ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
АБАЙ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ ПЕДАГОГИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Ф.Р. Гусманова

Оңтайландыру әдістері

Оқу құралы

Алматы, 2007

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті

Ф.Р. Гусманова

Оңтайландыру әдістері

Оқу құралы

Алматы, 2007

ББК 22.18 я73
Г94

Гусманова Ф.Р.
Г94 Оңтайландыру әдістері: Оқу құралы. – *Алматы: Абай атындағы ҚазҰПУ, 2007. – 131 б.*
ISBN 9965-14-805-8

Оқу құралында амалдарды зерттеудің негізгі бөлімдері - сызықтық программалау теориясы және сызықтық емес программалау теориясы қарастырылады. Оқу құралы жоғары оқу орындарының студенттеріне, мұғалімдерге арналған.

ББК 22.18 я73

Пікір жазғандар:
ф.-м.ғ.д., профессор **М.А.Бектемесов**
(Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті),
п.ғ.д., профессор **С.М.Кеңесбаев**
(Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық институты)

Баспаға Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің жанындағы «Білім» тобындағы мамандықтар бойынша оқу-әдістемелік секциясы және ҚР БҒМ Республикалық оқу-әдістемелік Кеңесі ұсынған.
Хаттама №4, 01.06.2007ж.

$Г\frac{1602110000}{00(05)-07}$

ISBN 9965-14-805-8

М А З М Ұ Н Ы

Алғы сөз

Амалдарды зерттеу дәстүрлі ғылым ретінде XX ғасырдың 40-жылдарында дами бастады. Осы бағытта ТМД елдерінде ең бірінші айналысқан ғалым ретінде 1975 жылы экономикада ресурстарды тиімді пайдалану бойынша Нобель сыйлығының лауреаты атанған Л.В.Канторовичті айтпай кетуге болмайды. Оның осы салада алғашқа жария көрген еңбегі – «Математические методы организации и планирования производства» 1939 жылы баспаға шығарылды. Шетелдік әріптестерімізден 1947 жылы жарияланған экстремальдық есептерді шешуге арналған Дж.Данцигтің еңбегін ескерсек, өзіміздің отандас әріптестерімізден С.А.Айсағалиевті, Т.Н.Бияровты ерекше атап айтуға болады.

Күнделікті өмірде адамзат алдында шешімді қабылдау проблемасы жиі туындайды. Өмірлік және өндірістік жағдайларда интуициялық қабылдау пайдаларды, ресурстарды және т.т. жоғалтатындай тиімді емес шешімге әкелуі мүмкін. Сондықтан, «дұрыс» шешімдерді қабылдау мақсатында, проблемаларды шешу үшін «Шешімдерді қабылдау теориясы» деп аталатын толық кешен дайындалған.

Проблеманың математикалық моделін құру мүмкін болса, онда «Амалдарды зерттеу» әдістері кеңінен пайдаланылады, ал «Оңтайландыру әдістері» осы ғылымның бір саласы ретінде қарастырылады.

Қарастырылып отырған оқу құралында сызықтық программалау есептері, сызықтық емес программалау есептері, дөңес программалау модельдері және т.с.с. мәселелер қарастырылған. Бұл оқу құралы жоғары оқу орындарының экономикалық, техникалық және педагогикалық мамандықтарының студенттеріне арналған. Күрделі экономикалық процесстерді зерттеу және инженерлік - техникалық есептерді шығару үшін оңтайландыру әдістері кеңінен қолданылады.

Оқу құралындағы материалдар құраушының көп жылғы еңбегінің нәтижесінде, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің қаржы-экономикалық факультетінің, физика-математика факультетінің студенттеріне оқылған дәрістің негізінде жинақталып отыр.

Құрастырушының көздеген мақсаты - қазақша оқу құралдарының аздығын ескеріп, қазақ мектептерін бітіріп, жоғары оқу орнына түскен студенттерге қазақ тілінде оқу құралын жазып, қазақша оқып білім алуға мүмкіндік беру. Бұл оқу құралында келтірілген тиісті түсініктер студенттермен қатар аспиранттарға, магистранттарға және мұғалімдерге де азды-көпті пайдасы тиер деп ойлаймын.

Автор пікір жазушыларға құнды пікірлер айтқандары үшін үлкен ризашылық білдіріп, алғыс айтады.

I БӨЛІМ. СЫЗЫҚТЫҚ ПРОГРАММАЛАУ

1 тарау. Сызықтық программалау есебінің жалпы қойылуы

1.1. Сызықтық программалау теориясында кездесетін сызықтық алгебраның және дөңес анализдің негізгі ұғымдары

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

Сызықтық кеңістік ұғымы сызықтық алгебрада іргелі ұғым болып табылады. Қандай да бір элементтердің (векторлар немесе нүктелер деп аталатын) жиынтығы *сызықтық кеңістік* ұғымын береді. Сызықтық кеңістік элементтер үшін қосу амалын, нақты санға (скаляр) көбейту амалын береді, және амалды орындау нәтижесінде алынатын элементтер де анықтамаға сай берілген кеңістікте жату керек.

Нақты түзу, жазықтық, геометриялық үш өлшемді кеңістік - сызықтық кеңістіктің дербес жағдайлары болып табылады.

$\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + ... + \alpha_p d_p$ векторы - коэффициенттері $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ болатын $d_1, d_2, ..., d_p$ векторларының *сызықтық комбинациясы* деп аталады.

Барлық компоненттері нөлге тең вектор *нөлдік вектор* деп аталады.

Егер $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + ... + \alpha_p d_p$ сызықтық комбинациясы нөлдік векторға тең болатындай, яғни $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + ... + \alpha_p d_p = \mathbf{0}$, бір мезгілде нөлге тең емес $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ сандары бар болса, онда сызықтық кеңістіктің $d_1, d_2, ..., d_p$ векторлар жүйесі *сызықты тәуелді* деп аталады. Кері жағдайда, яғни $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ коэффициенттерінің барлығы нөлге тең болғанда ғана берілген вектордың сызықтық комбинациясы нөлдік векторға тең болса, $d_1, d_2, ..., d_p$ векторлар жүйесі *сызықты тәуелсіз* деп аталады.

Берілген сызықтық кеңістікте сызықты тәуелсіз жүйені құра алатын векторлардың мүмкін болатын ең көп саны *кеңістіктің өлшемділігі* деп аталады, ал кез келген сызықты тәуелсіз векторлар саны өлшемділікке тең болатындай сызықты тәуелсіз векторлар жүйесі – *кеңістіктің базисі* деп аталады.

Сызықтық кеңістік көбінесе R^n арқылы белгіленеді, мұндағы n - оның өлшемділігі.

Сызықтық кеңістіктің қасиеттерін қанағаттандыратын берілген сызықтық кеңістіктің кез келген ішкі жиыны *сызықтық ішкі кеңістік* деп аталады. Қандайда бір $L \subset R^n$ сызықты ішкі кеңістікті $d \in R^n$ векторына жылжыту арқылы алынатын, H жиыны ($H = L + d$) – *аффиндік жиын* (кеңістік) деп аталады.

