ДІЛМАН Т.Б., ДІЛМАНОВА А.Т.

ОҢТАЙЛАНДЫРУ ӘДІСТЕРІ

Қызылорда – 2014

ДІЛМАН Төребай Бимағанбетұлы,
ДІЛМАНОВА Айжан Төребайқызы

Оңтайландыру әдістері.

Электронды оқу құралы. – Қызылорда, ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, 2014 жыл - 272 бет.

Жауапты редактор –
физика-математика ғылымдарының кандидаты,
доцент Әбжанов Е.Ә.

Бұл электронды оқу құралы жоғары оқу орындарының техникалық және экономикалық мамандықтарында оқитын студенттеріне “Оңтайландыру әдістері” пәні бойынша қосымша оқу құралы ретінде ұсынылады.

§1. “Оңтайландыру әдістері” пәні туралы

“Оңтайландыру әдістері” пәнінде $f(x)$, $x \in D(f) \subseteq R^n$ функциясының (жалпы айтқанда, функционалдың немесе оператордың) экстремум (максимум немесе минимум) мәндерін табу мәселесі қарастырылады.

Анықтама. Егер $f(x)$ функциясының аргументтеріне қосымша шарттар қойылмаса, онда функцияның экстремумін табу мәселесін **шартсыз экстремум есебі** деп атайды.

Анықтама. Егер $f(x)$ функциясының аргументтеріне қосымша шарттар қойылса, онда функцияның экстремумін табу мәселесін **шартты экстремум есебі** деп атайды.

Егер шартты экстремум есебінің қойылымдарында берілетін шарттар (сызықтық және/немесе сызықтық емес теңдеулер және/немесе теңсіздіктер) көмегімен анықталатын мүмкін шешімдер жиынын $V \subset R^n$ деп белгілесек, онда функцияның шартты экстремумі $D(f) \cap V \neq \emptyset$ жиынында ізделінеді. Берілген функцияның анықталу облысы $D(f) = \emptyset$ немесе мүмкін шешімдер жиыны $V = \emptyset$ болған жағдайларда шартты экстремум есебінің ешқандай шешімі болмайды.

Анықтама. Егер $\forall x \in D(f)$ нүктесі үшін $f(x^*) \leq f(x)$ теңсіздігі орындалса, онда $x^* \in D(f)$ нүктесін $f(x)$ функциясының $D(f)$ жиынындағы **глобальдік минимум нүктесі** немесе **минимум нүктесі** деп атайды. Ал

$$f^* = f(x^*) = \min_{x \in D(f)} f(x)$$

мәнін $f(x)$ функциясының $D(f)$ жиынындағы **глобальдік минимумы** немесе **минимумы** деп атайды.

Анықтама. Центрі $x^0 \in D(f)$ нүктесінде, ал радиусы $\forall \delta > 0$ болатын $U_\delta(x^0) = \{x: \|x^0 - x\|_{R^n} \leq \delta\} \subset D(f)$ дөңгелекті x^0 нүктесінің $\boldsymbol{\delta}$**-маңайы** деп атайды. R^n кеңістігінің нормасы $\|\cdot\|_{R^n}$ деп белгіленді.

Анықтама. Егер $\tilde{x} \in D(f)$ нүктесінің $U_\delta(\tilde{x}) \subset D(f)$ маңайы табылып, $\forall x \in U_\delta(\tilde{x})$ нүктесі үшін $f(\tilde{x}) \leq f(x)$ теңсіздігі орындалса, онда $\tilde{x}$ нүктесін $f(x)$ функциясының **локальдік минимум нүктесі** деп, ал $\tilde{f} = f(\tilde{x})$ мәнін $f(x)$ функциясының **локальдік минимумы** деп атайды.

Анықтама. Егер $\tilde{x} \in D(f)$ нүктесінің $U_\delta(\tilde{x}) \subset D(f)$ маңайы табылып, $\forall x \in U_\delta(\tilde{x})$, $x \neq \tilde{x}$ нүктесі үшін $f(\tilde{x}) < f(x)$ теңсіздігі орындалса, онда $\tilde{x}$ нүктесін $f(x)$ функциясының **қатаң локальдік минимум нүктесі** деп, ал $\tilde{f} = f(\tilde{x})$ мәнін $f(x)$ функциясының **қатаң локальдік минимумы** деп атайды.

Кез келген $f(x)$ функциясы үшін

$$\max_{x \in U} f(x) = -\min_{x \in U}\{-f(x)\}$$

теңдігі орындалатындықтан берілген U жиынында $f(x)$ функциясының максимум нүктесі мен мәнін табу (максимизациялау) есебі сол U жиынында $-f(x)$ функциясының минимум нүктесі мен мәнін табу (минимизациялау) есебіне пара-пар. Сондықтан "Оңтайландыру әдістері" пәнінде функцияны минимизациялау әдістері ғана қарастырылады.

Оңтайландыру есебі: $U = \{x\} \subseteq D(f) \subseteq R^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ жиынында қарастырылған $f(x)$ функциясының

$$f(x^*) = \min_{x \in U} f(x)$$

теңдігін қанағаттандыратын $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in U$ минимум нүктесін және $f^* = f(x^*) \in R^1$ минимум мәнін табу керек.

Анықтама. Оңтайландыру есебіндегі $f(x)$ функциясын **мақсаттық функция** деп, ал $x_1, \dots, x_n$ айнымалыларын **басқарылатын айнымалылар** деп атайды.

Вейерштрасс[1] теоремасына сәйкес $\overline{U} \subset R^n$ тұйық жиынындағы үздіксіз $f(x)$ функциясы өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін осы жиында қабылдайтын болғандықтан қойылған оңтайлан-

---

[1] Карл Теодор Вильгельм **Вейерштрасс** (1815-1897) – неміс математигі.

дыру есебінің шешімі бар. Олай болса, $\overline{U}$ тұйық жиынында $\bar{x}$ және $\bar{\bar{x}}$ нүктелері табылып, $\forall x \in \overline{U}$ үшін $f(\bar{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{\bar{x}})$ теңсіздігі орындалады. Бұл теорема шешімнің жалғыздығын қамтамасыз етпейді, өйткені функцияның бірнеше минимум нүктесі табылуы мүмкін.

Берілген $U \subseteq D(f)$ жиынындағы $f(x)$ функциясының барлық минимум нүктелерінің жиынын $U^* = \{x^*\}$ деп белгілейді. Берілген $f(x)$ функциясы мен U жиынының қасиеттеріне байланысты U^* жиыны $\emptyset$ бос жиын немесе шекті (әлде шексіз) жиын болуы мүмкін.

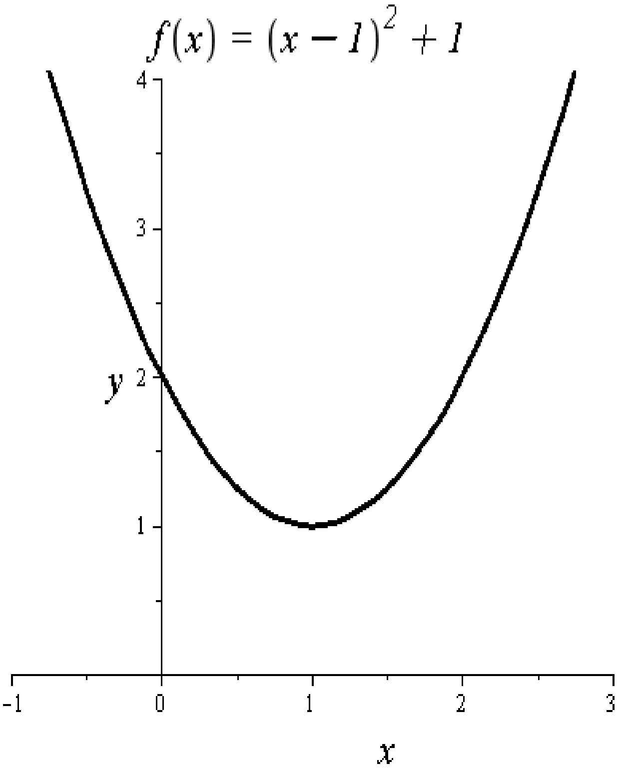
Оңтайландыру есептеріндегі минимумы ізделетін мақсаттық функция екі балама шешімді өзара салыстыруға мүмкіндік береді. Бір айнымалыға тәуелді мақсаттық функцияның графигі жазықтықтағы қисық сызық болса, екі айнымалыға тәуелді мақсаттық функцияның графигі үш өлшемді кеңістіктегі бет болады. Үш және одан да көп айнымалыға тәуелді мақсаттық функцияның графигі болатын гипербеттің сызбасын бейнелеу немесе көзге елестету мүмкін емес. Мақсаттық функция үзікті тегіс функция немесе таблица түрінде де беріледі. Қалай берілсе де мақсаттық функция өз аргументтеріне қарағанда бір мәнді функция болуы тиіс. Оңтайландырудың кейбір есептерінде бірнеше мақсаттық функция бірге қарастырылуы мүмкін.

