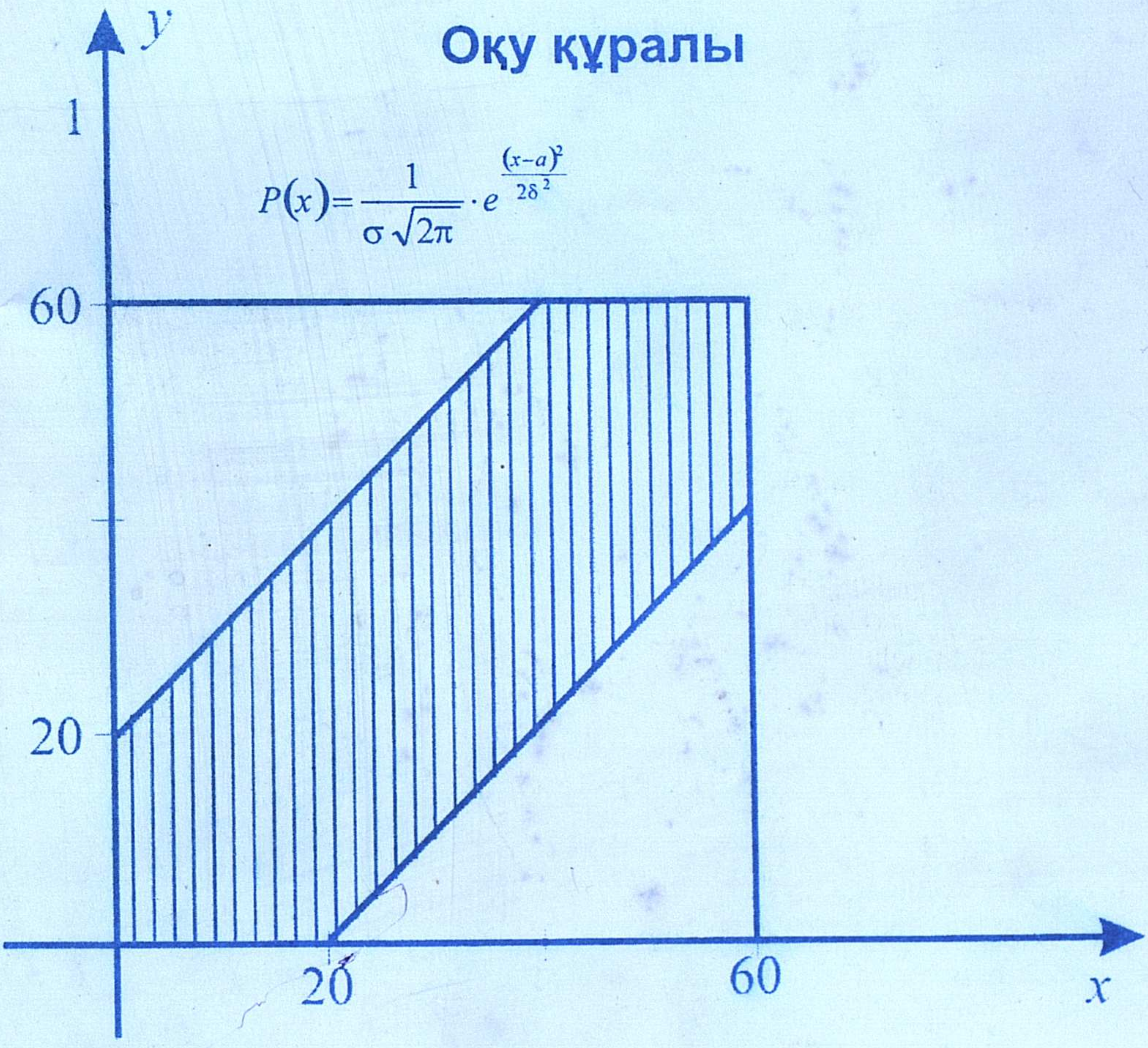
Ш.И. Ильясов

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА

Оқу құралы



ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
С. АМАНЖОЛОВ АТЫНДАҒЫ ШЫҒЫС ҚАЗАҚСТАН МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ

Ш.И. Ильясов

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА

Оқу құралы

Өскемен
С. Аманжолов атындағы ШҚМУ баспасы
2007

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.172
И 46

Баспаға С. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік университетінің Ғылыми кеңесінде 31 қазан 2005 ж. бекітілді (№4 хаттама)

Пікір жазғандар:
техника ғылымдарының кандидаты, профессор В.С. Чернявский,
физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент Г.Х. Мухамадиев

Ильясов Ш.И.

Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика: Оқу құралы. – Өскемен: С. Аманжолов атындағы ШҚМУ баспасы, 2007. – 180 б.

ISBN 9965-727-84-8

Бұл оқу құралында аксиомалық анықтама, классикалық, статистикалық, геометриялық анықтамалары қарастырылып, ықтималдықтар теориясына ғылыми анықтама беріледі.

Үлкен сандар заңы, Чебышев, Бернулли теоремалары, моменттер әдісі, неғұрлым шындыққа ұқсас әдіс, статистикалық болжамдарды статистикалық тексеру, нүктелік және интервалдық бағалаулар ғылыми тұрғыдан жан-жақты зерттелген. Кездейсоқ үрдістер, Марков тізбегі қарастырылған.

Оқу құралы математика, қолданбалы математика, информациялық жүйе, информатика және физика мамандықтарына сәйкестендіріліп жасалған.

$И\,\frac{1602090000}{00\,(05)-07}$

ББК 22.172

ISBN 9965-727-84-8

КІРІСПЕ

1 тарауда ықтималдықтардың теориясы туралы пәнге ғылыми анықтама беріледі. Ықтималдықтың классикалық, статистикалық, геометриялық, аксиомалық анықтамалары қарастырылады. Шартты ықтималдық, ықтималдықтың толық формуласы, Бейес формуласы, Бернулли формуласы, Лапластың локальдық және интегралдық теоремасы, дискретті және үздіксіз кездейсоқ шамалар, математикалық үміт, дисперсия, орта квадраттық ауытқу, бастапқы және орталық моменттер қарастырылады.

2 тарауда үлкен сандар заңы, Чебышев теоремасы, математикалық статистиканың бағалауы, эмпирикалық функция, полигон гистограмма, таңдамалық орта, бас дисперсия, таңдамалық дисперсия, моменттердің әдісі, неғұрлым шындыққа ұқсас әдіс, таңдамалық орта мен дисперсияның көбейту әдісі, корреляция теориясының элементтері, статистикалық жорамалдардың статистикалық тексерілуі қарастырылады.