Егер қандай да бір R^n сызықтық кеңістік қарастырылса, онда осы кеңістікке тиісті 1 өлшемді аффиндік жиын *түзулер* деп аталады, ал $(n-1)$ өлшемді аффиндік жиын – *гипержазықтық* деп аталады. R^3 үшөлшемді геометриялық кеңістік үшін қарапайым жазықтық – гипержазықтық, ал түзу - R^2 жазықтығы үшін гипержазықтық болып табылады. Кез келген гипержазықтық сызықтық кеңістікті екі жартыкеңістікке бөледі.

R^n сызықтық кеңістігі берілсін. Егер осы кеңістіктегі V векторлар (нүктелер) жиынының кез келген екі нүктесі арқылы өтетін түзудің кесіндісі толығымен осы кеңістікте жатса, онда V векторлар (нүктелер) жиыны *дөңес* деп аталады, басқаша айтқанда $a \in V$, $b \in V$ $\Rightarrow$ $x = (1-\lambda)a + \lambda b \in V$, мұндағы $0 \le \lambda \le 1$.

Егер $\alpha_i \ge 0$, $i = \overline{1,p}$ және $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ болса, онда $d_1, d_2, ..., d_p$ векторларының $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i d_i$ сызықтық комбинациясы *дөңес* деп аталады.

Егер $x_0 \in K$ болса, және қандай да бір x_1 нүктесі K жиынында ($x_1 \in K$) жататындығынан, K жиынында, сондай-ақ, x_0 нүктесінен басталатын және x_1 нүктесі арқылы өтетін сәуле жататындығы алынса, яғни

$$\{x \in R^m \mid x = (1-\alpha)x_0 + \alpha x_1, \quad \alpha \ge 0\} \subset K$$

немесе

$$\{x \in R^m \mid x = x_0 + \alpha(x_1 - x_0), \quad \alpha \ge 0\} \subset K$$

онда K жиыны төбесі x_0 нүктесіндегі *конус* деп аталады.

Бір нүктеден тарайтын сәулелердің ақырлы жиынының дөңес қабықшасы берілген нүктеде төбесі орналасқан *көпжақты дөңес конус* деп аталады.

Кез келген $D \subseteq R^n$ жиыны бар барлық дөңес жиындардың қиылысуы оның *дөңес қабықшасы* деп аталады және ($cone\, D$, $aff\, D$) арқылы белгіленеді. Егер Q жиыны дөңес болса, және $D \subset Q$ болса, онда анықтама бойынша $conv\, D \subset Q$, яғни $conv\, D$ - D жиыны бар ең кіші дөңес жиын. $conv\, D = D$ болғанда ғана D жиыны дөңес болады. Осындай айтылым дөңес конус және конустық қабықша, аффиндік жиын және аффиндік қабықша ұғымына да қатысты.

$U_\varepsilon(X) \cap aff\, D \subset D$ орындалатындай $X \in D \subset R^n$ нүктесінің $U_\varepsilon(X)$ маңайы бар болса, онда X нүктесі D жиынының салыстырмалы ішкі нүктесі деп аталады. D жиынының барлық салыстырмалы ішкі нүктелерінің жиынтығы оның салыстырмалы ішкі жағы деп аталады жəне $ri\,D$ арқылы белгіленеді. Егер $D = ri\,D$ болса, D жиыны салыстырмалы ашық деп аталады.

Ақырлы жиынның дөңес қабықшасы *дөңес көпжақ* деп, ал ақырлы санды тұйық жартыкеңістіктердің бос емес қиылысуы *көпжақты дөңес жиын* деп аталады.

Егер V дөңес жиынның v нүктесі шеттері V жиынына жататын ешқандайда кесіндінің ішкі нүктесі болып табылмаса, онда v нүктесі V дөңес жиынының *бұрыштық нүктесі* деп аталады.

Дөңес көпжақтың бұрыштық нүктелері оның *төбелері* деп аталады.

Егер n айнымалысы бар m сызықтық теңдеулер жүйесінің $m<n$ айнымалыларының коэффициенттерінен құрылған матрицаның анықтауышы нөлден өзге болса, онда кез келген m айнымалысы *негізгі* (немесе *базистік*) деп аталады. Қалған $n-m$ айнымалы *негізгі емес* (немесе *бос*) айнымалы деп аталады.

n айнымалыдан тұратын әртүрлі топ негізгі болуы мүмкін. Негізгі айнымалылардың топтарының мүмкін болатын максимал саны C_n^m үлестіру санына тең. m айнымалылардағы коэффициенттерден тұратын матрицаның анықтауышы нөлге тең болса, онда негізгі айнымалылар тобының саны C_n^m санынан аспайды.

$m<n$ болғанда (1.1) жүйені шешу үшін келесі теорема орындалады.

Теорема 1.1. Егер n айнымалысы бар m сызықтық теңдеулер жүйесі үшін айнымалылардың коэффициенттерінен тұратын матрицаның рангі m-ге тең болса, яғни кем дегенде бір негізгі айнымалылар тобы болса, онда бұл жүйе анықталмаған болып табылады, және негізгі емес айнымалылардың әрбір еркін алынған мәндер жиынына жүйенің бір шешімі сәйкес келеді.

Дәлелдеуі. $x_1 x_2, ..., x_m$ - негізгі айнымалылар (егер көрсетілген айнымалылар негізгі болмаса, онда сәйкес айнымалылардың нөмірін өзгертуге болады) болсын, яғни матрицаның анықтауышы нөлге тең болсын:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = 0 .$$

(1.1) жүйенің сол жағында $x_1, x_2, ..., x_m$ айнымалылары бар мүшелерді қалдырамыз, ал $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ айнымалылары бар мүшелерді оң жағына шығарамыз. Сонда келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - ... - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - ... - a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mm}x_m = b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - ... - a_{mn}x_n. \end{cases}$$

$x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ негізгі емес айнымалыларға кез келген мәнді бере отырып, жаңа әрбір мән берген сайын $b_1', b_2', ..., b_m'$ бос мүшелері бар жаңа жүйе аламыз. Алынған жүйелердің әрқайсысының анықтауышы бір мәнге тең, және $|A| \neq 0$, демек жоғары математика курсынан белгілі Крамер теоремасы бойынша осы жүйелердің әрқайсысының жалғыз шешімі бар. Осылайша алынған жүйелер ақырсыз көп болғандықтан, (1.1) жүйенің шешімі де ақырсыз жиынды береді.

Теорема дәлелденді.

