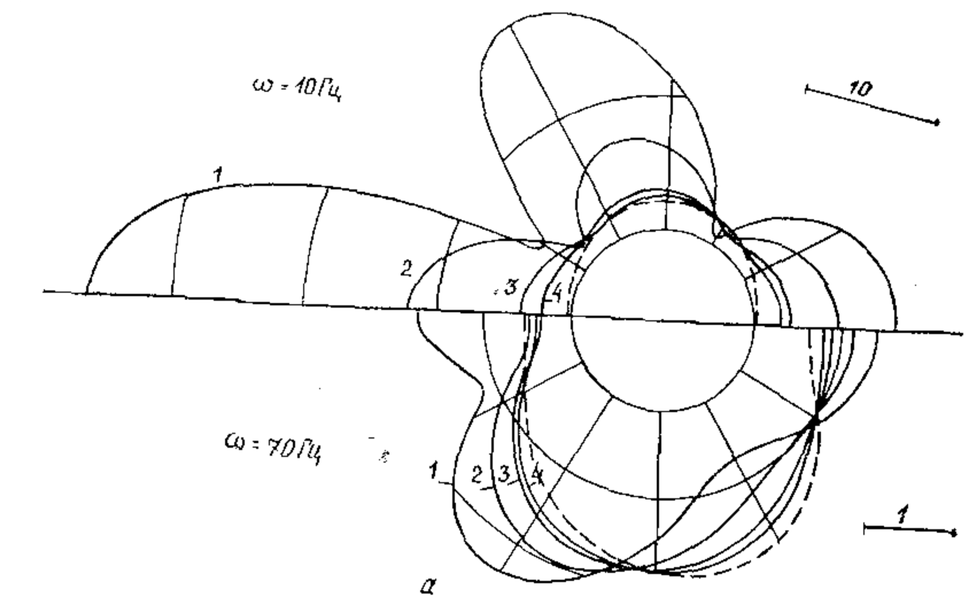
Максимальные значения k лежат в области низких частот, характерных для сейсмических воздействий от сильных землетрясений.

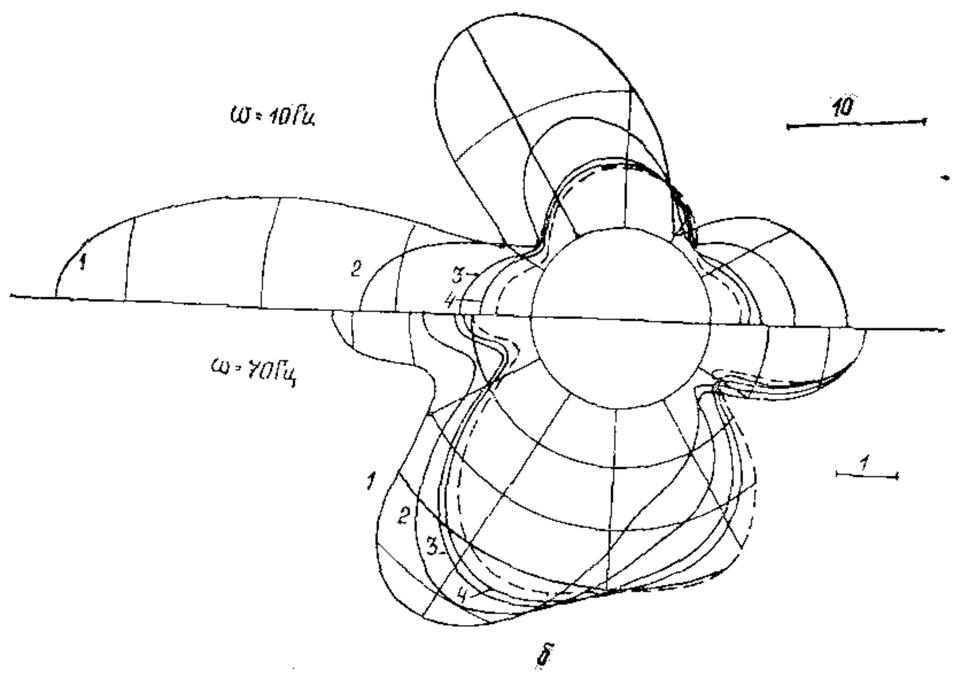
Рассмотрим дифракцию цилиндрических волн, возбуждаемых источником типа центра давления ($j=1$, 2) или центра «вращения» ($j=3$), с потенциалами