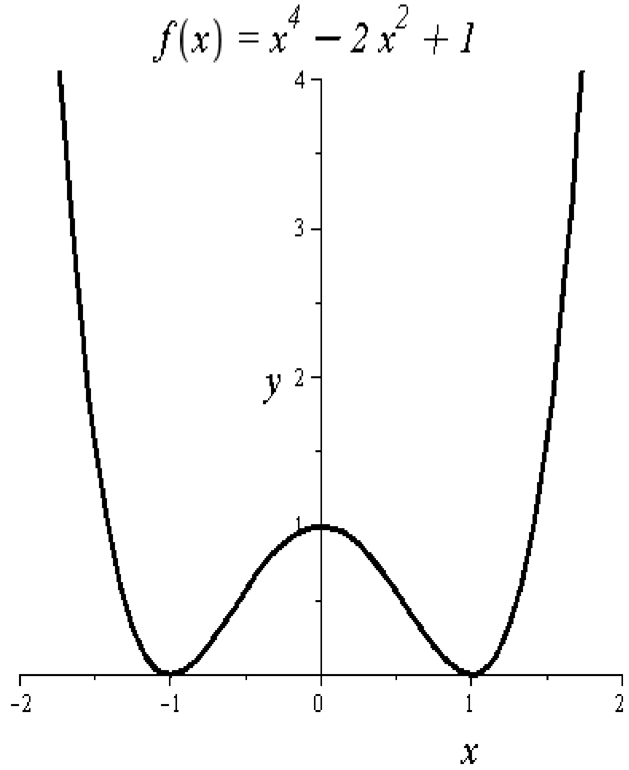
Берілген $f(x)$, $x \in U \subseteq D(f)$ функциясының кез келген глобальдік минимум нүктесі сонымен бірге осы функцияның локальдік минимум нүктесі де болады. Жалпы айтқанда, функцияның локальдік минимум нүктесі оның глобальдік минимум нүктесі болмайды.

Мысал. $U = \{x: 0 < x < 2\}$ жиынындағы $f(x) = (x-1)^2 + 1$ функциясының минимум нүктелерінің $U^* = \{x^* = 1\}$ жиыны тек жалғыз нүктеден тұрады және минимумы $f^* = 1$. Функцияның $U = \{x: 2 < x \leq 3\}$ жиынындағы минимум нүктелерінің жиыны бос жиын: $U^* = \emptyset$.

Maple:

$> plot\left((x-1)^2+1,\ x=-1\,..3,\ y=0\,..4\right);$





Мысал. R^1 сан осіндегі $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ функциясының минимум нүктелерінің $U^* = \{x^* = -1; 1\}$ жиыны 2 нүктеден тұрады және минимумы $f^* = 0$.

Мысал. $U = \{x: 1 \le x \le 2\}$ жиынындағы

$$j(x) = \begin{cases} sin^2\dfrac{\pi}{x}, & x \ne 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

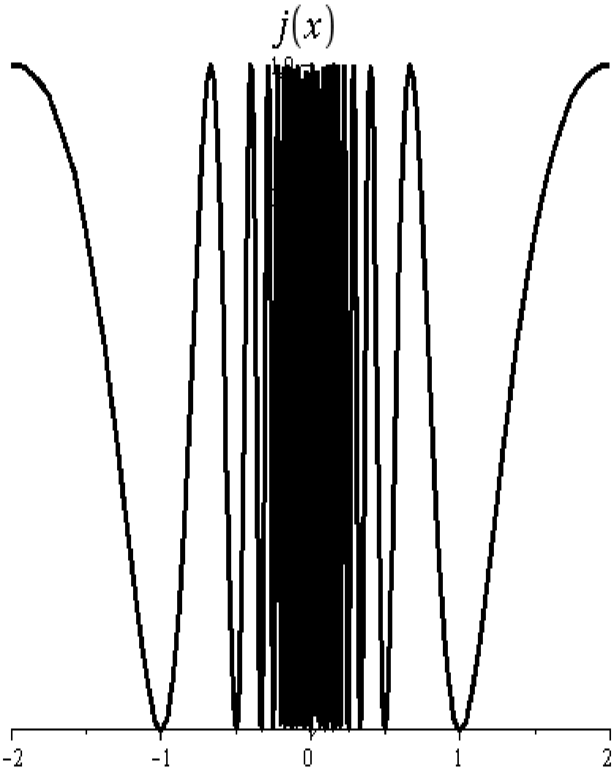
функциясының минимум нүктелерінің $U^* = \{x^* = 1\}$ жиыны 1 нүктеден тұрады және минимумы $j^* = 0$. Функцияның мына

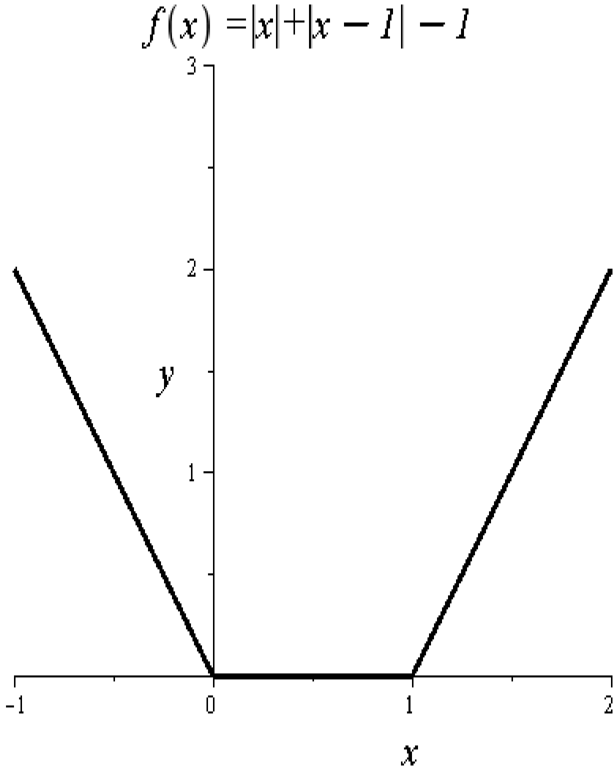
$$U = \left\{x: \frac{1}{3} \le x \le 1\right\},\ \ U = \{x: 0 < x \le 1\}$$

жиындардағы минимум нүктелерінің жиындары

$$U^* = \left\{x^* = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\},\ \ U^* = \left\{x^* = \frac{1}{k},\ \ k = 1,2, \dots\right\}$$

сәйкесінше 3 және шексіз көп нүктеден тұрады. Осы функцияның мына $U = \{x: 2 \le x < +\infty\}$ жиынындағы минимум нүктелерінің жиыны $U^* = \emptyset$.





Мысал. R^1 сан осіндегі $f(x) = |x| + |x - 1| - 1$ функциясының минимум нүктелерінің $U^* = \{x^*: 0 \leq x^* \leq 1\}$ жиыны шексіз көп нүктеден тұрады және минимумы $f^* = 0$. $U = \{x: 1 \leq x \leq 2\}$ жиынындағы функцияның минимум нүктелерінің $U^* = \{x^* = 1\}$ жиыны жалғыз нүктеден тұрады және минимумы $f^* = 0$. Ал функцияның $U = \{x: 2 \leq x \leq 3\}$ жиынындағы минимум нүктелерінің $U^* = \{x^* = 2\}$ жиыны да жалғыз нүктеден тұрады. Функцияның $U = \{x: -2 \leq x < -1\}$ жиынындағы минимум нүктелерінің жиыны $U^* = \emptyset$.