Егер (1.1) жүйенің $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ шешімі тек қана теріс емес компоненттерден тұрса, яғни кез келген, $j = 1, 2, ..., n$ үшін $x_j \geq 0$ болса, онда (1.1) жүйенің $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ шешімі *жарамды* деп аталады. Кері жағдайда шешім *жарамды емес* деп аталады.

n айнымалысы бар m сызықтық теңдеулер жүйесінде барлық $n-m$ негізгі емес айнымалылар нөлге тең болған жағдайдағы шешім *базистік шешім* деп аталады. Сызықтық программалау есебінде үйлесімді базистік шешім (немесе тірек жоспары) үлкен роль атқарады. Базистік шешімдегі негізгі айнымалылардың кем дегенде біреуі нөлге тең болса, онда шешім *өзгеше* деп аталады.

(1.1) үйлесімді жүйенің ақырсыз көп шешімі бар, олардың ішіндегі базистік шешім – ақырлы сан, C_n^m санынан аспайды.

1.2. Сызықтық оңтайландыру модельдерін құру мысалдары

Кез келген салада зерттеудің сандық әдісін пайдалану үшін барлық уақытта қандай да бір математикалық модель талап етіледі. Модель құрған кезде нақты құбылыс (біздің жағдайда амалдар) ықшамдалынады, бір сұлбаға келтіріледі, және бұл сұлба (құбылыс макеті) қандай да бір математикалық аппараттың көмегімен сипатталады. Математикалық модель қаншалықты дұрыс таңдалынса, соншалықты оны зерттеу сәтті болады.

Математикалық модельді құрудың жалпы тәсілі жоқ. Әрбір нақты жағдайда модель зерттеу есебін ескере отырып, амалдардың түрлерінен, оның мақсаттық бағыттарынан (қандай параметрлерді анықтау және қандай факторлардың әсер етуі талап етіледі) таңдалынып құрылады.

Математикалық модель құбылыстың маңызды ерекшеліктерін, барлық мәнді факторларын бейнелеп көрсету керек.

Жалпы оқулықтарда модель ұғымына бір-бірінен айырмашылығы бар әртүрлі анықтамалар беріледі. Мысал ретінде бала кезімізде қағаздан жасап ұшыратын көгершінді, ойыншық ұшақты – ұшақтың моделі деп, глобусты, географиялық картаны - жер шарының моделі деп қарастыруға болады. Ал мектеп курсынан белгілі $s = vt$ - жол формуласы математикалық модель болып табылады. Жалпы модель деп қандайда бір объектіні кейбір тілдің көмегімен жуықтап қайтадан құрғандағы объектінің шартты бейнесін түсінеміз. Экономикалық-математикалық модельдерде мұндай объект – экономикалық үрдіс, ал тіл – классикалық немесе арнайы жазылған математикалық әдістер болып табылады.

Экономикалық-математикалық модель – зерттелетін экономикалық үрдістің немесе объектінің математикалық сипаттамасы. Бұл модель математикалық қатынастардың көмегімен абстрактілік түрде экономикалық үрдістің заңдылығын өрнектейді. Экономикалық-математикалық модельдеудің негізгі үш кезеңін қарастыруға болады:

1 кезең. Зерттеу есебінің мақсаты қойылады; экономикалық модель түрінде объектіні сапалы сипаттау жүргізіледі.

2 кезең. Зерттелетін объектінің математикалық моделі құрылады; зерттеу әдістеріне таңдау (немесе арнайы әдіс жазылады) жүргізіледі; модельді ЭЕМ программалайды, бастапқы деректер дайындалады.

3 кезең. Математикалық модельге талдау жүргізіледі; алынған нәтижелер өңделінеді және талдау жүргізіледі.

Практикада жиі кездесетін сызықтық программалау есептерін қарастырайық.

1. *Өндірісті жоспарлау есебі* (ресурстарды пайдалану жайындағы есеп).

Кәсіпорын үш түрлі U_1, U_2, U_3 өнім өндіру керек. Өнімнің әр түрі бойынша жоспар бекітілген: U_1 өнімін α_1 бірлігінен кем емес, U_2 өнімін α_2 бірлігінен кем емес, U_3 өнімін α_3 бірлігінен кем емес даярлау керек. Жоспар артығымен орындалуы мүмкін, бірақ белгілі шартты қанағаттандырады; сұраныс шарты әрбір типтегі өндірілген бірлік санын шектейді: әр қайсысы сәйкес β_1, β_2, β_3 бірліктерінен аспауы керек. Өнімдерді дайындау үшін қандайда бір шикі заттар қажет болады; айталық төрт түрлі v_1, v_2, v_3, v_4 шикі зат пайдаланылсын, және олардың қорлары b_1, b_2, b_3, b_4 бірлік сандарымен шектелген. Енді өнімнің әр түрін даярлау үшін жұмсалатын шикі заттың әр қайсысының қажетті бірлік санын көрсету керек. U_j ($j=1,2,3$) өнім бірлігін даярлауға жұмсалатын v_i ($i=1,2,3,4$) түріндегі шикі зат бірлік санын a_{ij} арқылы белгілейік. a_{ij} санында бірінші индекс - өнім түрі, екінші индекс – шикі зат түрін білдіреді. a_{ij} мәндерін кестеге жазамыз:

Шикі зат		Өнім	
	U_1	U_2	U_3
v_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
v_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
v_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}
v_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}

U_1 өнімінің бір бірлігін даярлап жүзеге асырғанда кәсіпорынға c_1 пайда, U_2 өнімінің бір бірлігінен - c_2 пайда, U_3 өнімінің бір бірлігінен - c_3 пайда түседі.

Өндірілген өнімді жүзеге асырғанда пайда максималды болатындай өнімді өндіру жоспарын құру керек.

Шығарылуы. Есептің экономикалық-математикалық моделін құру керек (есепті сызықтық программалау есебі түрінде жазу керек).

x_1, x_2, x_3 арқылы өндіруге жоспарланған сәйкес U_1, U_2, U_3 өнім бірліктерінің санын белгілейміз. Жоспар тапсырысының міндетті түрде орындалуы келесі үш шектеулер-теңсіздіктер түрінде жазылады:

$$x_1 \ge \alpha_1, \; x_2 \ge \alpha_2, \; x_3 \ge \alpha_3. \qquad (1.2)$$

Артық өнімді шығармау үшін тағы да үш шектеулер-теңсіздіктерді жазамыз:

$$x_1 \le \beta_1, \; x_2 \le \beta_2, \; x_3 \le \beta_3. \qquad (1.3)$$

Практикада, көбінесе x_i $(i=\overline{1,n})$ айнымалыларына тек теріс еместік шарты қойылады, яғни $x_i \ge 0$.