$$\varphi_j^0=H_0(\alpha_j r_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n H_n(\alpha_j R_{01})J_n(\alpha_j r)e^{in\theta},\ r<R_{01};$$

$$\varphi_k^0=0,\ k\neq j.$$

Здесь r_1 — расстояние от фиксированной точки до источника Q_1 с координатами $r=R_{01}$, $\theta=\pi$. Вторая часть равенства получена на основе теоремы сложения для бесселевых функций [23]. На рис. 1.13 представлены эпюры напряжений $|\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0|=\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ ($\sigma_0=\max\limits_{r_1=R_0}(\sigma^0_{\theta_1\theta_1},\ \sigma^0_{r_1r_1})$) на контуре полости при дифракции волны давления 1-го ($а$), 2-го ($б$) рода и сдвиговой цилиндрической волны ($\sigma_0=\max\limits_{r_1=R_0}\sigma^0_{r_1\theta_1}$) ($в$). Верхняя часть рисунков соответствует $\omega=10$ Гц, нижняя — $\omega=70$. Расстояние $R_{01}=2R_0$, $5R_0$, $10R_0$, $15R_0$ (эпюры 1, 2, 3, 4 соответственно). При $R_{01}\to\infty$





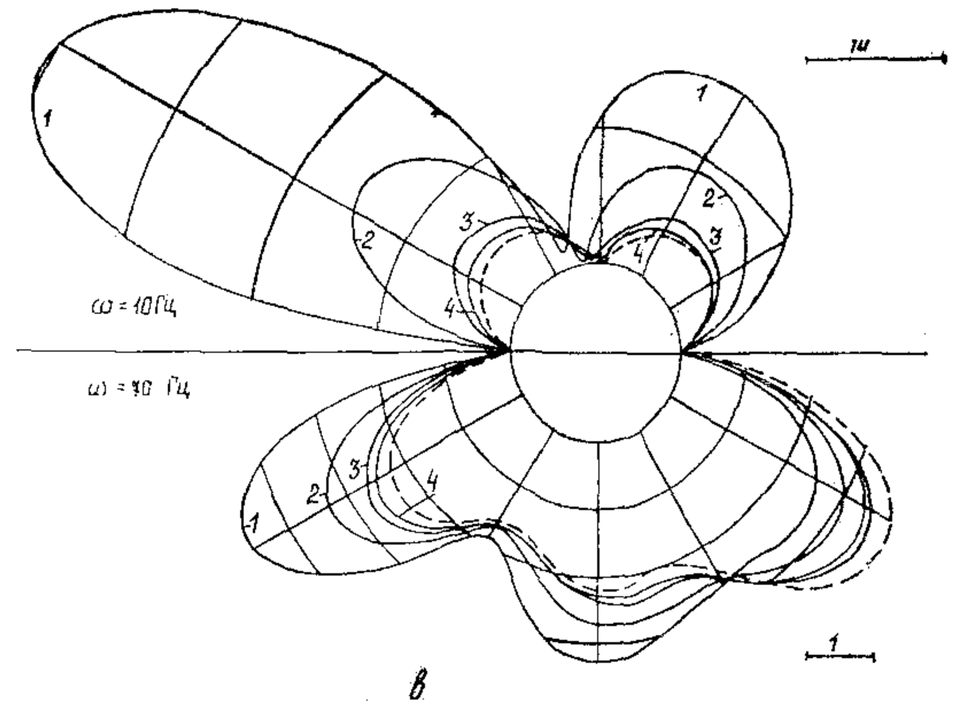


Рис. 1.13. Амплитуды напряжений на контуре неподкрепленного тоннеля в среде Био при дифракции цилиндрических волн 1-го (*а*), 2-го (*б*) рода и сдвиговых волн (*в*). *1—4*—$R_{01}=2R_0$, $5R_0$, $10R_0$, $15R_0$