1-тарау.
Бір айнымалы функцияны минимизациялау

§2. Бір айнымалы функцияның инфимумы

Берілген $U \subset R^1$ жиынында $y = f(x)$ функциясының минимумы болмауы мүмкін, яғни $U^* = \emptyset$. Бұл жағдайда функцияның минимумы ұғымы жалпыланады. Атап айтқанда, U жиынындағы $f(x)$ функциясының инфимумы (дәл төменгі жағы) деген ұғым қарастырылады.

$U \subset R^1$ жиынындағы $f(x)$ функциясы төменгі жағынан шектелсін, яғни $\forall x \in U$ нүктесі үшін $f(x) \geq A > -\infty$ теңсіздігін қанағаттандыратын A нақты саны табылсын.

Анықтама. Егер $\forall x \in U$ үшін $f(x) \geq f_*$ болса және $\forall \varepsilon > 0$ үшін $f(x_\varepsilon) < f_* + \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын $x_\varepsilon \in U$ нүктесі табылса, онда

$$f_* = \inf_{x \in U} f(x)$$

санын U жиынындағы $f(x)$ функциясының **инфимумы** (дәл төменгі жағы) деп атайды.

Анықтама. Егер $f(x)$ функциясы үшін $\{x_k\} \subset U \subset R^1$ тізбегі табылып,

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = -\infty$$

болса, онда $f(x)$ функциясы **төменгі жағынан шектелмеген функция** деп аталады.

Төменгі жағынан шектелмеген функцияның инфимумы, әдетте, $f_* = -\infty$ деп алынады.

Егер функцияның минимум нүктелерінің жиыны $U^* \neq \emptyset$ болса, онда

$$\min_{x \in U} f(x) = \inf_{x \in U} f(x),$$

яғни $f^* = f_*$. Бұл жағдайда U жиынында $f(x)$ функциясы өзінің инфимумын қабылдайды дейді.

Мысал. R^1 сан осіндегі $f(x) = x^2$ функциясының минимум нүктесі $x^* = 0$ және минимумы $f^* = 0$. $\forall x \in R^1$ үшін $f(x)$ функциясының графигі төменгі жағынан Ox осімен шектелген, яғни $f(x) \geq 0$. Сонымен бірге $\forall \varepsilon > 0$ үшін $f(x_\varepsilon) < 0 + \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $x_\varepsilon \in R^1$ нүктесі табылады. Егер $\varepsilon = 0{,}01$ десек, онда мына $x_\varepsilon^2 < \varepsilon$ теңсіздігінен $|x_\varepsilon| < \sqrt{\varepsilon}$ екендігін көреді, яғни $\forall x_\varepsilon \in (-0{,}1; 0{,}1)$ санын тауып алуға болады. Олай болса, $f_* = 0$ және $f^* = f_*$. Сонымен, $f(x) = x^2$ функциясы R^1 сан осінде өзінің инфимумын қабылдайды.

Анықтама. Егер $\{x_k\} \subset U$ тізбегі үшін

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f_* = \inf_{x\in U} f(x)$$

теңдігі орындалса, онда тізбекті $U \subset R^1$ жиынында $f(x)$ функциясын **минимизациялаушы тізбек** деп атайды.

Инфимумның анықтамасына сәйкес кез келген функцияны минимизациялаушы тізбекті анықтауға болады.

$U \subset R^1$ жиынындағы кез келген $f(x)$ функциясының инфимумы

$$f_* = \inf_{x\in U} f(x)$$

әрқашан табылады, бірақ сол жиындағы оның минимумы

$$f^* = \min_{x\in U} f(x)$$

табылмауы мүмкін. Егер $f(x)$ функциясының $U \subset R^1$ жиынындағы минимум нүктелерінің жиыны $U^* \neq \emptyset$ болса, онда

$$\min_{x\in U} f(x) = \inf_{x\in U} f(x)$$

екені анық. Егер $U^* = \emptyset$ болса, онда $f^* = f_*$ деп алып, $U \subset R^1$ жиынында $f(x)$ функциясын минимизациялау есебінде табылмайтын минимум f^* мәнінің орнына әрқашан анықталатын инфимум f_* мәнін іздейді.

Мысал. $U = \{x: 1 \le x < +\infty\}$ жиынындағы

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

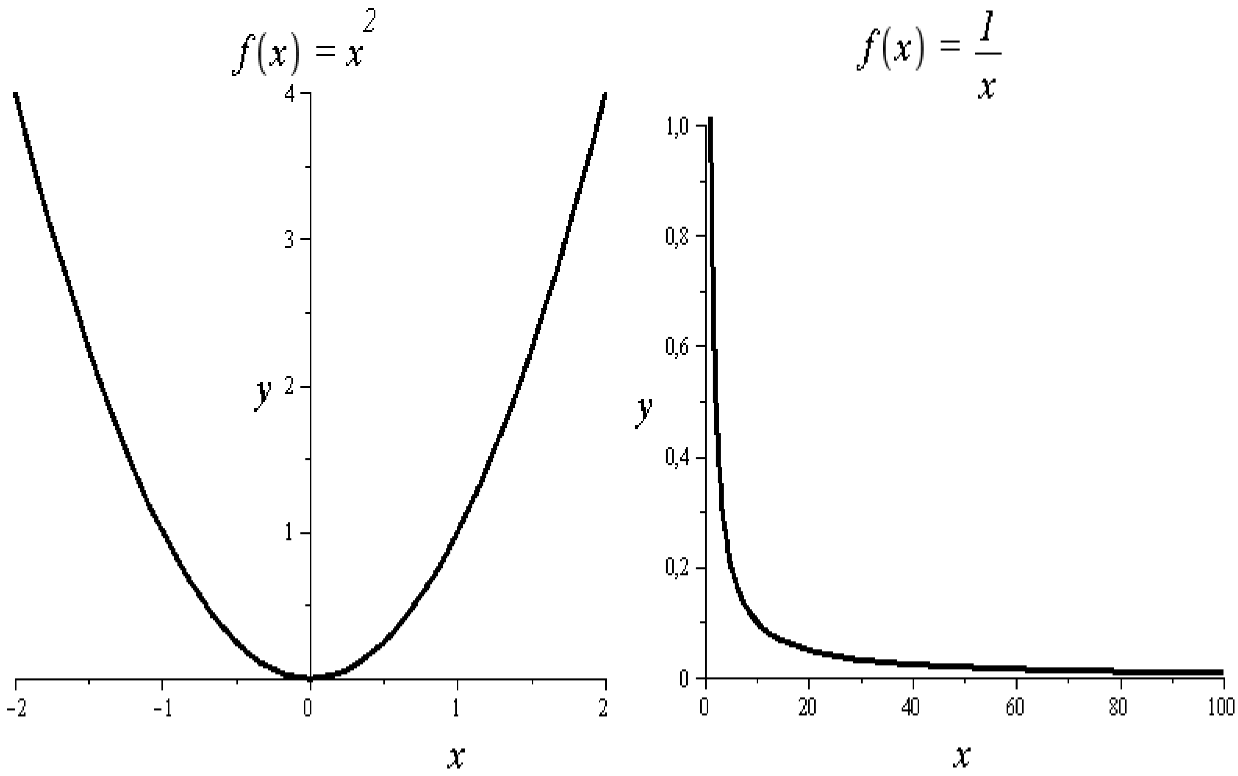
функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^* = \emptyset$ болатынын және

$$f_* = \inf_{x\in U} f(x) = 0$$

екенін дәлелдеу керек.