Сонымен қатар өнімді өндіру үшін бізге шикі зат қоры жеткілікті болу керек. Өнімді даярлау үшін v_1 ресурсының $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ бірлігі, v_2 ресурсының $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$ бірлігі, v_3 ресурсының $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$ бірлігі, v_4 ресурсының $a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3$ бірлігі талап етіледі; v_1, v_2, v_3, v_4 ресурстарын тұтыну олардың қорларынан, сәйкес b_1, b_2, b_3, b_4 сандарынан аспау керек болғандықтан, ресурстарды тұтынумен олардың қорларының арасында байланыс келесі шектеулер-теңсіздіктер арқылы өрнектеледі:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \le b_4. \end{cases} \qquad (1.4)$$

(x_1, x_2, x_3) жоспарымен келетін пайда келесі түрде анықталады:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3. \qquad (1.5)$$

Сонымен, есептің экономикалық-математикалық моделі: *(1.4) шектеулер жүйесін қанағаттандыратын, (1.2), (1.3) (теріс еместік) шарттар орындалатындай және (1.5) функция максимум мәнді қабылдайтындай өнім өндірудің $X = (x_1, x_2, x_3)$ жоспарын табу керек.*

2. *Азық рационы жайындағы есеп.*

Ферма сауда істерін жүргізу мақсатында малдарды семіртумен айналысады. Айталық азық-түліктің төрт түрі бар болсын: λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, әрбір азық-түлік бірлігінің құны сәйкес c_1, c_2, c_3, c_4 мәндеріне тең. Осы азық-түліктерден азық рационын даярлау керек, бұл азықтың әрқайсысында А витамині - b_1 бірліктен кем болмау керек, В витамині - b_2 бірліктен, С витамині - b_3 бірліктен кем болмау керек. λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 азық-түліктері үшін қажетті витаминнің бірлік сандары белгілі, төмендегі кестеде келтірілген, мұндағы a_{ij} $\left(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,4}\right)$ қандайда бір белгілі сандар, бірінші индекс азық-түліктің нөмірін, екінші индекс – витаминнің нөмірін көрсетеді.

Витаминдер	Азық-түлік			
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
А витамині	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
В витамині	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
С витамині	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

Құны минималды болатындай, азықта кездесетін витаминдердің барлық түрі көрсетілген b_1, b_2, b_3 мөлшерінен кем болмайтындай азық рационын жасау керек.

Шығарылуы. Есептің экономикалық-математикалық моделін құру керек.

x_1, x_2, x_3, x_4 арқылы рационға енетін өндіруге жоспарланған сәйкес λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 азық-түліктің бірліктерінің санын белгілейміз. Сонда бұл рацион А витаминінің $(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4)$ бірлігін, В витаминінің $(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4)$ бірлігін, С витаминінің $(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4)$ бірлігін қамтиды. Витаминдердің бірлік сандары сәйкес b_1, b_2, b_3 мөлшерлерінен кем болмау керек болғандықтан, келесі теңсіздіктер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4 \ge b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4 \ge b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4 \ge b_3. \end{cases} \tag{1.6}$$

Есептің шарты бойынша x_1, x_2, x_3, x_4 айнымалылары теріс болуы мүмкін емес, яғни

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \tag{1.7}$$

Азық рационының жалпы құны:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4. \tag{1.8}$$

Сонымен есептің экономикалық-математикалық моделі: *(1.8) функция минимум мәнін қабылдайтындай (1.6) жүйені қанағаттандыратындай, (1.7) теріс еместік шарты орындалатындай $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ азық рационын құру керек.*

3. *Қуаттылықты пайдалану жайындағы есеп.*

Тоқыма фабрикасында үш түрлі станок бар, олардың саны сәйкес N_1, N_2, N_3 дана. Станоктар әр түрлі өнімділікпен P_1, P_2, P_3, P_4 төрт түрлі мата шығара алады. Станоктардың өнімділігінің a_{ij} мәліметтері келесі кестеде берілген (бірінші индексі – станок типі, екінші индексі – мата түрі):

Станок типі	Маталар түрі P_1	P_2	P_3	P_4
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

P_1 түріндегі матаның әрбір метрі фабрикаға - c_1 табысты, P_2 түріндегі матаның әрбір метрі фабрикаға - c_2 табысты, P_3 түріндегі матаның әрбір метрі фабрикаға - c_3 табысты, P_4 түріндегі матаның әрбір метрі фабрикаға - c_4 табысты әкеледі. Фабрика бекітілген жоспар бойынша жұмыс істейді. Осы жоспарға сәйкес фабрика айына P_1 түріндегі матадан b_1 метрден кем емес, P_2 түріндегі матадан b_2 метрден кем емес, P_3 түріндегі матадан b_3 метрден кем емес, P_4 түріндегі матадан b_4 метрден кем емес мата дайындап шығару керек, матаның әрбір түрінің метр саны сәйкес β_1, β_2, β_3, β_4 метрден аспау керек. Сонымен қатар, барлық станоктар жұмыс істеп тұру керек.

Жалпы айлық табыс максимум болатындай P_1, P_2, P_3, P_4 маталарын шығаратындай станоктардың жұмыс істеуін жоспарлау керек.

Шығарылуы. x_{ij} $\left(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,4}\right)$ арқылы P_j матасын дайындайтын i-ші типті станок санын белгілейміз (мысалы, x_{23}-P_3 матасын дайындайтын 2 типті станок саны). x_{ij} айнымалыларына қойылатын шектеулерді жазайық. Алдымен жоспардың орындалуын қамтамасыз етеміз. Бұл бізге келесі шектеулер-теңсіздіктерді береді:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+a_{31}x_{31}\ge b_1, \\ a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{32}x_{32}\ge b_2, \\ a_{13}x_{13}+a_{23}x_{23}+a_{33}x_{33}\ge b_3, \\ a_{14}x_{14}+a_{24}x_{24}+a_{34}x_{34}\ge b_4. \end{cases} \tag{1.9}$$

Осыдан кейін жоспардың артық орындалмауын шектейміз:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+a_{31}x_{31}\le \beta_1, \\ a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{32}x_{32}\le \beta_2, \\ a_{13}x_{13}+a_{23}x_{23}+a_{33}x_{33}\le \beta_3, \\ a_{14}x_{14}+a_{24}x_{24}+a_{34}x_{34}\le \beta_4. \end{cases} \tag{1.10}$$

Енді жабдықтардың санын оның толық жүктелуімен байланыстыратын шектеулерді жазамыз. Барлық маталарды даярлауда жұмыс істейтін 1 типтегі станоктардың жалпы саны - N_1-ге, 2 типтегі станоктардың жалпы саны - N_2-ге, 3 типтегі станоктардың жалпы саны - N_3-ке тең, яғни:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=N_1, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=N_2, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=N_3. \end{cases} \qquad (1.11)$$