3 тарауда кездейсоқ үрдістер қарастырылады.

Бұл құралда оқу бағдарламасы бойынша алынған ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистиканың теориялық негізгі ұғымдары, анықтамалары қарастырылып, теоремалары толық дәлелденіп, көрсетілген. Оқу құралы өз бетінше оқуға көмектеседі.

Оқу құралы математика, информатика, қолданбалы математика және физика-информатика мамандықтарына сәйкестендіріліп жасалған.

1 ЫҚТИМАЛ ТЕОРИЯСЫ ТУРАЛЫ МАҒЛҰМАТ

Біз бақылайтын оқиғаларды үш түрге бөлуге болады: ең анық, мүмкін емес және кездейсоқ оқиғалар.

Анықтама. Ең анық оқиға дегеніміз оқиға орындалуы міндетті түрде болуы керек, егер белгілі шарттар жиынтығы S орындалса.

Мысалы, ыдыс ішіндегі су қалыпты атмосферадағы қысымда және 20°С температурада сұйық күйде тұра алады. Бұл ең анық оқиға. Бұл мысалдағы атмосфералық қысым және судың 20°С-ғы температурасы белгілі шарттың құрамын S-ті көрсетеді.

Анықтама. Кездейсоқ оқиға дегеніміз оқиға болуы да, болмауы да мүмкін.

Мысалы, егер бір күміс ақшаны лақтырып жіберсек, онда елтаңба немесе сыртында жазуы бар беті түсуі мүмкін.

Анықтама. Мүмкін емес оқиға деп оқиға орындалуы мүмкін емес, егер белгілі шарттар жиынтығы S орындалса.

Мысалы, ыдыстағы су қатты түрде сақталады.

Егер біз біртектес кездейсоқ оқиғаны қарастырсақ, онда берілген шарттың жиынтығы жиынтығы S орындалса, онда біртапай біртектес оқиғалар олардың шыққан тектеріне байланысты емес белгілі заңдылыққа бағынады.

Анықтама. Біртектес топтасқан, кез келген оқиғалардың ықтималдық заңдылықтарын зерттейтін ғылымды *ықтимал пәнінің теориясы* дейді.

а) Кездейсоқ оқиғалардың түрлері

1-мысал. Жәшікте түсті шарлар бар. Шарды жәшіктен алу сыналу деп аталады. Бір түсті шардың пайда болуын оқиға деп атаймыз. Бір сынақтан қосарлас екі заттың біреуінің пайда болуы, екіншісінің пайда болуына кедергі жасайтын болса, онда мұндай оқиғаны үйлесімсіз оқиға деп атаймыз.

Кездейсоқ оқиғалар үйлесімді, үйлесімсіз, жалғаз ғана мүмкіндікті және тең мүмкіндікті болып, бөлінеді. Егер тәжірибе нәтижесінде бір оқиғаның пайда болуы қалған оқиғалардың пайда болуына кедергі жасамаса, онда мұндай оқиғаларды үйлесімді оқиғаларды деп атайды.

2-мысал. Жәшікте бірнеше зауыттарда жасалған тек жоғары сортты бөлшектер бар. Таңдамай, қалай болса, солай алынған бөлшектің:

– жоғарғы сортты болуы;

– белгілі зауытта болуы үйлесімді оқиғалар.

Егер тәжірибе нәтижесінде пайда болған оқиға ең анық оқиға болса, онда ол жалғаз ғана мүмкіндікті оқиға деп аталады.

Егер оқиғалардың пайда болу мүмкіндіктері бірдей деп есептелінсе, онда мұндай оқиғалар тең мүмкіндікті оқиғалар деп аталады.

Мысалы, ойын сүйегін лақтырғанда 1-ден 6-ға дейінгі кез келген ұпайдың пайда болуы тең мүмкіндікті оқиға деп аталады. Себебі ойын сүйегі біртекті материалдан жасалған. Цифрлар саны оның әрбір жағының салмағына әсер етпейтін дұрыс көпбұрыш деп есептелінеді.

Мысалы, деталі бар жәшіктен стандартты детальдің шығуы стандартсыз детальға үйлеспейді немесе күміс ақшаны лақтырғанда Е және Ж шығуы тең мүмкіндікті оқиға.

б) Ықтималдықтар теориясының қолданылуы

Ықтимал теориясының әдістерін беріктілік теориясында, теориялық физикада, геодезияда, астрономияда, атыс теориясында, автоматты басқару теориясында, жалпы байланыс теориясында қолданады. Ықтималдықтар теориясы – математиканың қолданбалы және статистикалық негіздерін дәлелдеу үшін қолданылатын ғылым. Оны өндірісті жоспарлау және ұйымдастыру үшін, технологиялық процестерді бақылау үшін, өнімнің сапасын тексеру үшін, ескерту және қабылдауда қолданады. Ықтималдықтар теориясының дамуына байланысты оның техникада, химияда, экономикада қолданылуы былай тұрсын, тіпті медицинада, лингвистикада, ауыл шаруашылығы ғылымында қолдану мүмкіндігі өсіп келеді. Жалпы алғашында ықтималдықтар теориясы әдісін пайдаланған ғылым саласы жоқ деп айтуға болмайды. Соңғы жылдары ықтималдықтар теориясы әдісі әр түрлі ғылым және техника саласында қолданылып, оны жаңа жолға салды.

Тарихи мәлімдеме.

Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарын XVI-XVII ғғ. Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма, тағы басқа оқымыстылар салды. Онан кейін ықтимал теориясын дамытуда Якова-Бернулли (1654-1705) көп еңбек етті. Оның «Үлкен сандар заңдылығы» деген теоремасы осы уақытқа дейінгі жиналған фактілердің теориялық дәлелдеме негіздері болды. Ықтималдықтар теориясына Пуассон және тағы басқа оқымыстылар еңбек сіңірді. Орыстың ұлы ғалымы П.Л. Чебышев (1821-1894) және оның оқушылары А.А. Марков (1856-1922) пен А.М. Ляпунов (1857-1918) ықтималдықтар теориясын дамытуға көп еңбек сіңірді. Олардан кейін, Совет математигі С.Н. Бернштейн, В.И. Романовский, А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, Б.Г. Гнеденко, Н.В. Смирнов ықтималдықтар теориясын тұрақты математикалық ғылым саласына көтерді.