Кері жорып, $f(x)$ функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^* \neq \emptyset$ дейік, яғни $f(x)$ функциясының U жиынында кемінде бір $x^* \in U$ минимум нүктесі бар. Егер $\forall x > x^*$ нүктесін алсақ, онда $x \in U$ және

$$f(x^*) = \frac{1}{x^*} > \frac{1}{x} = f(x).$$



Демек, $x^* \in U$ нүктесі $f(x)$ функциясының U жиынында минимум нүктесі болмайды. Қайшылық минимум нүктелерінің жиыны $U^* = \emptyset$ екенін дәлелдейді.

Енді

$$f_* = \inf_{x \in U} f(x) = 0$$

екенін көрсетейік. Шынында, $\forall x \in U$ үшін

$$f(x) = \frac{1}{x} > 0$$

теңсіздігі орынды. $\forall \varepsilon > 0$ үшін мына шартты

$$x_\varepsilon > max\,(\frac{1}{\varepsilon}, 1)$$

қанағаттандыратын $\forall x_\varepsilon \in U$ және $f(x_\varepsilon) < \varepsilon = 0 + \varepsilon$. Олай болса, $f_* = 0$. Дербес жағдайда, $\varepsilon = 0{,}01$ мәні үшін $(100; +\infty)$ аралығындағы $\forall x_\varepsilon$ нүктесі келесі

$$\frac{1}{x_\varepsilon} < \varepsilon$$

теңсіздікті қанағаттандырады.

Мысал. $U = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$ $(U = \{x: 0 < x \leq 1\})$ жиынындағы үзілісті

$$h(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0, \\ 3, & x = 0, \\ x + 2, & x > 0 \end{cases}$$

функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^* = \emptyset$ болатынын және

$$h_* = \inf_{x \in U} h(x) = 0$$

екенін дәлелдеу керек.

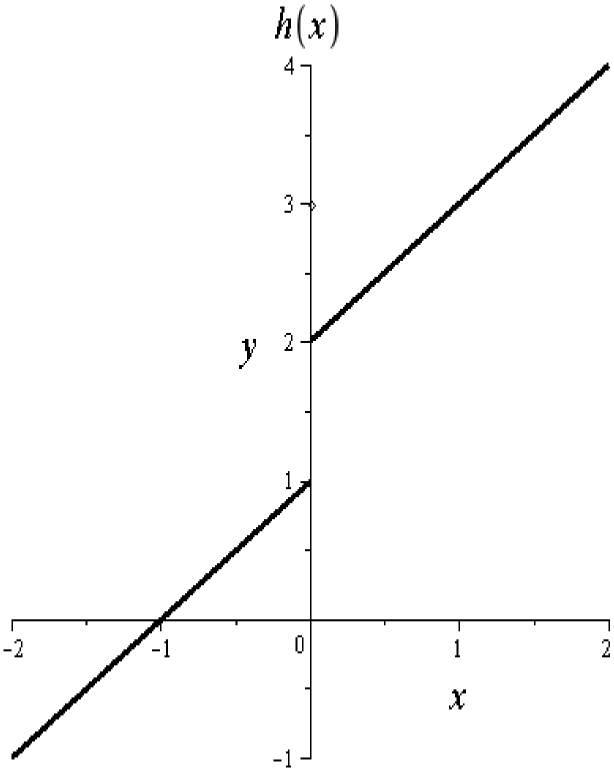
Кері жорып, $h(x)$ функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^* \neq \emptyset$ дейік, яғни осы $h(x)$ функциясының U жиынында кемінде бір $x^* \in U$ минимум нүктесі бар. Егер $\forall x \in (0, x^*)$ нүктесін алсақ, онда $x \in U$ және $h(x) < h(x^*)$. Демек, $x^* \in U$ нүктесі $h(x)$ функциясының U жиынында минимум нүктесі болмайды. Қайшылық минимум нүктелерінің жиыны $U^* = \emptyset$ екенін дәлелдейді.

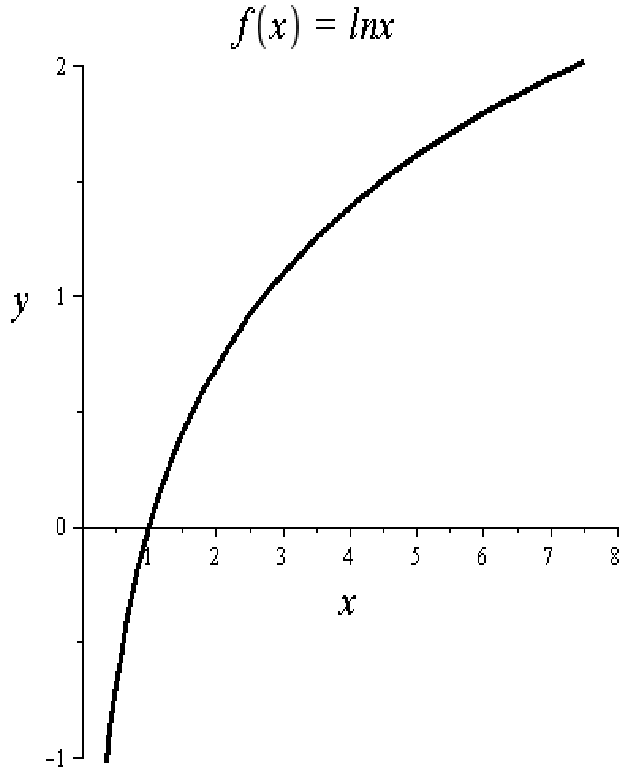
Берілген жиында $h(x) > 2$ және $\forall \varepsilon > 0$ үшін $h(x_\varepsilon) < 2 + \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын $x_\varepsilon \in U$ нүктесі табылады. Сондықтан U жиынындағы функцияның инфимумы $h_* = 2$. Дербес жағдайда, $\varepsilon = 0{,}01$ мәні үшін $\forall x_\varepsilon \in (0; 0{,}01)$ келесі $x_\varepsilon < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандырады.

Мысал. $U = \{x: 0 < x < +\infty\}$ жиынындағы $f(x) = lnx$ функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^* = \emptyset$ екенін дәлелдеу керек.

Кері жорып, $f(x)$ функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^* \neq \emptyset$ дейік, яғни $f(x)$ функциясының U жиынында кемінде бір $x^* \in U$ минимум нүктесі бар. Егер $\forall x \in (0, x^*)$ нүктесін алсақ, онда $x \in U$ және $f(x^*) = lnx^* > lnx = f(x)$.

Демек, $x^* \in U$ нүктесі $f(x)$ функциясының U жиынында минимум нүктесі болмайды. Қайшылық функцияның минимум нүк-телерінің жиыны $U^* = \emptyset$ екенін дәлелдейді.





Мына

$$\left\{x_k = \frac{1}{k}\right\} \subset U$$

сандар тізбегі үшін

$$\lim_{k\to+\infty} ln\frac{1}{k} = -\infty.$$

Maple:

> $x_k := \frac{1}{k};$ $x_k := \frac{1}{k}$

> $\lim_{k\to+\infty} ln(x_k);$ $-\infty$

$f(x)$ функциясы анықтамаға сәйкес төменгі жағынан шектелме-ген функция. Олай болса, оның инфимумы $f_* = -\infty$.

Практикалық сабақ
Бір айнымалы функцияның инфимумы

Мысал. R^1 сан осіндегі

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^*=\emptyset$ болатынын дәлелдеп, оның инфимумын табу керек.

Кері жорып, $f(x)$ функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^*\neq\emptyset$ дейік, яғни $f(x)$ функциясының R^1 сан осінде кемінде бір x^* минимум нүктесі бар. Егер $\forall x>x^*$ нүктесін алсақ, онда $x\in R^1$ және

$$f(x^*)=\frac{1}{1+(x^*)^2}>\frac{1}{1+x^2}=f(x).$$

Демек, x^* нүктесі $f(x)$ функциясының R^1 сан осінде минимум нүктесі болмайды. Бұл қайшылық минимум нүктелерінің жиыны $U^*=\emptyset$ екенін дәлелдейді.