Осыдан кейін барлық түрдегі маталарды өндіргендегі түсетін жалпы табысты жазамыз. Барлық станоктар бірігіп өндірген P_1 матасының метр саны $(a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+a_{31}x_{31})$ мәніне, ал түсетін табыс $c_1\cdot(a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+a_{31}x_{31})$ мәніне, P_2 матасының метр саны $(a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{32}x_{32})$ мәніне, ал түсетін табыс $c_2\cdot(a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{32}x_{32})$ мәніне, P_3 матасының метр саны $(a_{13}x_{13}+a_{23}x_{23}+a_{33}x_{33})$ мәніне, ал түсетін табыс $c_3\cdot(a_{13}x_{13}+a_{23}x_{23}+a_{33}x_{33})$ мәніне, P_4 матасының метр саны $(a_{14}x_{14}+a_{24}x_{24}+a_{34}x_{34})$ мәніне, ал түсетін табыс $c_4\cdot(a_{14}x_{14}+a_{24}x_{24}+a_{34}x_{34})$ мәніне тең. Сонда бекітілген жоспарда фабриканың бір айдағы жалпы табысы:

$$F=c_1\cdot(a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+a_{31}x_{31})+c_2\cdot(a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{32}x_{32})+$$
$$+c_3\cdot(a_{13}x_{13}+a_{23}x_{23}+a_{33}x_{33})+c_4\cdot(a_{14}x_{14}+a_{24}x_{24}+a_{34}x_{34}). \qquad (1.12)$$

Сонымен қатар, есептің шарты бойынша

$$x_{ij}\geq 0 \quad \left(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,4}\right). \qquad (1.13)$$

Есептің экономикалық-математикалық моделі: (1.12) функция максимум мәнін қабылдайтындай (1.9), (1.10) шектеулер-теңсіздіктер жүйесін, (1.11) шектеулер-теңдеулер жүйесін қанағаттандыратындай, (1.13) теріс еместік шарты орындалатындай

$$X=(x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{21},x_{22},x_{23},x_{24},x_{31},x_{32},x_{33},x_{34})$$

шешімін табу керек.

4. *Материалдарды пішу жайындағы есеп.*

Бір үлгідегі материалды пішу (кесу, өңдеу) үшін a бірлік мөлшеріндегі материал түседі. Осы материалдан саны $b_1, b_2, ..., b_l$ сандарына пропорционал болатындай l әр түрлі іріктелген өнім дайындау талап етіледі (комплектілеу шарты). Материалдың әрбір бірлігі n әр түрлі тәсілдермен пішілуі мүмкін, және i-ші $(i=1,2,...,n)$ тәсілді пайдалану k-шы $(k=1,2,...,l)$ өнімнің a_{ik} бірлігін береді.

Комплект саны максимум болатындай пішу жоспарын табу керек.

Шығарылуы. Есептің экономикалық-математикалық моделін құрамыз. x_i арқылы i-ші тәсілмен пішілетін материалдың бірлік санын, x арқылы дайындалатын өнімнің комплект санын белгілейміз.

Материалдың жалпы мөлшері әр түрлі тәсілдермен пішілетін оның бірліктерінің қосындысына тең болғандықтан

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a. \qquad (1.14)$$

Комплектілік талабы келесі теңдеумен өрнектеледі:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} = b_k x \quad (k = 1, 2, ..., l). \tag{1.15}$$

Есептің мағынасы бойынша $x_i \geq 0 \; (i = 1, 2, ..., n)$.

Сонымен, берілген есептің экономикалық-математикалық моделі: *(1.14), (1.15) теңдеулер жүйесін және теріс еместік шартын қанағаттандыратын және $F = x$ функциясы максимум мәнді қабылдайтын $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ шешімін табу керек.*

1.3. Сызықтық программалаудың жалпы есебі

m сызықтық теңдеулерден және теңсіздіктерден тұратын, және n айнымалысы бар жүйе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ .... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \leq b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + ... + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2}, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.16}$$

мен

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{1.17}$$

сызықтық функциясы берілсін.

Сызықтық программалау есебін келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, ..., k), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = k+1, k+2, ..., m) \end{cases} \tag{1.16'}$$

$x_j \geq 0 \; (j = 1, 2, ..., l; \quad l \leq n)$.

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \; (\textit{немесе} \to \min) \tag{1.17'}$$

(1.16) жүйеде алғашқы k шектеулер теңсіздік түрінде, ал келесі $m-k$ шектеулер теңдік түрінде берілсін. Егер шектеулер бастапқы берілуінде басқаша орналасса, орындарын ауыстыру нәтижесінде айтылған түрге келтіруге болады. Теңсіздік таңбасына келсек, жүйенің сол жағы оң жағынан кіші не тең болсын дейміз, егер қандай да бір шектеуде керісінше болса, яғни шектеудің сол жағы оң жағынан үлкен не тең болса, сол шектеуді «-1»-ге көбейту арқылы қажетті таңбамызды аламыз.

Сызықтық программалау есебінің қойылуы:

(1.17) сызықтық функция тиімді (яғни, максималды немесе минималды) мәнді қабылдайтындай және

$$x_j \geq 0,\ (j=1,2,...,l;\ \ l \leq n) \quad . \qquad (1.18)$$

шартын қанағаттандыратындай (1.16) жүйенің $X=(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ шешімін табу қажет.

Экстремумды (максимум немесе минимум) іздеу типін таңдау салыстырмалы сипатта болады. Себебі, $F=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ функциясының максимумын іздеу $-F=-(c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n)=\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$ функциясының минимумын іздеумен пара-пар.

(1.16) жүйе *шектеулер жүйесі* деп, F функциясы *сызықтық функция* немесе *мақсат функциясы* деп, ал (1.18) шарт *теріс еместік шарты* деп аталады.

(1.18) шартты қанағаттандыратын, (1.17) сызықтық функция тиімді мәнді (максималды немесе минималды) қабылдайтындай (1.16) шектеулер жүйесінің шешімі *тиімді шешім* (немесе *тиімді жоспар*) деп аталады.

«Шешім» және «жоспар» терминдері синоним. Есептің формальды жағы (математикалық шешімі) қарастырылғанда шешім термині, ал жоспар термині - мағынасы (экономикалық интерпретациясы) қаралғанда жиі қолданылады.

Теорема 1.2. Тиімді шешім базистік шешім болып табылады.

Дәлелдеуі. Айталық X' нүктесінде (1.16)-(1.17) есептегі $f(X)$ мақсат функциясы минималды (максималды) мәнді қабылдасын. X' нүктесі *жарамды* D мәндер облысындағы көпжақтың төбесі емес деп ұйғарайық. $X_1, X_2, ..., X_n$ нүктелері D облысындағы көпжақтың төбелері болсын. Сонда (D облысының дөңестігін ескерсек) X' нүктесін $X_1, X_2, ..., X_n$ нүктелерінің сызықтық комбинациясы түрінде беруге болады, яғни

$$X'=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+...+\alpha_nX_n=\sum_{j=1}^{n}\alpha_jX_j,\ \text{мұндағы}\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1,\ \alpha_j \geq 0,\ j=1,2,...,n.$$

Мақсат функциясының сызықтылығынан келесі қатынасты аламыз:

$$f(X')=\alpha_1 f(X_1)+\alpha_2 f(X_2)+...+\alpha_n f(X_n).$$

$$W=\max\{f(X_1), f(X_2), ..., f(X_n)\}$$

айнымалысын енгіземіз.