$$H_n(\alpha_j R_{01}) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_j R_0}} \exp(i(\alpha_j R_{01} - \pi n/2 - \pi/4));$$

$$H_0(\alpha_j r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_j R_{01}}} \exp(i\alpha_j R_{01} - i\pi/4) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\alpha_j r) e^{in\theta} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_j R_{01}}} \exp(i(\alpha_j R_{01} - \pi/4 + \alpha_j x)),$$

т. е. *потенциал источника в фиксированной точке стремится к потенциалу плоской волны*. Напряжения, возникающие при дифракции плоских волн, изображены штриховыми линиями. Наиболее существенно различие между дифракцией плоских и цилиндрических волн при низких частотах. Максимумы сдвигаются в сторону источника. С *увеличением расстояния до источника* различия между напряжениями при дифракции цилиндрических и плоских волн уменьшаются и становятся меньше 10 %, если $\alpha_j R_{01} > 8\pi$, т. е. на расстояниях более 4 длин волн.

Для близких источников при дифракции волн 1-го и 2-го рода максимальная концентрация напряжений со стороны источника на прямой, соединяющей O и O_1. С ростом R_{01} этот максимум уменьшается, появляются зоны повышенной концентрации напряжений на других участках. Коэффициент концентрации напряжений k с ростом R_{01} для всех типов волн убывает и стремится к k для соответствующей плоской волны.

Расчеты показывают, что при $R_{01} > 4\lambda$, где $\lambda = \min\limits_j \frac{2\pi}{\alpha_j}$, влиянием кривизны фронта волны можно пренебречь и считать волны плоскими.

Отметим подобие картины напряжений для продольных волн 1-го и 2-го рода в случае близких источников. Они близки по величине, сдвиговые волны вызывают здесь наибольшую концентрацию напряжений, примерно в 1,3 раза выше, чем волны 1-го и 2-го рода. Эпюры при сдвиговых волнах как бы повернуты на 45°, а в остальном похожи на эпюры для продольных волн, чего не наблюдается в случае дифракции плоских волн.

Проведем сопоставление НДС поверхности тоннеля в «сухом» массиве и с учетом его водонасыщенности. Для этого используем соотношения (1.62), (1.63).

В качестве упругой изотропной среды возьмем алевролит: $\lambda_1 = 1688$ МПа, $\lambda_2 = 2532$ МПа, $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3. Учитывая его пористость $m \simeq 0{,}15$, сжимаемость частиц $\beta_1 = 51 \cdot 10^{-8}$ Па$^{-1}$, сжимаемость воды $\beta_2 = 45 \cdot 10^{-7}$ Па$^{-1}$, по формулам (1.48) определим параметры среды Био, моделирующей алевролит, насыщенный водой: $A = 6214$ МПа, $N = 2153$ МПа, $Q = 1031$ МПа, $R = 217$ МПа, $\rho_{11} = 2500$ кг/м^3, $\rho_{22} = 150$ кг/м^3, $\rho_{12} = 0$.

На рис. 1.14, *а* приведены эпюры нормальных тангенциальных напряжений при дифракции продольных волн 1-го (штриховая) и 2-го (штрихпунктирная линия) рода в среде Био. Сплошной линией обозначена эпюра $|\sigma_{\theta\theta}|$ при дифракции продольной волны в упругой среде. Кривые *1*, *2* соответствуют частотам $\omega = 10$, 100 Гц. Как видим, напряжения для упругой модели примерно в 1,4 раза выше для 10 Гц и в 2 раза выше для 100 Гц, чем в среде Био при дифракции волны 1-го рода. Волна переупаковки вызывает большую концентрацию напряжений, чем продольная волна в упругой среде. Максимальные напряжения при их дифракции примерно в 1,7 и 1,9 раза выше для соответствующих частот.