Енді

$$f_*=\inf_{x\in R^1} f(x)=0$$

екенін көрсетейік. Шынында, $\forall x\in R^1$ үшін

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}>0.$$

Әрі қарай, $\forall\varepsilon>0$ үшін мына

$$f(x_\varepsilon)=\frac{1}{1+x_\varepsilon^2}<\varepsilon$$

шартты қанағаттандыратын $\forall x_\varepsilon\in R^1$ және $f(x_\varepsilon)<\varepsilon=0+\varepsilon$, яғни $f_*=0$.

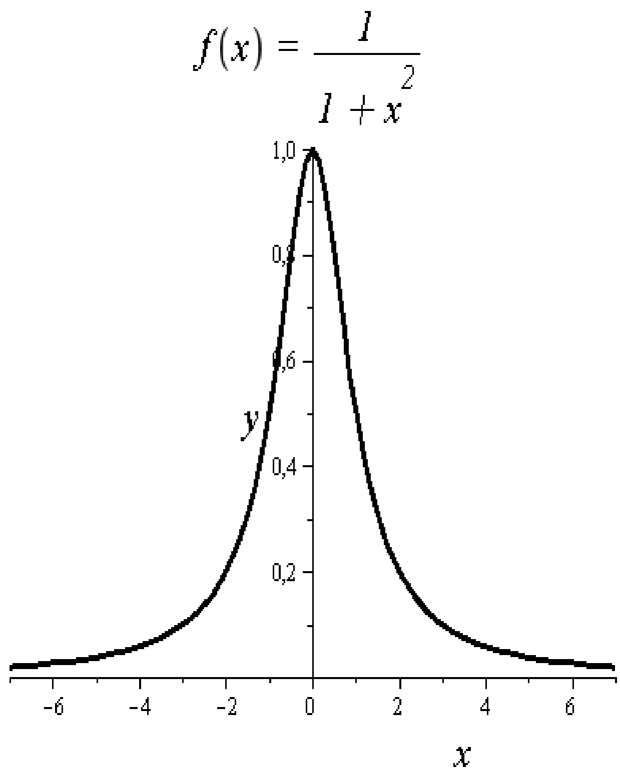
Дербес жағдайда, $\varepsilon=0{,}01$ мәні үшін $(\sqrt{99};+\infty)$ аралығындағы $\forall x_\varepsilon$ нүктесі мына

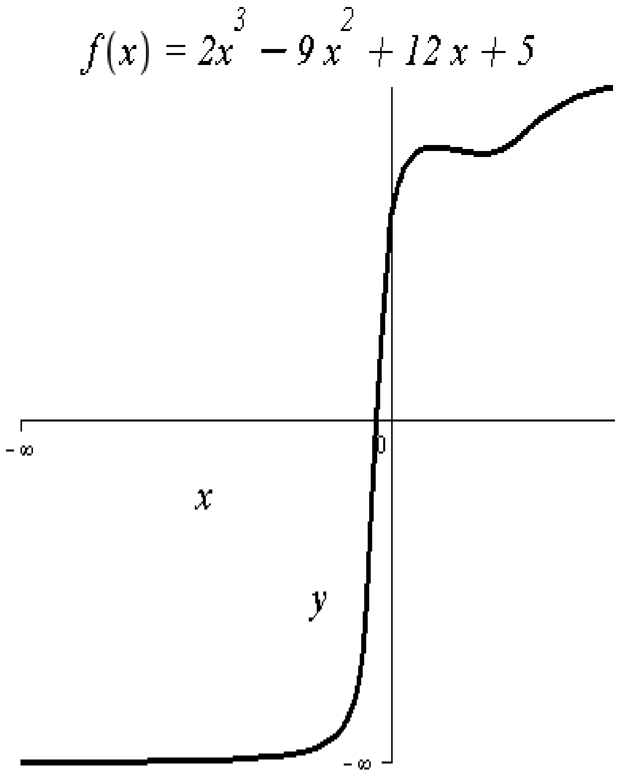
$$f(x_\varepsilon)=\frac{1}{1+x_\varepsilon^2}<0{,}01$$

теңсіздікті қанағаттандырады.

Мысал. $f(x)=2x^3-9x^2+12x+5$ функциясының берілген $U=(-\infty;5)$ жиынындағы минимум нүктелерінің жиыны $U^*=\emptyset$

болатынын дәлелдеп, оның инфимумын табу керек.





Кері жорып, $f(x)$ функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^* \neq \emptyset$ дейік, яғни $f(x)$ функциясының U жиынында кемінде бір $x^* \in U$ минимум нүктесі бар. Егер $\forall x \in (-\infty; x^*)$ нүктесін алсақ, онда $x \in U$ және $f(x^*) > f(x)$.

Демек, $x^* \in U$ нүктесі U жиынында $f(x)$ функциясының минимум нүктесі болмайды. Қайшылық минимум нүктелерінің жиыны $U^* = \emptyset$ екенін дәлелдейді.

Мына

$$\{x_k = -k\} \subset U$$

сандар тізбегі үшін

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = -\infty.$$

Maple:

> $x_k := -k;$ $x_k := -k$

> $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(2 \cdot x_k^3 - 9 \cdot x_k^2 + 12 \cdot x_k + 5\right);$ $-\infty$

$f(x)$ функциясы жоғарыда берілген анықтамаға сәйкес төменгі жағынан шектелмеген функция. Олай болса, оның инфимумын $f_* = -\infty$ деп алады.

Мысал. $U = [1; +\infty)$ жиынындағы

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{2 + x^4}$$

функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^* = \emptyset$ болатынын дәлелдеп, оның инфимумын табу керек.

Кері жорып, $f(x)$ функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^* \neq \emptyset$ дейік, яғни $f(x)$ функциясының U жиынында кемінде бір x^* минимум нүктесі бар. Егер $\forall x > x^*$ нүктесін алсақ, онда $x \in U$ және

$$f(x^*) = \frac{1+(x^*)^2}{2 + (x^*)^4} > \frac{1 + x^2}{2 + x^4} = f(x).$$

Демек, x^* нүктесі $f(x)$ функциясының U жиынында минимум нүктесі болмайды. Осы қайшылық минимум нүктелерінің жиыны $U^* = \emptyset$ екенін дәлелдейді.

Енді

$$f_* = \inf_{x \in U} f(x) = 0$$

екенін көрсетейік. Шынында, $\forall x \in U$ үшін

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4} > 0.$$

Әрі қарай, $\forall \varepsilon > 0$ үшін мына шартты

$$f(x_\varepsilon) = \frac{1 + x_\varepsilon^2}{1 + x_\varepsilon^4} < \varepsilon$$

қанағаттандыратын $\forall x_\varepsilon \in U$ және $f(x_\varepsilon) < \varepsilon = 0 + \varepsilon$, яғни $f_* = 0$.

Дербес жағдайда, $\varepsilon = 0{,}01$ мәні үшін $(10{,}05; +\infty)$ аралығындағы $\forall x_\varepsilon$ келесі

$$f(x_\varepsilon) = \frac{1 + x_\varepsilon^2}{1 + x_\varepsilon^4} < 0{,}01$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Лабораториялық сабақ
Бір айнымалы функцияның инфимумы

1 - тапсырма

R^1 сан осіндегі

$$f(x) = \frac{n+1}{n+1+x^2}$$

функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^* = \emptyset$ болатынын дәлелдеп, оның инфимумын табу керек (n – студенттің журналдағы нөмірі).

2 - тапсырма

$U = (-\infty; 5)$ жиынындағы

$$f(x) = (n+2)x^3 - (n+9)x^2 + (n+12)x + 5$$

функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^* = \emptyset$ болатынын дәлелдеп, оның инфимумын табу керек (n – студенттің журналдағы нөмірі).

3 – тапсырма

$U = [1; +\infty)$ жиынындағы

$$f(x) = \frac{n+1+x^2}{n+2+x^2}$$

функциясының минимум нүктелерінің жиыны $U^* = \emptyset$ болатынын дәлелдеп, оның инфимумын табу керек (n – студенттің журналдағы нөмірі).

§3. Бір айнымалы функцияның локальдік экстремумінің қажетті және жеткілікті шарттары

R^1 сандар осіндегі анықталу облысында $f(x)$, $x \in D(f) \subseteq R^1$

функциясы берілсін.