Сонда

$$f(X') \leq \alpha_1W+\alpha_2W+...+\alpha_nW=W,$$

бірақ, X' нүктесі $f(X)$ мақсат функциясының экстремум нүктесі екенін ескерсек

$$f(X')=W.$$

W - D облысының қандай да бір төбелерінің біреуіне сәйкес келетін мақсат функциясының мәні болғандықтан X' нүктесі D облысындағы көпжақтың төбелерінің бірімен беттеседі, және жарамды D мәндердің дөңес көпжақты облысының төбесі болып табылатындықтан базистік шешім болады.

Теорема дәлелденді.

Егер сызықтық программалау есебінің барлық айнымалылары теріс еместік шартты қанағаттандырса, және (1.16) шектеулер жүйесі тек қана теңсіздіктерден тұрса, онда сызықтық программалау есебі *стандартты* немесе *симметриялы* деп аталады.

Егер сызықтық программалау есебінің барлық айнымалылары теріс еместік шартты қанағаттандырса, және (1.16) шектеулер жүйесі тек қана теңдіктерден тұрса, онда сызықтық программалау есебі *канондық* немесе *негізгі* деп аталады.

Егер сызықтық программалау есебінің барлық айнымалылары теріс еместік шартты қанағаттандырса, және (1.16) шектеулер жүйесі теңдеулерден және теңсіздіктерден тұрса, онда сызықтық программалау есебі *жалпы түрде берілген* деп аталады.

Теорема 1.3. n - өлшемді дөңес көпжақ өзінің бұрыштық нүктелерінің дөңес сызықтық комбинациясы болып табылады.

Дәлелдеуі. Қарапайымдылық үшін $n=2$ болсын, ал көпжақ ретінде $X_1X_2X_3$ үшбұрышын қарастырайық. Үшбұрыштың кез келген X нүктесі арқылы X_1X_4 кесіндісін жүргіземіз. X нүктесі осы кесіндіде жатқандықтан

$$X=\alpha_1X_1+\alpha_4X_4,$$

мұндағы $\alpha_1\geq 0$, $\alpha_4\geq 0$, $\alpha_1+\alpha_4=1$.

X_4 нүктесі X_2X_3 кесіндісінде жатыр, демек, $X_4=\alpha_2X_2+\alpha_3X_3$, мұндағы $\alpha_2\geq 0$, $\alpha_3\geq 0$, $\alpha_2+\alpha_3=1$.

X_4 мәнін X өрнегіне қойып, келесі қатынасты аламыз:

$$X=\alpha_1X_1+\alpha_4X_4=\alpha_1X_1+\alpha_4\cdot(\alpha_2X_2+\alpha_3X_3)=\alpha_1X_1+\alpha_2\alpha_4X_2+\alpha_3\alpha_4X_3.$$

Белгілеулер енгіземіз: $t_1=\alpha_1$, $t_2=\alpha_2\alpha_4$, $t_3=\alpha_3\alpha_4$.

Сонда,

$$X=t_1X_1+t_2X_2+t_3X_3,$$

мұндағы $t_1\geq 0$, $t_2\geq 0$, $t_3\geq 0$, $t_1+t_2+t_3=1$.

Сонымен, X нүктесі $X_1X_2X_3$ үшбұрышының бұрыштық нүктелерінің (төбелерінің) дөңес сызықтық комбинациясы.

Теорема дәлелденді.

Теорема 1.4.

$$\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+...+\alpha_{in}x_n\leq b_i \tag{1.19}$$

теңсіздігінің кез келген $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ шешіміне

$$x_{n+i}\geq 0 \tag{1.20}$$

теңсіздігі орындалатын

$$\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+...+\alpha_{in}x_n+x_{n+i}=b_i \tag{1.21}$$

теңдеуінің белгілі бір $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; \alpha_{n+i})$ шешімі сәйкес келеді, және керісінше, (1.21) теңдеудің әрбір $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; \alpha_{n+i})$ шешіміне және (1.20) теңсіздікке (1.19) теңсіздіктің белгілі бір $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ шешімі сәйкес келеді.

Теореманы дәлелдеуді оқырманның өзіне ұсынып, теореманы дәлелдеусіз қабылдаймыз.

Осы теореманы пайдалана отырып стандартты программалау есебін канондық түрге келтірейік. Айталық, программалау есебі стандартты түрде берілсін. Шектеулер жүйесі төмендегі түрде берілген:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

Стандартты программалау есебін канондық түрге келтіру үшін теорема бойынша шектеулер жүйесіне теріс емес $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ қосымша айнымалыларын енгіземіз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + \quad + x_{n+2} & = b_2, \\ .... & \\ a_m x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + \qquad + x_{n+m} & = b_m. \end{cases}$$

Қарастырылып отырған есепте барлық теңсіздіктердің таңбасы «$\le$» болғандықтан, қосымша айнымалылар «+» таңбасымен енгізіледі, ал егер теңсіздіктердің таңбасы «$\ge$» болса, онда қосымша айнымалылар «-» таңбасымен енгізіледі.

1.4. Сызықтық программалау есебінің қасиеттері

Осыған дейін біз сызықтық программалау есебінің әр түрлі формаларын, яғни кез келген сызықтық программалау есебі жалпы, канондық немесе стандартты түрде берілуі мүмкін болатынын қарастырдық.

Сызықтық программалау есептерінің және оны шешу әдістерінің қасиеттерін негіздеу үшін есептің канондық жазылуының тағы екі жазылу түрін қарастырайық.

1. *Матрицалық жазылу түрі*:

$$F = CX \to \max(\min), \tag{1.22}$$

$$AX = B, \tag{1.23}$$

$$X \ge \mathbf{0}, \tag{1.24}$$

мұндағы

$$C=(c_1,c_2,...,c_n);\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Бұл жерде C - матрица жол, A - жүйе матрицасы, X айнымалылардың матрица-бағаны, B - бос мүшелердің матрица-бағаны.

2. *Векторлық жазылуы.*

$$F=CX\to\max(\min) \tag{1.25}$$

$$P_1x_1+P_2x_2+...+P_nx_n=P, \tag{1.26}$$

$$X\geq\mathbf{0}, \tag{1.27}$$

мұндағы CX - $C=(c_1,c_2,...,c_n)$ және $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ векторларының скаляр көбейтіндісі, $P_1,P_2,...,P_n$ және P векторлары сәйкес айнымалылардың коэффициенттерінен және бос мүшелерден тұрады:

$$P_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ ...,\ P_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

$X\geq\mathbf{0}$ векторлық теңсіздігі X векторының барлық коэффициенттері теріс емес екендігін білдіреді, яғни $x_j\geq 0$, $j=1,2,...,n$.

Егер (1.23) шектеулер жүйесінің кем дегенде бір шешімі болса, онда ол *үйлесімді* шектеулер жүйесі деп аталады, сонда $rank\,\|a_{ji}\|=rank\|a_{ji},b_j\|\leq M$.