При дифракции поперечных волн обе модели (рис. 1.14, *б*) дают близкие результаты. При низкой частоте ($\omega = 10$ Гц) эпюры практически совпадают (различие не превышает 5 %), с ростом частоты различие увеличивается, но и оно сравнительно невелико.

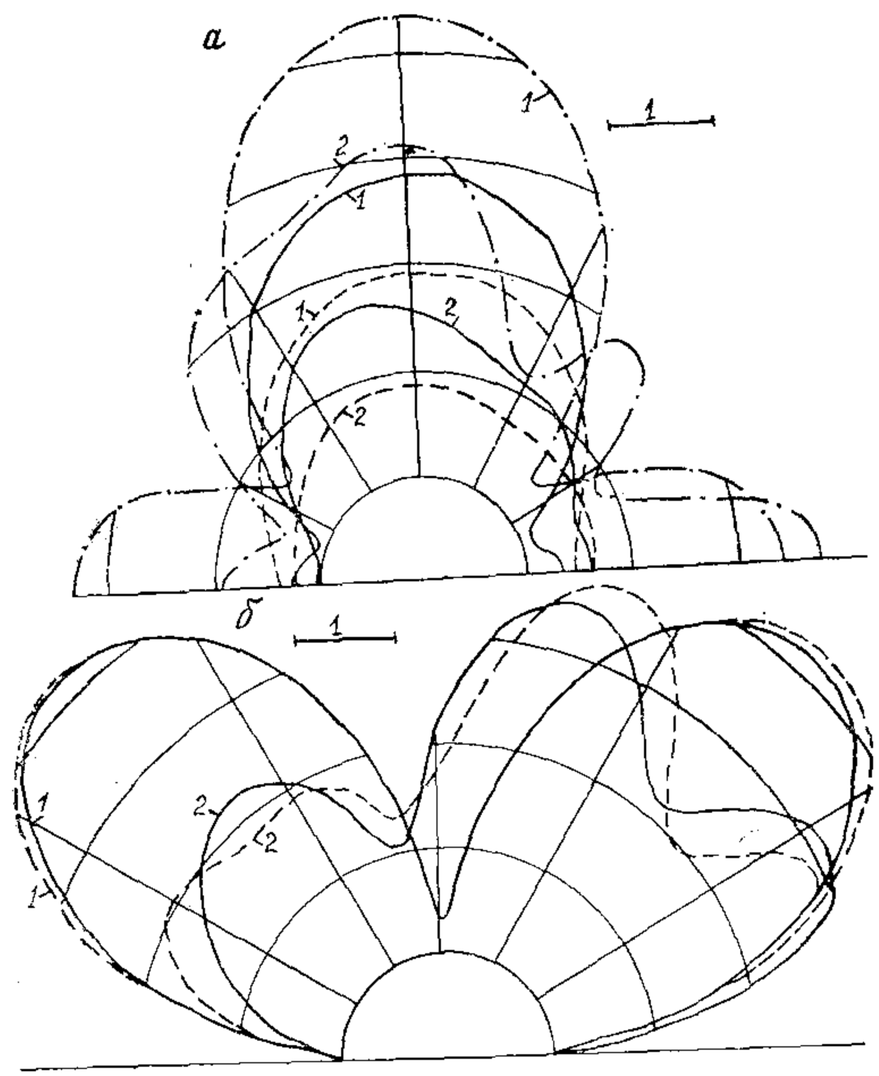


Рис. 1.14. Концентрация напряжений на контуре полости в сухом и водонасыщенном массиве при дифракции продольных (а) и поперечных (б) волн. *1—2*— $\omega = 10$, 100 Гц

При $\omega = 10$ Гц максимальные напряжения в упругой среде примерно на 10 % больше, чем в среде Био.