1.1 Ықтималдықтың классикалық анықтамасы

Анықтама. А оқиғасының қолайлы жағдай туғызатын m санының олардың тең мүмкіндікті үйлесімсіз элементарлық оқиғалары өзара толық топ жасайтын барлық нәтиже n санына қатынасын А оқиғасының ықтималы деп айтады. Сондықтан А оқиғасының ықтималдығы мына формуламен анықталады:

$$P(A)=\frac{m}{n} \qquad (1.1).$$

Мысалы, жәшікте мұқият ауыстырылып салынған алты шар бар. Оның екеуі қызыл, үшеуі көк және біреуі ақ. Қызыл және көк шарларды белгілі шартпен түсті шарлар деп атаймыз. Түсті шарлардың пайда болу оқиғасы А-ны көрсетеді. Сынаққа түскен әрбір мүмкіншілік жағдайдың нәтижесін (шардың жәшіктен алынуын) элементарлық нәтиже, не элементарлық оқиға деп атаймыз. Элементарлық оқиғаны $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ және т.б. деп белгілейді.

Біздің мысалда n=6 элементарлық оқиға бар: ω_1 – ақ шардың пайда болуы; ω_2, ω_3 – қызыл шардың пайда болуы; $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ – көк шардың пайда болуы.

Бұлардың қосарланып алынған екеуі үйлесімсіз оқиға болады да, олардың нәтижесі толық топ құра алады. Міндетті түрде бір шар пайда болады және олар тең мүмкіндікті. Біртектес шарлардың шығуы сәтті және бір-бірімен мұқият ауыстырылып салынған. Элементарлық нәтиже бойынша бізге керекті оқиғаның пайда болу қасиетін А оқиғасының қолайлы жағдайлары деп атайды. Біздің мысалда түсті шарлардың пайда болу нәтижесі $m=5$. ω_2,ω_3, $\omega_4,\omega_5,\omega_6$ – түсті шарлар; $n=6$; $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{5}{6}$.

а) Геометриялық ықтималдық

l кесіндісі үлкен L кесіндісінің бөлігі $e \subset l$ болсын. Үлкен L кесіндісіне ыңғайланып нүкте қойылған. Ол нүктенің кіші e кесіндісіне түсу ықтималдығы e кесіндісінің ұзындығына пропорционал болады да, үлкен L кесіндісінің орналасуына байланысты болмайды. Сондықтан нүктенің l кесіндісіне түсу ықтималдығы мына формуламен анықталады: $P=\frac{e}{L}$.

Сол секілді $P=\frac{s}{S}$, $P=\frac{\upsilon}{V}$.

Ықтималдықтың қасиеттері

– ең анық оқиғаның ықтималдығы 1-ге тең. Шынында егер оқиға ең анық оқиға болса, онда сынаққа түскен әрбір элементарлық нәтиже оқиғаға қолайлы жағдай туғызады. Сондықтан $m=n$, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$;

– мүмкін емес оқиғаның ықтималдығы нөлге тең. Егер оқиға мүмкін емес болса, онда сынаққа түскен әрбір элементарлық нәтиже оқиғаға қолайлы жағдай тудырмайды, сондықтан $m=0$ болса, онда $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$;

– кездейсоқ оқиғаның ықтималдығы 0 мен 1-дің аралығындағы оң сан болады. Егер кездейсоқ оқиға қолайлы жағдайда болса, онда ол барлық нәтижеге түсетін нәтиженің белгілі бір бөлігін ғана тудыра алады. Сондықтан $0<m<n \Rightarrow 0<\frac{m}{n}<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < P(A) < 1$. Кездейсоқ оқиға мынадай теңсіздікті қанағаттандырады: $0 \le P(A) \le 1$.

1.2 Комбинаториканың негізгі формулалары

Комбинаторика – математиканың тарауының бірі. Мұнда элементтер жиынының әр түрлі комбинациялары қарастырылып, олардың сандары есептелінеді. Комбинаториканың негізгі бөлімі қосылыстар болып табылады. Ол ықтималдықты есептеу үшін керек.

Анықтама. Бірнеше нәрседен құралған топтардың бір-бірінен айырмашылығы не нәрселердің алынуы ретінде, не сол нәрселердің өзінде болып келсе, онда мұндай топтарды жалпы алғанда *қосылыстар* деп атайды. Қосылыстарды құрайтын нәрселер *элементтер* деп аталады. Оны $a, b, c, \ldots$ деп белгілейді.

Қосылыстар үш түрге бөлінеді:

– орналастыру;

– алмастыру;

– теру.

Анықтама. n элементтің әрқайсысы m-нен жасалған орналастыру деп әрқайсысында сол n элементтің m-сі болып келетін және бір-бірінен өзгешелігі не элементінде, не элементтерінің ретінде болатын қосылыстарды айтады.

A_n^m – n элементтен m жасалған орналастыру:

$$A_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(m-1)] \cdot (n-m) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-m)};$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot [n-(m-1)] \cdot (n-m) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n;$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

1-мысал. 10 адамнан 3 адамды неше тәсілмен орналастыруға болады:

$$A_{10}^3 = 10 * 9 * 8 = 720; \qquad A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = \frac{\cancel{7!} * 8 * 9 * 10}{\cancel{7!}} = 720.$$

2-мысал. Бір сыныпта 9 түрлі пән оқылады. Күніне 5 түрлі сабақ болады. Күнделікті сабақты неше тәсілмен реттеп қоюға болады.

$$A_9^5 = \frac{9!}{4!} = \frac{4!*5*6*7*8*9}{4!} = 15120.$$

Анықтама. n элементтен жасалған орналастырудың әрқайсысында n элементтен болып келсе, бір-бірінен өзгешелігі тек элементтерінде болса, ондай орналастыруды *алмастыру* деп атаймыз. Ол мына формуламен өрнектеледі:

$$P_n = A_n^n = 1\cdot 2\cdot 3...(n-1)\cdot n = n! \qquad (1.2).$$

Анықтама: n элементтің m-нен жасалған орналастырудың ішінен бір-бірінен өзгешелігі ең болмағанда бір элементінде болатынды таңдап алсақ, одан шығатын қосылысты *теру* деп атайды. Сөйтіп n элементтің әрқайсысы m-нен жасалған орналастырулардың барлық саны n элементтің, m-нен жасалған терулердің барлық саны m элементтен жасалған алмастырудың барлық санын көбейткенге тең болады. C_n^m – теру белгісі.