Егер (1.23) шектеулер жүйесінің бір де бір шешімі болмаса, онда ол *үйлесімсіз* шектеулер жүйесі деп аталады, сонда $rank\|a_{ji},b_j\|>rank\,\|a_{ji}\|$.

Егер (1.23) шектеулер жүйесіндегі шектеу-теңдеудің біреуін басқасы арқылы өрнектеуге болса, онда ол *артылған* шектеулер жүйесі деп аталады, сонда $rank\|a_{ji}\|<M$.

Теорема 1.5. Сызықтық программалау есебінің шектеулер жүйесінің барлық жарамды шешімдер жиыны дөңес болып табылады.

Дәлелдеуі. $X_1=\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)},...,x_n^{(1)}\right)$ және $X_2=\left(x_1^{(2)},x_2^{(2)},...,x_n^{(2)}\right)$ матрицалық түрде берілген (1.22)-(1.24) есептерінің екі жарамды шешімі болсын. Сонда $AX_1=B$ және $AX_2=B$. X_1 және X_2 шешімдерінің дөңес сызықтық комбинациясын қарастырайық, яғни

$$X=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2,$$

бұл жерде $\alpha_1\geq 0$, $\alpha_2\geq 0$ және $\alpha_1+\alpha_2=1$, және осы комбинация да (1.23) жүйенің жарамды шешімі екенін көрсетейік. Шынында да,

$$AX=A(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2)=\alpha_1AX_1+(1-\alpha_1)AX_2=\alpha_1B+(1-\alpha_1)B=B,$$

яғни X шешімі (1.23) жүйені қанағаттандырады. Бірақ $X_1\geq\mathbf{0}$, $X_2\geq\mathbf{0}$, $\alpha_1\geq 0$, $\alpha_2\geq 0$ болғандықтан $X\geq\mathbf{0}$, яғни X шешімі (1.24) шартты қанағаттандырады.

Теорема дәлелденді.

Сонымен, сызықтық программалау есебінің барлық жарамды шешімдер жиыны дөңес болып табылады, дәлірек айтқанда сызықтық программалау есебінің барлық жарамды шешімдер жиыны *дөңес көпжақты* немесе дөңес көпжақты облысты береді, бұдан әрі қарай біз шешімнің *көпжақтығы* деген терминді пайдаланамыз.

Теорема 1.6. Егер сызықтық программалау есебінің тиімді шешімі бар болса, онда сызықтық функция шешімнің көпжақтығының бұрыштық нүктелерінің бірінде максималды (минималды) мәнді қабылдайды. Егер сызықтық функция максималды (минималды) мәнді екі немесе одан да көп бұрыштық нүктелерде қабылдаса, онда сызықтық функция осы нүктелердің дөңес сызықтық комбинациясы болып табылатын кез келген нүктесінде максималды (минималды) мәнді қабылдайды.

Дәлелдеуі. Шешімнің көпжағы шектеулі болсын деп ұйғарайық. Оның бұрыштық нүктелерін $X_1, X_2, ..., X_p$ арқылы, ал тиімді шешімін - X^* арқылы белгілейік. Сонда шешімнің көпжағының барлық X нүктесі $F(X^*) \geq F(X)$ теңсіздігі орындалады. Егер X^* - бұрыштық нүкте болса, онда теореманың бірінші бөлігі дәлелденді.

X^* - бұрыштық нүкте болмасын деп ұйғарайық, сонда 1.3. теореманың негізінде X^* нүктесін шешімнің көпжағының бұрыштық нүктелерінің дөңес сызықтық комбинациясы ретінде беруге болады, яғни

$$X^* = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_p X_p,$$

$$\alpha_j \geq 0, \ j = 1, 2, ..., p; \ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1.$$

$F(X)$ функциясы сызықты болғандықтан

$$F(X^*) = F(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_p X_p) = \alpha_1 F(X_1) + \alpha_2 F(X_2) + ... + \alpha_p F(X_p). \quad (1.28)$$

Осы жіктеудегі $F(X_j)$, $j = 1, 2, ..., p$ мәндерінің ішінен максималды (минималды) мәнді таңдаймыз. Айталық ол X_k $(1 \leq k \leq p)$ бұрыштық нүктесіне сәйкес келсін, оны M арқылы белгілейік, яғни $F(X_k) = M$. (1.28) өрнекте әрбір мәнді осы M максимал мәнмен алмастырамыз. Сонда, $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$ екенін ескеріп $F(X^*) \leq \alpha_1 M + \alpha_2 M + ... + \alpha_p M = M \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = M$ теңсіздігін аламыз. Өзіміздің ұсынысымыз бойынша X^* тиімді шешім, сондықтан, бір жағынан $F(X^*) \geq F(X_k) = M$ болса, екінші жағынан $F(X^*) \leq M$ теңсіздігінің ақиқаттығы дәлелденді. Демек, $F(X^*) = M = F(X_k)$, мұндағы X_k бұрыштық нүкте. Сонымен, сызықтық функция максимал мәнді қабылдайтындай X_k бұрыштық нүкте бар.

Теореманың екінші бөлігін дәлелдеу үшін $F(X)$ функциясы екі немесе одан да көп бұрыштық нүктелерде, мысалы, $X_1, X_2, ..., X_q$, $1 \leq q \leq p$ нүктелерінде максимал мәнді қабылдайды деп ұйғарайық, сонда

$$F(X_1)=F(X_2)=...=F(X_q)=M.$$

X - осы бұрыштық нүктелердің дөңес сызықтық комбинациясы болсын, яғни

$$X=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+...+\alpha_q X_q,\ \alpha_j\geq 0,\ (j=1,2,...,q),\ \sum_{j=1}^{q}\alpha_j=1.$$

Бұл жағдайда $F(X)$ функциясының сызықтылығын ескере отырып келесі қатынасты аламыз:

$$F(X)=F(\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+...+\alpha_q X_q)=\alpha_1 F(X_1)+\alpha_2 F(X_2)+...+\alpha_q F(X_q)=$$

$$=\alpha_1 M+\alpha_2 M+...+\alpha_q M=M\sum_{j=1}^{q}\alpha_j=M,$$

Яғни, $F(X)$ сызықты функция $X_1, X_2, ..., X_q$ бұрыштық нүктелердің сызықтық комбинациясы болатын кез келген X нүктесінде максимал мәнді қабылдайды.

Теорема дәлелденді.

Дәлелденген теорема сызықтық программалау есебінің түбегейлі шығару жолын көрсететіндіктен іргелі болып табылады. Шынында да, осы теоремағай сәйкес ақырсыз жарамды шешімдер жиынының ішінен ізделінді тиімді шешімді табу үшін ақырсыз жарамды шешімдер жиынын зерттеудің орнына шешімнің көпжағының саны ақырлы болып келетін бұрыштық нүктелерін зерттеу қажет.

Теорема 1.7 (бұрыштық нүктелерді аналитикалық табу әдісі жайында). Сызықтық программалау есебінің әрбір жарамды базистік шешіміне шешімнің көпжағының бұрыштық нүктесі сәйкес келеді, және керісінше, шешімнің көпжағының әрбір бұрыштық нүктесіне әрбір жарамды базистік шешім сәйкес келеді.