Анықтама. Центрі $x^0 \in D(f)$ нүктесінде, ал радиусы $\forall\varepsilon > 0$ болатын $U_\varepsilon(x^0) = \{x: |x^0 - x| \le \varepsilon\} \subset D(f)$ кесіндіні x^0 нүктесінің ε-маңайы деп атайды.

Анықтама. Егер $x^0 \in D(f)$ және $\forall x \in U_\varepsilon(x^0) \subset D(f)$ нүктелері үшін $f(x^0) \le f(x)$ $(f(x^0) \ge f(x))$ теңсіздігі орындалса, онда x^0 нүктесінде $f(x)$ функциясының локальдік минимумы (максимумы) бар дейді.

Анықтама. Егер $x^0 \in D(f)$ мен $\forall x \in U_\varepsilon(x^0) \subset D(f),\ x \ne x^0$ нүктелері үшін $f(x^0) < f(x)$ $(f(x^0) > f(x))$ теңсіздігі орындалса, онда x^0 нүктесінде $f(x)$ функциясының қатаң локальдік минимумы (максимумы) бар дейді.

$f(x)$ функциясының максимумын анықтау $-f(x)$ функциясының минимумын табуға пара-пар болғандықтан "Оңтайландыру әдістері" пәні $f(x)$ функциясының тек минимумын зерттейді. Қарастырылатын аралықтағы функцияның ең кіші мәнін оның глобальдік минимумы деп атайды. Глобальдік минимум функцияның локальдік минимум нүктелерінде немесе кесіндінің шеткі нүктелерінде қабылданады. $f(x)$ функциясының глобальдік минимумын қабылдайтын нүктені x^* деп, ал глобальдік минимум мәнін $f^* = f(x^*)$ деп белгілейді.

$f(x)$ функциясының $D(f) \subseteq R^1$ анықталу облысында локальдік минимум нүктесі болмайды немесе мұндай нүктелер шекті (шексіз) жиын құрауы мүмкін.

Локальдік экстремумнің қажетті шарты (Ферма[2] теоремасы). Егер $f(x)$ функциясының $x^0 \in D(f)$ нүктесінде локальдік экстремумі (минимумы немесе максимумы) бар болса, онда оның бұл нүктеде бірінші ретті туындысы болмайды немесе бірінші ретті туындысы нөлге тең: $f'(x^0) = 0$.

Егер $x^0 \in D(f) \subseteq R^1$ нүктесі $f(x)$, $x \in D(f)$ функциясының

---

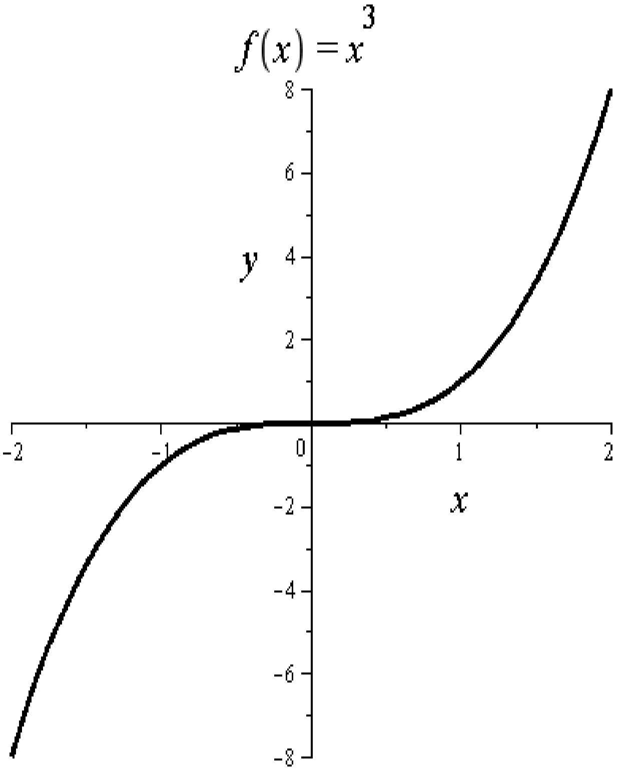
[2] Пьер де **Ферма** (1601-1665) – француз математигі.

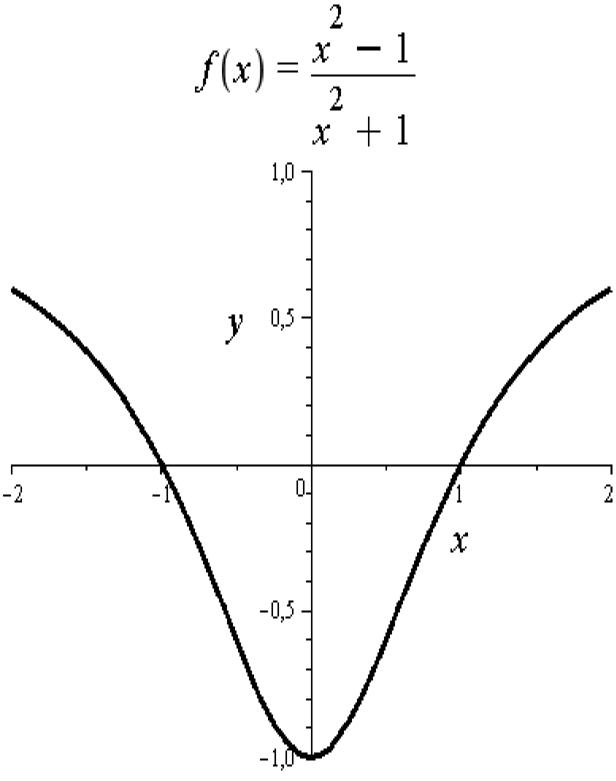
экстремум нүктесі болса, онда берілген функцияның графигіне $(x^0, f(x^0))$ нүктесі арқылы жүргізілген жанама түзу Ox осіне параллель болады немесе мұндай жанама түзу табылмайды.

Анықтама. Үздіксіз функцияның бірінші ретті туындысы болмайтын немесе бірінші ретті туындысы нөлге тең болатын нүктені **экстремумге күдікті нүкте** деп атайды. Дербес жағдайда, функцияның бірінші ретті туындысы нөлге тең болатын экстремумге күдікті нүктені **стационар нүкте** деп атайды.

Функцияның локальдік экстремумінің қажетті шарты функцияның локальдік экстремумінің бар болуы үшін жеткілікті емес, яғни экстремумге күдікті нүктеде функцияның экстремумі болуы да, болмауы да мүмкін.

Мысал. $f(x) = x^3$ функциясының бірінші ретті $f'(x) = 3x^2$ туындысы $x^0 = 0$ нүктесінде нөлге тең. Экстремумге күдікті осы стационар нүктенің $U_\varepsilon(x^0)$ аймағындағы $x < 0$ үшін $f(x) < 0$, ал $x > 0$ үшін $f(x) > 0$ болғандықтан функцияның бұл нүктеде экстремумі жоқ.





Локальдік экстремумнің бірінші жеткілікті шарты. Егер

1) $f(x)$ функциясы $x^0 \in D(f) \subseteq R^1$ нүктесінің $U_\varepsilon(x^0) \subset D(f)$ маңайында үздіксіз болса және $U_\varepsilon(x^0)$ маңайында не $U_\varepsilon(x^0)\backslash\{x^0\}$ жиынында дифференциалданса; 2) $f'(x^0) = 0$ болса не $f'(x^0)$ туындысы анықталмаса; 3) $f'(x)$ туындысы x^0 нүктесінің сол жағында теріс (оң) және x^0 нүктесінің оң жағында оң (теріс) таңбалы болса, онда x^0 нүктесінде $f(x)$ функциясының локальдік минимумы (максимумы) бар. Егер $f'(x)$ туындысы x^0 нүктесінің сол және оң жақтарында бірдей таңбалы болса, онда x^0 нүктесінде $f(x)$ функциясының экстремумі жоқ.

Мысал. Берілген

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

функциясының экстремумдерін дифференциалдық есептеу әдісі бойынша анықтау керек.