$$A_n^m = C_n^m * P_m \Rightarrow C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{P_n}{P_m * P_{n-m}} \qquad (1.3)$$

$m = n - m;$

$$C_n^m = \frac{P_n}{P_m * P_{n-m}}; \qquad (1.4)$$

$C_n^m = C_n^{n-m}$, егер $m > \frac{n}{2}$;

Стирлинг формуласы: $n! \approx \sqrt{2\pi n} * n^n * e^{-n}$ (1.5)

а) Қайталанбалы қосылыстар

Анықтама. Берілген әр түрлі n-элементтен m бойынша қайталанбалы орналастыру деп белгілі бір ретпен жазылған n элементтен тұратын қосылыстарды айтады. Мұнда әрбір элемент комбинацияға бірнеше рет кіруі мүмкін, қайталанбалы орналастырудың жалпы саны мына формуламен анықталады:

$\tilde{A}_n^m = m \cdot ... \cdot m = n^m.$

1-мысал. 4 және 5 цифрларының көмегімен үш орынды қанша сан жазуға болады? Іздеп отырған комбинацияны бірден жазуға болады.

Шешуі: $A_2^3 = 2^3 = 8$; 444, 445, 454, 544, 554, 555, 545, 544.

Айталық n элемент берілген. Осы элементтерді n топтарға бөлейік. Әрбір топтағы элементтер өзара бірдей. Ал әр түрлі топтағы элементтер санына сәйкес $m_1, m_2, m_3, ..., m_k$ арқылы белгілейік: $m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_k = n$.

Анықтама. n элементтен m элемент бойынша қайталанатын алмастыру деп n элементтен тұратын комбинацияларды айтады. Мұнда екі жағдай болуы мүмкін:

1) $k = n$. Яғни, барлық элементтері әр түрлі болса, онда мына формуламен жазылады: $P_n = n!$;

2) $k < n$, $P_{m_1, m_2, ..., m_k} = \dfrac{n!}{m_1! * m_2! * ... * m_k!}$.

n элемент бойынша қайталанбалы терулер деп бір-бірінен құрамы бойынша ажыратылатын комбинацияны айтады: $\widetilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

б) Ньютон биномы:

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^{n-m} y^m = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + ... +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!}x^2 y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n;$$

мұнда:

$$C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!0!} = 1, \qquad C_n^m = \frac{n!}{(n!-n!)n!} = \frac{1}{0!} = 1. \qquad 0! = 1, \quad 1! = 1$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n; \qquad C_n^{n-1} = \frac{n!}{[n-n+1]!(n-1)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n;$$

$$C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2!};$$

$$C_n^{n-2} = \frac{n!}{(n-n+2)!(n-2)!} = \frac{(n-2)!(n-1)n}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2!};$$

Егер $m > n$, онда $C_n^m = 0$. Мұнда Ньютон биномының симметриялық коэффициенті өзара тең болады: $0! = 1$, $1! = 1$.

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \qquad C_n^1 = C_n^{n-1} = n, \qquad C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!}, \text{ т.б.}$$

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2) $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$, бұл формула Ньютон биномының формуласына $x = y = 1$ мәнін қойсақ шығады.

1-мысал. $1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$; $n = 5$;

2-мысал. $1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6$; $n = 6$;

3) $\sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} C_n^m = 0$. Ньютон биномындағы формулаға $x = -1$, $y = 1$-ді қойсақ осы мәнді аламыз. Онда $1-6+15-20+15-6+1 = 0$;

4) $\sum_{m=0}^{n} C_n^m * m = n * 2^{n-1}$;

$n = 5$ үшін $0*1+1*5+2*10+3*10+4*5+5*1 = 80 = 5*16 = 5*2^4$;

$n = 6$ үшін $0*1+1*6+2*15+3*20+4*25+5*6+6*1 = 192 = 6*32 = 6*2^5$;

5) $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

Теңдік мынадай пікірден шығады: n элементті жиынның кейбір х элементін жазып қоямыз. m элементті жиынның соңғы жиынының бөлігінің бәрі (олардың саны теңдіктің сол жағы) қиылыспайтын кластарға бөлінеді. х элементін ұстайтын немесе ұстамайтын екі бөліктерге бөледі. 1-ші класта C_{n-1}^{m-1} жиын бөліктері. Олар х-ті $(n-1)$ элементтердің қалғандарынан $(m-1)$ элементтерді ұстайды. 2-ші класта C_{n-1}^m $y=1$ элементтердің m-нен жасалған теруі болуы айқын;

6) Коши тепе-теңдігі:

$$C_{n+k}^{m}=\sum_{m=0}^{n} C_n^1 * C_k^{m-1}$$

$$C_{10}^4=C_{7+3}^4=C_7^0*C_3^4+C_7^1*C_3^3+C_7^2*C_3^2+C_7^3*C_3^1+C_7^4*C_3^0=$$
$$=7*1+21*3+35*5+35*1=210.$$

$$C_7^0=\frac{7!}{(7-0)!}=\frac{7!}{7!}=1,\quad C_3^4=\frac{3*2*1*0}{1*2*3*4}=0,\quad m=4, n=3,\quad 4>3.$$

1-мысал. Жәшікте 4 ақ және 3 қара шар бар. Жәшіктен 1 шар алынды да, ол үстелдің тартпасындағы жәшікке салынды. Онан кейін жәшіктен екінші шар алынды. Екінші рет алынған шардың ақ болғандағы А оқиғасының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі: Алдын-ала алынған белгісіз шардың әсері екінші рет алынған шардың ықтималдығынан ақ шар шығуына кедергі болмайды: $P(A)=\frac{4}{7}$.

Енді мынадай тәжірибе жасаймыз. Жәшікте 4 ақ және 3 қара шар бар. Біз жәшікті аламыз да, қарамай 2 шарды терезеге қоямыз, 1 шарды диванға қоямыз, 2 шарды шкафқа саламыз, ал қалған 2 шарды еденге шашып жібереміз. Сонан кейін үйдің еденінде жүріп, 1 шарды аламыз. Бұл шардың ақ болуының ықтималдығы қандай?

Шешуі: $P(A)=\frac{4}{7}$.