Таким образом, водонасыщенность массива следует учитывать прежде всего при дифракции продольных волн. Жидкость в порах, по нашим расчетам, повышает концентрацию напряжений в скелете среды Био почти в два раза.

Глава 2

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ОБДЕЛКИ КРУГОВОГО ТОННЕЛЯ ПРИ СТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Рассматривается стационарная дифракция упругих волн на монолитных обделках кругового тоннеля, моделируемых упругими оболочками конечной толщины. Как и ранее, породный массив, в котором находится тоннель глубокого заложения, представлен однородной изотропной средой, упругой либо двухкомпонентной водонасыщенной. Исследуются концентрация напряжений в обделке, ее зависимость от частоты (длины) падающей волны, типа, угла падения к продольной оси тоннеля. Анализируются особенности при докритических и закритических углах падения. Рассмотрены концентрические и эксцентрические обделки.

Методы расчета напряженно-деформированного состояния сред, содержащих цилиндрические и сферические границы раздела, при исследовании волновых процессов рассматривались Г. И. Петрашенем [55]. Движение цилиндрической оболочки в упругой среде методами коротковолновой асимптотики исследовалось в [43]. Динамическая концентрация напряжений в упругих оболочках, контактирующих с упругой или многокомпонентной средой, изучена недостаточно и в основном относится к задачам с действующими внутри полости подвижными нагрузками [27, 46, 60—62]. Дифракционные задачи ранее другими авторами не рассматривались, исключение составляют задачи гидроупругости [20].

2.1. Задача стационарной дифракции волн на обделке тоннеля в упругом массиве

Пусть круговой тоннель в упругом породном массиве (λ_2, μ_2, ρ_2) подкреплен монолитной обделкой, представляющей собой полый упругий цилиндр (λ_1, μ_1, ρ_1), внешняя и внутренняя боковые поверхности которого — круговые эксцентренные цилиндры радиусами R_2 и R_1 соответственно (рис. 2.1).

Рассмотрим предварительно задачу, когда внутри цилиндра действует стационарная нагрузка. Как и ранее, множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опускаем. Соотношения приводим для комплексных амплитуд.

Введем две цилиндрические системы координат (O_1, r_1, θ_1, z), (O_2, r_2, θ_2, z): оси O_1Z и O_2Z параллельны и направлены вдоль осей цилиндров, полярную ось направим вдоль вектора $\overrightarrow{O_1O_2}$, $\|\overrightarrow{O_1O_2}\| = d$ (рис. 2.1).