Функция R^1 сан осінде үздіксіз дифференциалданады. Оның бірінші ретті туындысын нөлге теңестіргенде шығатын келесі

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

теңдеуден $x = 0$ стационар нүктесі табылады. Функция $\forall x \in R^1$ нүктесінде дифференциалданатындықтан оның бұдан басқа экстремумге күдікті нүктесі болмайды. Осы стационар нүктенің маңайындағы $x < 0$ үшін $f'(x) < 0$ және $x > 0$ үшін $f'(x) > 0$, яғни локальдік экстремумнің бірінші жеткілікті шартына сәйкес бұл нүктеде функция минимум мәнін қабылдайды: $f_{min} = -1$.

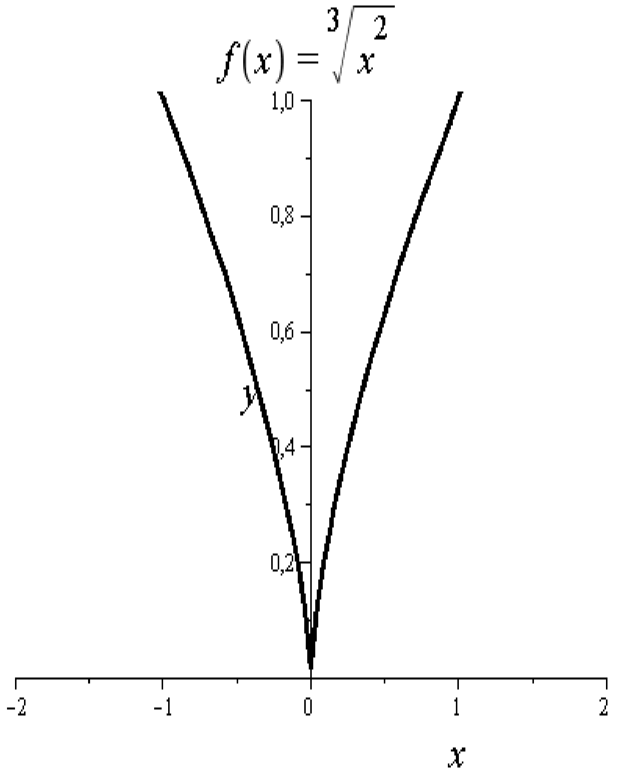
Мысал. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ функциясының экстремумін дифференциалдық есептеу әдісі бойынша анықтау керек.

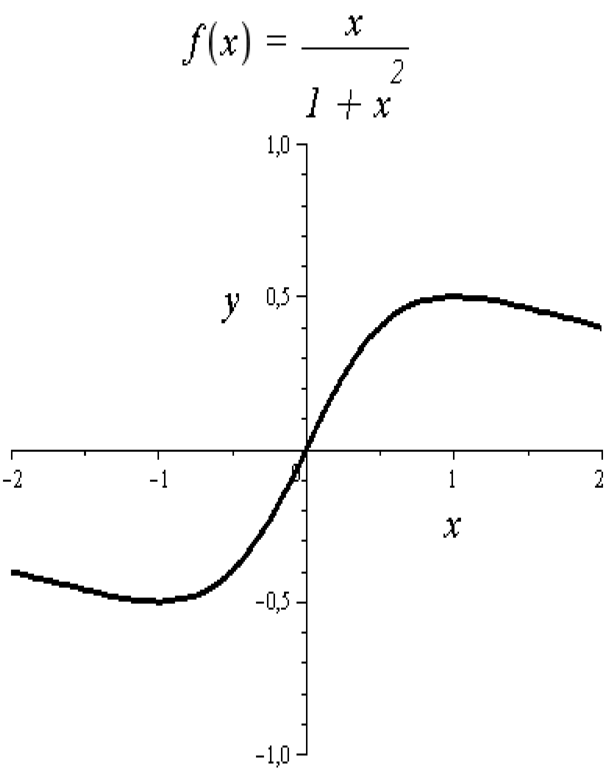
Функция R^1 сан осінде үздіксіз және $x \neq 0$ нүктелерінде дифференциалданады:

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Функцияның экстремумге күдікті $x = 0$ нүктесінде туындысы болмайтындықтан бұл нүктенің сол жағында $f'(x) < 0$ болса, оң жағында $f'(x) > 0$ болады, яғни локальдік экстремумнің бірінші жеткілікті шартына сәйкес бұл нүктеде функция өзінің минимум мәнін қабылдайды: $f_{min} = f(0) = 0$.

Локальдік экстремумнің екінші жеткілікті шарты. Егер 1) $f(x)$ функциясы $x^0 \in D(f) \subseteq R^1$ нүктесінің мына $U_\varepsilon(x^0) \subset D(f)$ маңайында екі рет дифференциалданса; 2) $f'(x^0) = 0$ және 3) екінші ретті туындысы $f''(x^0) \neq 0$ болса, онда x^0 нүктесінде берілген $f(x)$ функциясының экстремумі бар. Атап айтқанда, егер $f''(x^0) > 0$ ($f''(x^0) < 0$) болса, онда x^0 – функцияның минимум (максимум) нүктесі. Егер $f''(x^0) = 0$ болса, онда x^0 нүктесінде $f(x)$ функциясының экстремумі болуы немесе болмауы мүмкін, сондықтан бұл жағдайда функцияны қосымша зерттейді.





Мысал. Берілген

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

функциясының экстремумін дифференциалдық есептеу әдісі бойынша анықтау керек.

Функция R^1 сан осінде кемінде екі рет үздіксіз дифференциалданады. Функцияның бірінші ретті туындысын нөлге теңестіргенде шығатын келесі

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0$$

теңдеуінен $x_1 = -1$ және $x_2 = 1$ стационар нүктелері табылады. Бұдан өзге экстремумге күдікті нүктелер жоқ.

Функцияның экстремумге күдікті стационар нүктелеріндегі оның екінші ретті

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3}$$

туындысының таңбаларын анықтайды: $f''(-1) > 0,\ f''(1) < 0$. Демек, локальдік экстремумнің екінші жеткілікті шартына сәйкес $f(x)$ функциясының $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ стационар нүктелерінде ізделінді экстремум мәндері бар болады: $f_{min} = f(-1) = -0{,}5$ және $f_{max} = f(1) = 0{,}5$.

Локальдік экстремумнің екінші жеткілікті шартын былай тұжырымдауға да болады. Егер $f(x)$ функциясының $x^0 \in U \subseteq R^1$ стационар нүктесінде анықталған екінші ретті дифференциалы $d^2f(x^0) = f''(x^0)(dx)^2$, яғни екінші ретті туындысы $f''(x^0)$ оң (теріс) болса, онда x^0 – берілген функцияның минимум (максимум) нүктесі.

Локальдік экстремумнің үшінші жеткілікті шарты. Егер берілген $f(x)$ функциясының $x^0 \in U \subseteq R^1$ нүктесіндегі алғашқы m $(m \geq 1)$ ретті туындылары нөлге тең, ал $m + 1$ – ретті туындысы нөлден өзгеше болса, онда m – тақ (жұп) сан болғанда x^0 – функцияның локальдік экстремум (иілу) нүктесі.

Атап айтқанда, егер $f^{(m+1)}(x^0) > 0$ $(f^{(m+1)}(x^0) < 0)$ болса, онда x^0 – функцияның локальдік минимум (максимум) нүктесі. Демек, m – жұп сан болғанда x^0 нүктесінде функцияның экстремумі болмайды.

Мысал. $f(x) = x^3$ функциясының x^* минимум нүктесін және f^* минимум мәнін дифференциалдық есептеу әдісі бойынша табу керек.

Функцияның бірінші, екінші ретті $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ туындылары $x = 0$ стационар нүктесінде нөлге тең, ал үшінші ретті туындысы $\forall x \in R^1$ нүктесінде нөлден өзгеше: $f'''(x) \neq 0$. Демек, локальдік экстремумнің үшінші жеткілікті шартына сәйкес берілген функцияның R^1 сан осінде экстремумі жоқ; $x = 0$ – функцияның иілу нүктесі.

Мысал. Берілген $f(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x + 5$ функциясының x^* минимум нүктесін және f^* минимум мәнін дифференциалдық есептеу әдісі бойынша табу керек.