1.3 Комбинаториканың ықтималдықтар теориясында және теориялық физикада қолданылуы

1-ден N-ге дейін нөмірленген n жәшіктер бар. Жәшіктерге n шарларды кез келген амалмен орналастырамыз. Мұнда $n<N$. 1-ден n-ге дейінгі жәшіктердің әрбіреуінде бір шар болатын ықтималдықты табамыз.

Бұл ықтималдық 2 жағдайға байланысты:

1) шарлар ажыратылған ба?

2) шығару принципі – негізгі ерекшеліктеріне байланысты бірлеспейтіндік орын алмаса, онда N^n тәсілдердің орналас-

тырулары n шарлардың N жәшіктерге $n!$ тәсілдермен, олардың нөмірлерін бір-бірлеп орналастырады. Осындай жағдайлардан ықтималдықты анықтайды

$$P(E)=\frac{n!}{N^n} \tag{1.3.1}$$

Егер шарлар ажыратылатын болса, бірлеспейтіндік орын алса, онда: 1-ші N, 2-ші N-1, і-ші шар (N - і+1) жәшікке орналастырылады. Сонда n шарлардың N жәшіктерге орналастыру саны:

$$A_N^n = N(N-1)...(N-i+1)$$

Бұл шарларды $n!$ тәсілдермен $1,2,...,n$-ге дейін нөмірлермен жәшіктерге орналастыруы мүмкін және ізделініп отырған ықтималдық мынаған тең:

$$P(E)=\frac{n!}{A_N^n}\approx\frac{n!}{C_N^n * n!}=\frac{1}{C_N^n} \tag{1.3.2}$$

$$A_N^n = C_N^n * P_n = C_N^n * n!$$

Егер шарлар ажыратылмай, бірлеспейтіндіктен орындалмайтын болса, онда теріс емес бүтін сан болатын теңдеуді шешу арқылы есептеуге келтіреді:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = n,$$

мұнда x_i – жәшіктегі шарлардың саны. Ол N элементтен n-нен кіші элемент жасалған қайталанбалы теруі:

$C_N^n = C_{N+n-1}^n;$

$x_1 = x_2 = ... = x_n = 1; \qquad x_{n+1} = 0,...,x_N = 0.$

Ондай жағдайда i – ізделініп отырған ықтималдық:

$$P(E)=\frac{1}{C_{N+n-1}^n}=\frac{\frac{1}{(N+n-1)!}}{(N+n-1-n)!n!}=\frac{(N-1)!n!}{(N+n-1)!} \tag{1.3.3}$$

Статистикалық физика n бөліктерден тұратын кейбір жиындарды қарастырады: протондар, нейтрондар, фотондар болуы мүмкін. Бұл энергетикалық деңгей деп аталады. Ол жүйенің n бөліктерінің макроскопиялық күйі вектормен белгіленеді:

$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n),$

мұнда x_i – i күйдегі тұрған кішкентай бөліктердің саны. Р – ықтималдық. Макроскопиялық бөлігінің кейбір кішкентай бөліктері бір күйде тұруы мүмкін емес. Егер кішкентай бөліктердің өзгешеліктері болса және негізгі ерекшеліктерінде бірлеспейтіндік орындалмаса, онда ықтималдық (1.3.1) формуламен беріледі де, кішкентай бөліктер Максвелл-Больцманның класссикалық ықтималдығына бағынады дейді.

Келесі жағдай: n ерекшеліктер жоқ болса және негізгі ерекшеліктерінде бірлеспейтіндік орындалмаса, онда ықтималдық (1.3.3) формуласымен беріледі. Онда кішкене бөліктер Бозе-Эйнштейннің статистикасына бағынады дейді. Егер кішкентай бөліктерде өзгешеліктер жоқ болса және негізгі ерекшеліктерінде бірлеспейтіндік орын алса, онда Р(Е) ықтималдық (1.3.2) формуласымен беріледі де, Ферми-Дирактың статистикасына бағынады дейді. өте жоғары температурада n күйлердің саны өте үлкен сан болғанда әр түрлі макроскопиялық күйлер тең мүмкіндікте болады да, Ферми-Дирактың және Бозе-Эйнштейннің статистикалары Максвелл-Больцманның статистикасымен бірігіп кетеді. (1.3.2) формуласымен өрнектелетін кішкентай бөлшектерге протондар, нейтрондар, электрондар кіреді.

1.4 Ықтималдықтың статистикалық анықтамасы. Салыстырмалы жиілік

1-анықтама. Салыстырмалы жиілік деп $W(A)=\dfrac{m}{n}$ (1.4) жасалған тәжірибеде А оқиғасының пайда болатын m санының жүргізілген тәжірибенің n барлық санына қатынасын айтады.

2-анықтама. Салыстырмалы жиілік кейде статистикалық ықтималдық деп те аталады.

1-мысал. 100 рет оқ атылғанда, нысанаға 11 рет тигені байқалды. Нысанаға оқтың тию салыстырмалығы қандай?

$$W(A)=\frac{11}{100}=0{,}11.$$

2-мысал. Техниканың сапасын тексеретін бөлім кездейсоқ алынған 80 детальдің 3 деталінің стандарт емес екендігінің статистикалық ықтималдығын табыңыз.

Шешуі: $\begin{cases} m=3 \\ n=80 \end{cases} \Rightarrow W(A)=\dfrac{3}{80}.$

Ықтималдықтың классикалық және статистикалық анықтамаларын салыстыра отырып, мынадай қорытындыға келуге болады: ықтималдықтың классикалық анықтамасы тәжірибеден міндетті түрде ең анық орындалуын қажет етпейді. Ал салыстырмалы жиіліктің анықтамасы міндетті түрде ең анық орындалатынын көрсетеді. Басқа сөзбен айтқанда, ықтималдықты классикалық тәжірибеге түскенге дейін, ал салыстырмалы жиілікті тәжірибеден соң есептеп шығарады. Шарттары бірдей тәжірибе жасаудан олардың әрбір байқауға түскен саны неғұрлым көп болса, онда ұзақ байқаудың нәтижесінде салыстырмалы жиіліктің белгілі бір тұрақтылық қасиеті болатыны байқалады. Ол қасиет, егер тәжірибеге түскен байқаудың саны көп болғанда, салыстырмалы жілік көп өзгеріске ұшырайды да, белгілі бір тұрақты санның арасында болады. Ол тұрақты санды оқиғаның пайда болу ықтималдығы деп атайды. Егер тәжірибе арқылы салыстырмалы жиілік анықталса,онда ол ықтималдықтың жуық шамасын көрсетеді: $P(A) \approx W(A)$.