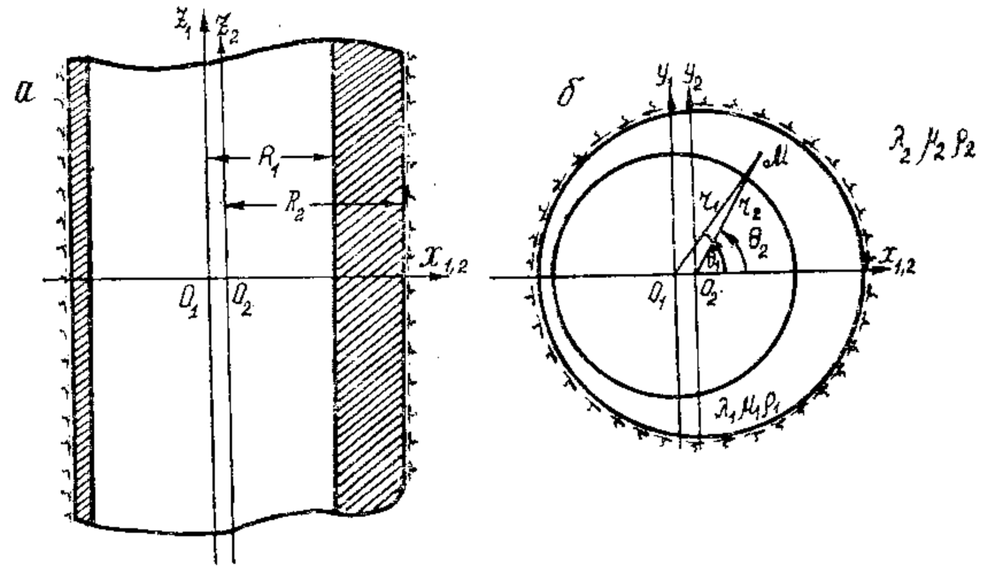


Рис. 2.1. Подкрепленная цилиндрическая выработка кругового сечения: *а* — поперечное сечение; *б* — продольное

На внутренней поверхности цилиндра $r_1 = R_1$ действует периодическая вдоль оси z нагрузка:

$$\frac{1}{2\mu_1}\sigma^{(1)}_{r_1 j} = p_j = э_j \sum_{l=-\infty}^{\infty} p_j^{(l)}(\theta_1) e^{i\gamma l z}, \quad j = r_1,\ \theta_1,\ z, \tag{2.1}$$

где $\frac{2\pi}{\gamma}$ — период действующей нагрузки. Коэффициенты $p_j^{(l)}(\theta_1)$ допускают разложение в ряд Фурье по θ_1:

$$p_j^{(l)}(\theta_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_j^{ln} e^{in\theta_1}. \tag{2.2}$$

Обозначим $u_j^{(k)}$, $\sigma_{ij}^{(k)}$ компоненты смещений $\vec{u}^{(k)}$ и тензора напря-

жений $\sigma^{(k)}$ цилиндра ($k=1$) и среды ($k=2$), $i, j=1, 2, 3$ либо r_k, θ_k, z.

Представим $\vec{u}^{(k)}$ в виде

$$\vec{u}^{(k)}=\operatorname{grad}\Phi_1^{(k)}+\operatorname{rot}(\Phi_2^{(k)}\vec{e}_z)+\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\Phi_3^{(k)}\vec{e}_z).$$

Скалярные потенциалы $\Phi_j^{(k)}$ должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца

$$\Delta\Phi_j^{(k)}+\nu_{kj}^2\Phi_j^{(k)}=0,\ j=1,\ 2,\ 3,\ k=1,\ 2. \tag{2.3}$$

Здесь $\nu_{kj}=\omega/c_j^{(k)}$, $c_1^{(k)}=\sqrt{(\lambda_k+2\mu_k)/\rho_k}$, $c_2^{(k)}=\sqrt{\mu_k/\rho_k}=c_3^{(k)}$.

Условия на контакте внешней среды и цилиндра $r_2=R_2$:

$$\begin{gathered}\sigma_{r_2j}^{(2)}=\sigma_{r_2j}^{(1)},\ j=r_2,\ \theta_2,\ z;\ u_{r_2}^{(2)}=u_{r_2}^{(1)};\\ \omega_2(u_j^{(1)}-u_j^{(2)})=\omega_1\sigma_{r_2j}^{(2)},\ j=\theta_2,\ z,\end{gathered} \tag{2.4}$$

где

$$\omega_1=\begin{cases}1, & \varkappa\neq\infty,\\ 0, & \varkappa=\infty,\end{cases}\qquad \omega_2=\begin{cases}i\omega\varkappa, & \varkappa\neq\infty,\\ 1, & \varkappa=\infty.\end{cases}$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент вязкости сцепления. При $\varkappa=0$ контакт скользкий, касательные усилия отсутствуют; при $\varkappa=\infty$ контакт жесткий, смещения на границе раздела сред совпадают; для конечного $\varkappa$ касательные усилия пропорциональны скорости относительного смещения цилиндра и среды (вязкое трение).