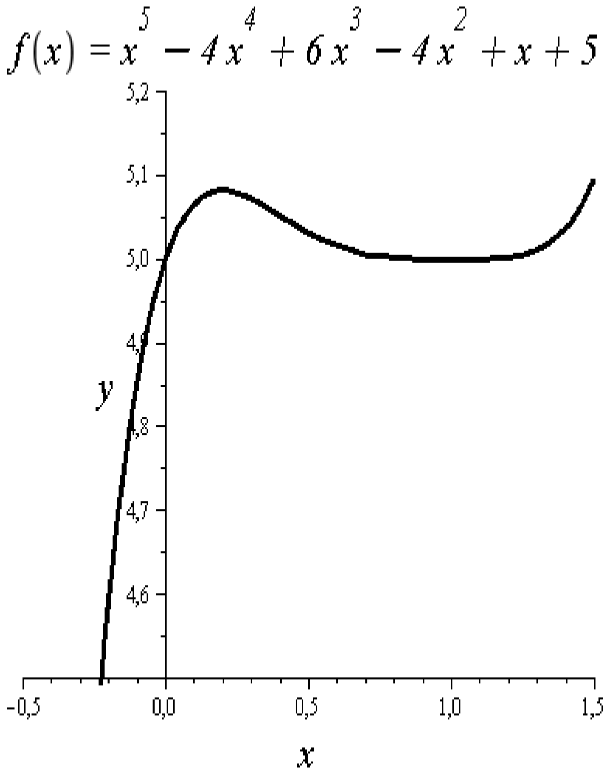
Функцияның бірінші ретті туындысын тауып нөлге теңестіргенде шығатын келесі $f'(x) = (5x-1)(x-1)^3 = 0$ теңдеуінен $x_1 = 0{,}2$ және үш еселі $x_2 = 1$ стационар нүктелерін анықтайды. Берілген функцияның сан осінің кез келген нүктесінде туындысы бар болатындықтан оның экстремумге күдікті басқа нүктесі жоқ. Стационар нүктелердегі екінші ретті $f''(x) = 4(x-1)^2(5x-2)$ туындының мәндері $f''(0{,}2) < 0$ және $f''(1) = 0$. Олай болса, локальдік экстремумнің екінші жеткілікті шартына сәйкес $x_1 = 0{,}2$ стационар нүктесінде $f(x)$ функциясы максимум мәнін қабылдайды: $f_{max} = f(0{,}2) = 5{,}08192$.

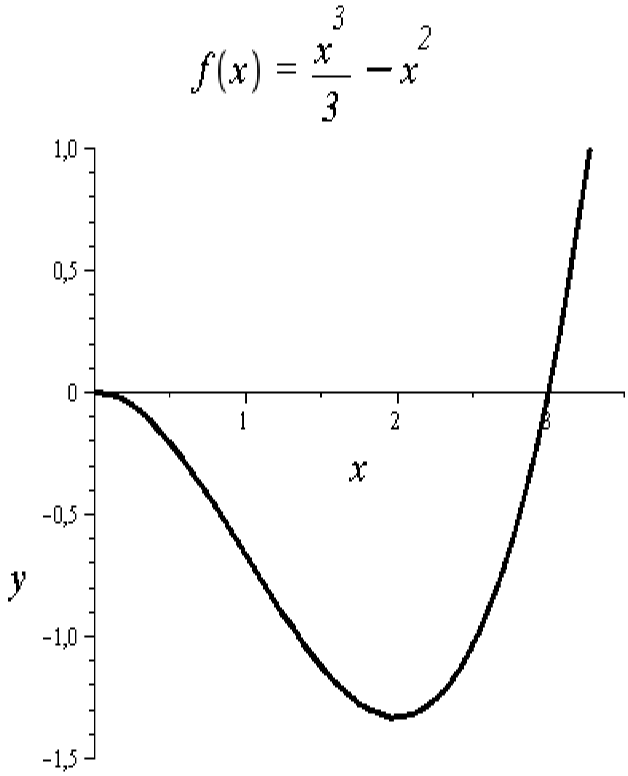
Maple:

> $eval\left(x^5 - 4\cdot x^4 + 6\cdot x^3 - 4\cdot x^2 + x + 5, x = 0.2\right);$ 5.08192

Функцияның үшінші ретті $f'''(x) = 12(x-1)(5x-3)$ туындысы табылған $x_2 = 1$ стационар нүктесінде $f'''(1) = 0$. Функцияның төртінші ретті $f^{(4)}(x) = 24(5x-4)$ туындысының сол стационар нүктедегі мәні $f^{(4)}(1) > 0$. Демек, локальдік экстремумнің үшінші жеткілікті шартына сәйкес берілген функцияның минимум нүктесі $x^* = x_2 = 1$ және минимум мәні $f^* = f(1) = 5$.

Дифференциалданатын $f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісіндегі ең кіші (ең үлкен) мәндері кесіндінің шеткі нүктелерінде немесе $f'(x) = 0$ теңдеуінің түбірі болатын стационар нүктелерде қабылданады. Олай болса, функцияның $[a, b]$ кесіндісіндегі ең кіші (ең үлкен) мәндерін табу үшін оның мәндерін кесіндідегі барлық күдікті нүктелер мен шеткі нүктелерде анықтап, оларды өзара салыстырады.





Мысал. $[1; 3]$ кесіндісінде берілген

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

функциясының экстремум мәндерін табу керек. Функцияның туындысын нөлге теңестіргенімізде шығатын $f'(x) = x^2 - 2x = 0$ теңдеуінен $x_1 = 0$ және $x_2 = 2$ стационар нүктелері анықталады. Функция R^1 сан осіндегі нүктелерде дифференциалданатын болғандықтан оның осы стационар нүктелерден басқа экстремумге күдікті нүктелері жоқ. Ал $x_1 = 0$ нүктесі берілген кесіндінің сыртында жатқандықтан әрі қарай $a = 1$, $x_2 = 2$ және $b = 3$ нүктелерін қарастырады. Функцияның бұл нүктелердегі мәндері сәйкесінше

$$f(1) = -\frac{2}{3}, \quad f(2) = -\frac{4}{3}, \quad f(3) = 0.$$

Осы мәндерді өзара салыстырып,

$$f_{min} = f(2) = -\frac{4}{3}, \quad f_{max} = f(3) = 0$$

екенін анықтайды.

Практикалық сабақ
Бір айнымалы функцияның экстремумін дифференциалдық есептеу әдісі бойынша анықтау

Мысал. $f(x) = x(x+1)^2, \ x \in D(f)$ функциясының экстремумін дифференциалдық есептеу әдісі бойынша анықтау керек.

Функцияның бірінші ретті туындысын тауып нөлге теңестіргенде шығатын келесі $f'(x) = (x+1)(3x+1) = 0$ теңдеуінен $x_1 = -1$ және үш еселі $x_2 = -1/3$ стационар нүктелерін анықтайды. Берілген функцияның сан осінің кез келген нүктесінде туындысы бар болатындықтан оның экстремумге күдікті басқа нүктесі жоқ. Стационар нүктелердегі екінші ретті $f''(x) = 6x + 4$ туындының мәндері $f''(x_1) < 0$ және $f''(x_2) > 0$. Олай болса, локальдік экстремумнің екінші жеткілікті шартына сәйкес x_1 стационар нүктесінде $f(x)$ функциясы максимум мәнін, ал x_2 стационар нүктесінде минимум мәнін қабылдайды:

$$f_{max} = f(x_1) = 0,$$

$$f_{min} = f(x_2) = -\frac{4}{27}.$$

Мысал. $f(x) = |x^3 + 2x^2 + x|$ функциясының экстремумін дифференциалдық есептеу әдісі бойынша анықтау керек.

Берілген функцияны мына түрде жазуға болады:

$$f(x) = |x|(x+1)^2 = \begin{cases} x(x+1)^2, & x \geq 0, \\ -x(x+1)^2, & x < 0. \end{cases}$$

Стационар нүктелерді табу мақсатымен функцияның бірінші ретті туындысын