Тәжірибенің қорытындысын қарапайым оқиғаның жиынтығы етіп көрсете алмайтындығын жиі кездестіруге болады және қарапайм оқиғаның тең мүмкіндік жасау мүмкіндігі тіпті болмай қалады. Мұның барлығы классикалық ықтималдықтың ең осал жағын анықтайды. Тең мүмкіндік оқиғаның тәжірибеге түсуінің нәтижесі ретінде болса, ол симметриялық ойлаудан туады. Мысалы, ойнайтын асықтар дұрыс көпжақты болуы және біртестес материалдан жасалуы керек. Бірақ өмірде кездесетін жағдайлар симметриялық ойлауды қажет етпейді.Сол себепті классикалық анықтамамен қоса, статистикалық анықтама (сандық анықтама) қолданылады.

Оқиғаның статистикалық анықтамасы дегеніміз – салыстырмалы жиілік не оған жоқ санды айтады. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы тәжірибеге түскен қарапайым нәтижелердің саны шекті екенін көрсетеді. Ал өмірде кездесетін жағдайлар шексіз санмен өрнектеледі. Мұндай жағдай классикалық анықтаманы қолданудың шектелуін көрсетеді. Сол себепті аксиомалық анықтаманы қолданудың нәтижесінде көрсетілген кемшіліктерді жоюға болады.

Анықтама. Стохастикалық эксперимент – тәжірибе нәтижесін алдын ала жорамалдауға болмайтын ғылыми тәжірибе.

Есеп. 7 қабатты үйдің 1-ші қабатындағы лифтке 3 адам кірді. Олардың әрқайсысы тең ықтималдықпен екінші қабаттан бастап шығуына болады. Төмендегі оқиғалардың ықтималдықтарын табыңыз:

а) барлық адамдар төртінші қабаттан шыға алады;

б) барлық адамдар бір уақытта бір қабатқа ғана шыға алады;

с) барлық адамдар әр түрлі қабатқа шыға алады.

$N=(7-1)=6, \quad n=3$

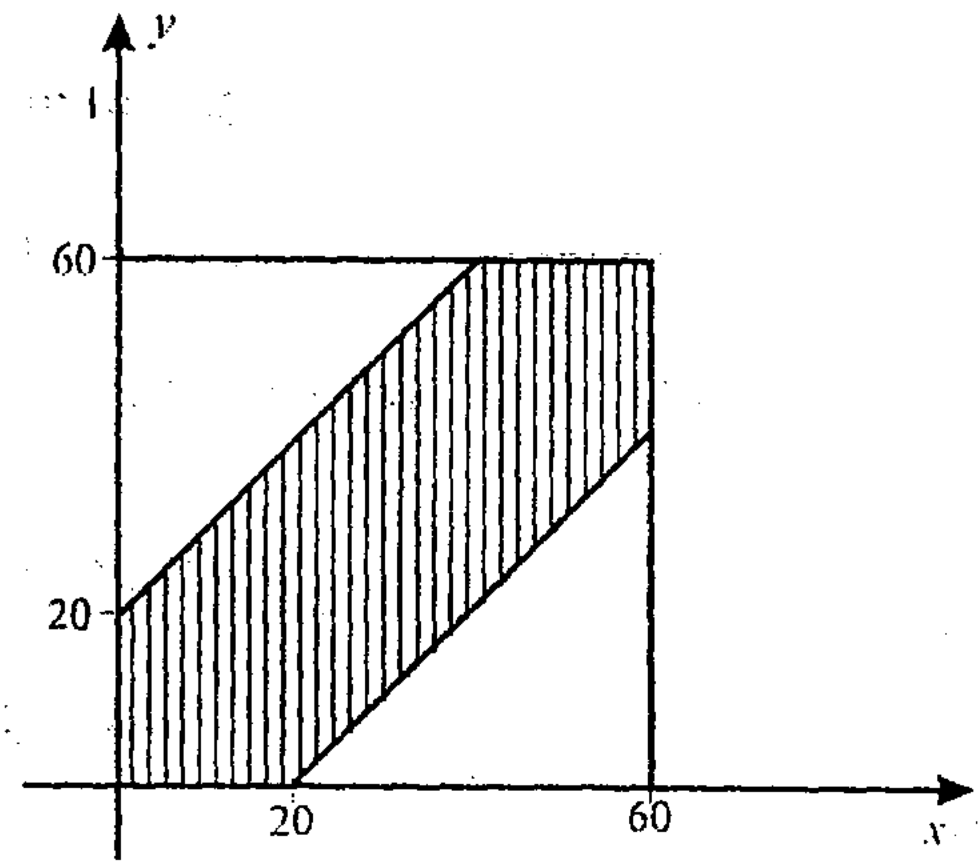
а) $P(E)=\frac{1}{N^n}=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216};$

б) $P(E)=\frac{A_N^1}{N^3}=\frac{A_6^1}{6^3}=\frac{6}{6\cdot 6^2}=\frac{1}{36};$

с) $P(E)=\frac{A_N^n}{N^3}=\frac{A_6^3}{6^3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6\cdot 4\cdot 9}=\frac{5}{9}.$

1-есеп. Екі адам он екі сағат пен он үш сағат арасында белгіленген жерде кездесті. Бұрын келген адам екінші адамды жиырма минут тосады. Келген адамдардың бір сағатта кездесуі сәтті және келсім уақыттары тәуелсіз болатын A және B адамдардың кездесу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. A адамның келу уақыты x-пен, B адамның келу уақытын y-пен белгілейді де, оны мынадай теңсіздікті қанағаттандыратын болсын: $|x-y|\le 20$



$$P(A)=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{10^2(6^2-4^2)}{10^2*6^2}=\frac{(6+4)(6-4)}{2^2*3^2}=\frac{10*2}{2^2*3^2}=\frac{5}{9}.$$

2-есеп. Екі ойнайтын асық лақтырылған. Кем дегенде бір қырында алты саны бар түскен ұпайлардың қосындысы жұп сан болатын ықтималдықты табыңыз.

Шешуі: $n=6*6=6^2=36$

$m=5$ (6,2);(6,4);(4,6);(6,6);(2,6)

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{5}{36}$$

3-есеп. Екі таңбалы сан ойланған. Ойланған сандардың екі таңбалы болатындығының ықтималдығын табыңыз.