В силу периодичности по z действующих нагрузок решение также будем искать в виде

$$\Phi_j^{(k)}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varphi_{jl}^{(k)}(r_k,\ \theta_k)e^{i\gamma lz},\ j=1,\ 2,\ 3,\ k=1,\ 2, \tag{2.5}$$

где функции $\varphi_{jl}^{(k)}$ должны удовлетворять двухмерным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta_2\varphi_{jl}^{(k)}+(\nu_{kj}^2-\gamma^2l^2)\varphi_{jl}^{(k)}=0. \tag{2.6}$$

Обозначим

$$\alpha_{kj}=\sqrt{\nu_{kj}^2-\gamma^2l^2},\ \operatorname{Re}\alpha_{kj}\geqslant 0,\ \operatorname{Im}\alpha_{kj}\geqslant 0. \tag{2.7}$$

В зависимости от величины α_{kj} следует рассмотреть несколько случаев. Слагаемое типа $\varphi_{jl}^{(k)}\exp(i(\gamma lz-\omega t))$ описывает волны, движущиеся вдоль оси z с фазовой скоростью $c=\omega/\gamma l$. Если $\nu_{jk}>\gamma l$, $c>c_j^{(k)}$, т. е. нагрузка движется со сверхзвуковой скоростью. При $\nu_{jk}<\gamma l$ скорость нагрузки дозвуковая. Случай $c_2^{(k)}<c<c_1^{(k)}$ назовем межзвуковым в k-й среде, а при $c=c_j^{(k)}$ — звуковым.

В дальнейшем все выкладки проведем для фиксированного l. Чтобы не загромождать обозначения, индекс l всюду опускаем.

При $c\neq c_j^{(k)}$ для любых j, k решение задачи можно искать в виде

$$\varphi_j^{(2)}=э_j\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{jn}^{(3)}H_n(\alpha_{2j}r_2)e^{in\theta_2}, \tag{2.8}$$

$$\varphi_j^{(1)}=э_j\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{jn}^{(1)}H_n(\alpha_{1j}r_1)e^{in\theta_1}+a_{jn}^{(2)}J_n(\alpha_{1j}r_2)e^{in\theta_2}. \tag{2.9}$$

Здесь при α_{kj} действительном положительном (сверхзвуковой случай) ряды описывают волны, излучаемые на ∞, при α_{kj} комплексном мнимом — поверхностные волны, экспоненциально затухающие при $r_2\to\infty$ (дозвуковой случай). Потенциалы в упругом цилиндре выражаются через две системы линейно-независимых функций Бесселя. Если $R_1=0$ (сплошной упругий цилиндр), в разложении (2.9) следует оставить только вторую группу слагаемых в силу отсутствия особенностей НДС цилиндра при $r_1=0$. Выбор функций H_n и J_n для разложения поля в цилиндре связан с полнотой системы функций $H_n(\alpha r)e^{in\theta}$, $J_n(\alpha r)e^{in\theta}$ ($n=0,\ \pm1,\ \pm2\ldots$) на классе функций, допускающих разложение в ряд Фурье по θ в кольце $0\leqslant R_1\leqslant r_2\leqslant R_2<\infty$.

При совпадении скорости нагрузки с одной из звуковых скоростей $c_j^{(1)}$ в цилиндре j-й потенциал цилиндра следует искать в виде

$$\varphi_j^{(1)}=э_j\left(a_{j0}^{(1)}\ln r_1+\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{jn}^{(1)}r_1^{-|n|}e^{in\theta_1}+a_{jn}^{(2)}r_2^{|n|}e^{in\theta_2}\right). \tag{2.10}$$

При совпадении скорости нагрузки с j-й звуковой скоростью в среде соответствующий $\varphi_j^{(2)}$ представляется в форме

$$\varphi_j^{(2)}=э_j\left(a_{j0}^{(3)}\ln r_2+\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{jn}^{(3)}r_2^{-|n|}e^{in\theta_2}\right). \tag{2.11}$$

Выбор потенциалов в форме (2.10), (2.11) связан с тем, что в звуковом случае уравнение Гельмгольца для соответствующего