а) кездейсоқ аталған цифр екі таңбалы цифр;

б) кездейсоқ аталған цифрлар әр түрлі екі таңбалы цифр.

Шешуі:

1) $n_1=99-9=90$ $\quad$ $а)\ P(A)=\frac{m}{n_1}=\frac{1}{90};$

2) $9+9=18$

3) $99-18=81=n_2$ $\quad$ $б)\ P(B)=\frac{m}{n_2}=\frac{1}{81}.$

4-есеп. Екі ойнайтын асықтар лақтырылды. Төмендегі оқиғалардың ықтималдығын табыңыз.

а) түскен ұпайлардың қосындысы 8-ге тең, ал айырмасы 4-

ке тең;

б) егер түсетін ұпайлардың айырмасы 4-ке тең болғанда, олардың қосындысы 8-ге тең;

в) түскен ұпайлардың қосындысы 5-ке тең, ал көбейтіндісі 4-ке тең.

г) түскен ұпайлардың қосындысы 7-ге тең.

Шешуі:

а) $P(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$; $m=6*6=36;$; $n=2$; (6,2); (2,6)

б) $n=4;$ $m=2;$ $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};$ (2,6);(6,2);(5,1);(1,5)

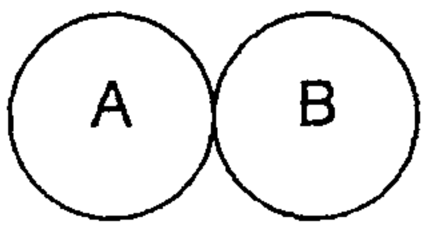
в) $\left.\begin{array}{l} n=6*6=36; \\ m=2; \\ (4,1);(1,4) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18};$

г) $\left.\begin{array}{l} (6,1) \\ (5,2) \\ (4,3) \\ (3,4) \\ (2,5) \\ (1,6) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$

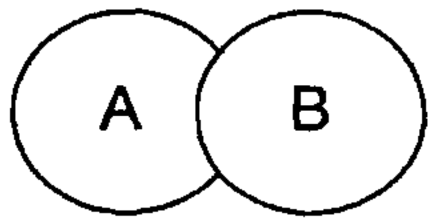
1.5 Жиын туралы түсінік

1-анықтама. Қандай да бір белгілері бойынша біріктірілген заттар жиынтығын жиын деп айтамыз.

2-анықтама. Екі оқиғаның А және В қосындысы дегеніміз – $(A+B=A\bigcup B)$ А және В оқиғаларының бірігуі. "$\bigcup$" – логикалық қосынды деп аталады. $\{x\in A, не\ x\in B\}$



3-анықтама. А және В жиындарының көбейтіндісі деп элементтері А және В оқиғаларына ортақ элементтерден тұратын оқиғаны айтады. $AB=A\bigcap B=\{x\in A$ және $x\in B\}$



4-анықтама. А және В оқиғаларының айырмасы $A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\}$ А оқиғасының элементтерінен тұрады да, В оқиғасының элементтері кірмейді.

$A \subset \Omega$ – А оқиғасы Ω кеңістігінің бөлігі. Бұны кездейсоқ оқиға деп атаймыз. Кездейсоқ оқиғаны $A, B, C, D, \ldots$, т.б. деп белгілейміз.

Ω – элементтарлық кеңістігі *ең анық оқиға* деп аталады.

$\emptyset = \{0\} = \{0 \ldots 0\}$ – нөлдік элементтерден құрылған жиын *құр жиын* деп аталады. Құр жиынды мүмкін емес оқиға деп атаймыз. $\emptyset \subset A \subset \Omega$; $\subset, \subseteq$ – кірістіру қатынастары.

Кірістіру қатынастарының қасиеттері:

– $A \subset A$ – рефлексивті қатынас;

– $\{(A \subset B \cap B \subset A)\} \Rightarrow A = B$ – симметриялы қарама-қарсы қатынас;

– $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$ – транзитивтік қатынас.

Жиындардың операциялары:

1) Бірігудің орын ауыстыру заңы: $A \cup B = B \cup A$;

2) Қиылысудың орын ауыстыру заңы: $A \cap B = B \cap A$;

3) Бірігудің теру заңы: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

4) Қиылысудың теру заңы: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

5) Қиылысумен салыстырғандағы бірігудің үлестіру заңы: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

6) Бірігумен салыстырғанда қиылысудың үлестіру заңы: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

7) $A \cap A = A$;

8) $A \cup A = A$;

9) $A \cup (A \cap B) = A$;

10) $A \cap (A \cup B) = A$;

11) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ Де Морган заңы;

12) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

13) $A \cup \overline{A} = \cup = \cup = \Omega$;

14) $A \cap \overline{A} = \varnothing = V$;

15) $A \cup \varnothing = A$;

16) $A \cap \varnothing = \varnothing = V$;

17) $A \cup \Omega = \Omega = U$;

18) $A \cap \Omega = A$;

19) $\overline{\varnothing} = \Omega = U$;

20) $\overline{\overline{A}} = A$;

21) $\overline{\Omega} = \varnothing$.

Жиын бірігу, қиылысу, жеке (универсалды), әр жақты жиынға толықтырылған, екі жиынның айырмасын көрсететін амалдармен анықталады. Осы операциялардың негізгі қасиетін түгендеп шығайық:

$U = \Omega$ – әр жақты жиын. А, В, С – оның бөліктері;

$\varnothing$ – құр жиын;

1-10, 15-18 – теңдіктері бірігу мен қиылысу операцияларына байланысты;

1-14, 19-21 – теңдіктері толықтауыш операцияларына қатысты.

Универсалды жиын.

Қайсыбір Ω жиыны берілсін. Барлық мүмкіндіктегі Ω жиынының барлық бөліктерін қарастырамыз. Мұнда Ω жиыны әр жақты жиынға жатады.

$$\Omega : \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{\varnothing\}$$

Жиынның қуаты туралы түсінік.

1-анықтама. Егер жиынның элементтерінің саны белгілі санмен өрнектелетін болса, онда жиын *шекті жиын* деп аталады. Ол сан белгілі не белгісіз болуы мүмкін. Ол санның негізінде барлығы маңызды. Шексіз жиындар жиі кездеседі.

1-мысал. Q – барлық рационал сандар жиыны.

2-мысал. А мен В шекті жиындар беріліп, белгілі бір ереже бойынша $a \in A$ элементіне тек қана жалғыз $b \in B$ сәйкестендіріп, $b \in B$ элементіне тек қана $!a \in A$ элементіне сәйкестендірілсе, онда А мен В жиындары арасында өзара бірмәнді сәйкестік орындалады да, А мен В жиындары *эквивалент жиын* деп аталады. Белгіленуі: А~В.

Анықтама. Эквивалент жиындардың қуаттары бірдей болады.

1.6 Ықтималдықтың аксиомалары

Ω – $\forall$ қарапайым оқиғалардың жиынтығы. F – белгілі кездейсоқ оқиғалардың жүйесі. F – оқиғалар жүйесі оқиғалардың алгебрасы бола алады, егер мынадай шарт орындалса:

1) $\Omega \in$ F;

2) $A \in F, B \in F, AB \in F, (A+B) \in F, (A \setminus B) \in F$.

1-2 шарттардан $\varnothing = \Omega \setminus \Omega \in F$ – жүйенің ең кіші бөлігі алгебраны жасайды, $F = \{\varnothing; \Omega\}$.

$A_n \in F, n = 1,2,3,..., \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in F, \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in F,$ онда F алгебрасы оқиғаның σ сигма алгебрасы деп аталады.

Анықтама. F жүйесінде анықталған Р(А) сандар функциясы А оқиғасының *ықтималдығы* деп аталады, егер төмендегідей аксиомаларды қанағаттандыратын болса:

$\forall A \in F$, онда $P(A) \geq 0$;

F жүйесі оқиғаладың алгебрасы;

$P(\Omega) = 1$ (ең анық оқиға);

егер А және В оқиғалары үйлесімсіз оқиғалар болса, онда $A * B = \varnothing$, $P(A+B) = P(A) + P(B)$ аддитивтік заң орындалады;

$\forall$ кемімелі оқиғалардың $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$ (1) тізбектері F-тан шықса, онда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ (2) болады да, мынадай теңдікті қанағаттандырады:

$\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = 0$, F жүйесі δ алгебрасы болса және Р жоғарыдағы аксиомаларды қанағаттандыратын болса, онда (Ω, F, P) –

ықтималдықтар кеңістігі деп аталады.

Аксиома салдары;

1) $A+\overline{A}=\Omega$ және 3, 4-ші аксиомаларды қолданып, мынаны аламыз:

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A).\ P(\varnothing)=1-P(\Omega) \Rightarrow P(\varnothing)=1-1=0.$$

Егер $A_1, A_2, ..., A_n$ бір-бірімен қосарланып үйлесімсіз болса, яғни $A_i A_j = 0, i \neq j$.

$$(i,j=\overline{1,n}) \quad P(A_1+...+A_n)=P(A_1)+...+P(A_n).$$

Дәлелденуі. Матеметикалық индукциямен дәлелденеді.

$$n=2: P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2), \quad A_1=\varnothing, A_2=\varnothing, A_1A_2=0$$

$$A_1+A_2+...+A_{n-1}=S_{n-1}$$

$$P(A_1+A_2+...+A_{n-1})=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_{n-1})$$

$$P(S_{n-1}+A_n)=P(S_{n-1})+P(A_1)$$

$$P(S_{n-1})+P(A_1+A_2+...+A_{n-1})$$

$$P(A_1+A_2+...+A_{n-1}+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_{n-1})+P(A_n)$$

Кез келген A және B оқиғалары үшін мынадай формула орынды:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A*B)$$

$$A+B=A+B\overline{A}$$

$$B=B\overline{A}+BA \Rightarrow B(A+\overline{A})=B\Omega$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B\overline{A})$$

$$P(B)=P(B\overline{A})+P(AB) \Rightarrow P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

2) Егер $A\subset B$, онда $P(A)\le P(B)$. Шынында $B=A+BA;\ P(B)=$ $=P(A)+P(BA) \Rightarrow P(A)\le P(B).$

3) $\varnothing\subset A\subset\Omega, \quad P(\varnothing)=0, \quad P(\Omega)=1, \quad 0\le P(A)\le 1.$

Есеп. Кітапхананың қатар-қатар қойылған тақтасына 12 оқулықтар қойылған. Оның үшеуі түптелген. Кітапханашы ыңғайымен 3 оқулықты алды. Алынған оқулықтың кем дегенде біреуі түптелгендігінің ықтималдығын табыңыз.

Қажетті A оқиғасы 3 (B,C,D) оқиғалар қосындысына тең.

B, C, D – үйлесімсіз оқиғалар болғандықтан $P(A) = P(B) + P(C) + P(Д)$ ықтималдықты мына формула бойынша табамыз:

$$P = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^n}$$

$$P(B) = \frac{C_4^1 \cdot C_8^2}{C_{12}^3} = \frac{4! \cdot \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 6!}}{\frac{12!}{3! \cdot 9!}} = \frac{4 \cdot \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{2! \cdot 6!}}{\frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9!}} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 8^4}{10 \cdot 11 \cdot 2} = \frac{28}{55};$$

$$P(C) = \frac{C_4^2 \cdot C_8^1}{C_{12}^3} = \frac{12}{55};$$

$$P(D) = \frac{C_4^3}{C_{12}^3} = \frac{C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{1}{55};$$

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{28}{55} + \frac{12}{55} + \frac{1}{55} = \frac{41}{55}.$$

A оқиғасынан алынған кітаптың кем дегенде бір кітабы түптелген. $\overline{A}$ – бірде-біреуі түптелмеген:

$$A + \overline{A} = \Omega$$

$$P(A - \overline{A}) = P(\Omega); \quad P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{14}{55};$$

$$P(A) = 1 - \frac{14}{55} = \frac{41}{55}.$$

1.7 Шартты ықтималдық

1-анықтама. Екі оқиғаның (A және B) біреуінің шартты ықтималдығы деп бірінші оқиға A болып кеткеннен кейінгі пайда болатын ықтималдықты айтады. Оны былай белгілейді: $P\ (B / A)$.

2-анықтама. Егер A оқиғасы мен B оқиғаларының біреуінің пайда болуы екіншісінің пайда болуына әсер етпейтін болса, онда мұндай оқиғаларды *тәуелсіз оқиғалар* дейді: $P\,(B / A) = P(B)$ немесе $P_A\ (B) = P(B)$. Тәуелсіз оқиғалардың шартты ықтималдығы шартсызға тең.