Дәлелдеуі. $X=(x_1, x_2, ..., x_m; 0, 0, ..., 0)$ - (1.26) есептің шектеулер жүйесінің жарамды базистік шешімі болсын, бұл жерде алғашқы m компоненті – негізгі айнымалылар, ал қалған $n-m$ компоненті – негізгі емес айнымалылар базистік шешімде нөлге тең (егер нөлге тең болмаса, онда сәйкес айнымалыларды қайтадан нөмірлеуге болады). X - шешімнің көпжағының бұрыштық нүктесі екенін көрсетейік.

Кері жорамалдайық, яғни, X - бұрыштық нүкте емес. Сонда X нүктесін - X нүктесімен беттеспейтін екі әртүрлі

$$X_1=\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_m^{(1)}; 0, 0, ..., 0\right) \text{ және } X_2=\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_m^{(2)}; 0, 0, ..., 0\right)$$

нүктелерін қосатын кесіндінің ішкі нүктесі ретінде беруге болады, басқаша айтқанда, X нүктесін шешімнің көпжағының дөңес комбинациясы ретінде беруге болады, яғни,

$$X=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2 \tag{1.29}$$

мұндағы $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$ ($\alpha_1\neq 0$, $\alpha_2\neq 0$ деп ұйғарамыз, әйтпесе X нүктесі X_1 нүктесімен немесе X_2 нүктесімен беттеседі).

(1.29) векторлық теңдікті келесі түрдегі координаталық формада жазамыз:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_1^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = \alpha_1 x_m^{(1)} + \alpha_2 x_m^{(2)}, \\ 0 = \alpha_1 x_{m+1}^{(1)} + \alpha_2 x_{m+1}^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = \alpha_1 x_n^{(1)} + \alpha_2 x_n^{(2)}. \end{cases}$$

$x_j^{(1)} \geq 0$, $x_j^{(2)} \geq 0$ $(j = 1, 2, ..., n), \alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ болғандықтан, соңғы $n - m$ теңдіктен $x_{m+1}^{(1)} = 0$, $x_{m+1}^{(2)} = 0$, ..., $x_n^{(1)} = 0$, $x_n^{(2)} = 0$ мәндері алынады, яғни, берілген жағдайда (1.28) теңдеулер жүйесінің X_1, X_2 және X шешімдерінде $n - m$ компоненттерінің мәні нөлге тең. Бұл компоненттерді негізгі емес айнымалылардың мәндері деп есептеуге болады. Бірақ негізгі емес айнымалылардың мәндері негізгі айнымалылардың мәндерін анықтайды. Демек, $x_1^{(1)} = x_1^{(2)} = x_1$, ..., $x_m^{(1)} = x_m^{(2)} = x_2$. Сонымен, X_1, X_2 және X шешімдеріндегі барлық n компоненттер беттеседі, және X_1 мен X_2 нүктелері қосылады, бұл біздің жорамалымызға қарама-қайшы. Демек, X - шешімнің көпжағының бұрыштық нүктесі.

Кері тұжырымды дәлелдейік. $X = (x_1, x_2, ..., x_m; 0, 0, ..., 0)$ - шешімнің көпжағының бұрыштық нүктесі болсын, және оның алғашқы m координатасы оң болсын. X - жарамды базистік шешім екенін көрсетейік.

Егер $P_1, P_2, ..., P_m$ векторлары сызықты тәуелсіз болса, онда осы векторлардың компоненттерінен құралған A матрицасының r рангі m-ге тең, яғни $|A| \neq 0$. Демек $x_1, x_2, ..., x_m$ айнымалылары негізгі айнымалылар болып табылады, және $X = (x_1, x_2, ..., x_m; 0, 0, ..., 0)$ шешімі – базистік, жарамды, яғни, теореманың тұжырымы дәлелденді.

Кері ұйғарайық, яғни, $P_1, P_2, ..., P_m$ векторлары сызықты тәуелді болсын, сонда

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + ... + \alpha_m P_m + \ldots + \alpha_n P_n = \mathbf{0} \qquad (1.30)$$

теңдігінде $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \ldots, \alpha_n$ коэффициенттерінің кем дегенде біреуі нөлден өзге болуы керек.

(1.30) теңдікті мүшелеп $\mu > 0$ көбейткішіне көбейтеміз.

$$\mu\alpha_1 P_1 + \mu\alpha_2 P_2 + ... + \mu\alpha_m P_m + \ldots + \mu\alpha_n P_n = \mathbf{0} \qquad (1.31)$$

Шешімнің көпжағының X бұрыштық нүктесінің координаталарын (1.26) шектеулер жүйесіне қойып келесі қатынасты аламыз:

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + ... + P_m x_m + \ldots + P_n x_n = P \qquad (1.32)$$

(1.31) теңдікті (1.32) теңдікпен мүшелеп қосамыз, содан кейін (1.31) теңдікті (1.32) теңдіктен алып тастаймыз.

$$P_1(x_1 + \mu\alpha_1) + P_2(x_2 + \mu\alpha_2) + ... + P_m(x_m + \mu\alpha_m) + \ldots + P_n(x_n + \mu\alpha_n) = P \qquad (1.33)$$

$$P_1(x_1-\mu\alpha_1)+P_2(x_2-\mu\alpha_2)+...+P_m(x_m-\mu\alpha_m)+...+P_n(x_n-\mu\alpha_n)=P \qquad (1.34)$$

Алынған (1.33), (1.34) теңдіктерді (1.30) теңдікпен салыстыра отырып кез келген μ үшін $X_1=(x_1+\mu\alpha_1, x_2+\mu\alpha_2,...,x_m+\mu\alpha_m; 0,0,...,0)$ және $X_1=(x_1-\mu\alpha_1, x_2-\mu\alpha_2,...,x_m-\mu\alpha_m; 0,0,...,0)$ шешімдері (1.26) шектеулер жүйесін қанағаттандыратынын көреміз.

$x_j \geq 0$ $(j=1,2,...,n)$ болғандықтан, X_1 және X_2 шешімдерінің барлық компоненттері теріс емес болатындай аз μ шамасын таңдауға болады. Нәтижесінде X_1 және X_2 (1.25)-(1.27) есептің әр түрлі жарамды шешімдері болады. Бұл жерде $\frac{1}{2}(X_1+X_2)=(x_1,x_2,...,x_m;0,0,...,0)=X$ шешімі, яғни X нүктесі шешімнің көпжағында орналасқан кесіндіде (берілген жағдайда ортасында) жатыр. Сонымен, X бұрыштық нүкте емес, бұл басындағы шартқа қайшы. Демек, біздің ұйғарымымыз дұрыс емес, яғни $P_1, P_2,..., P_m$ векторлары сызықты тәуелсіз және X - (1.25)-(1.27) есептің жарамды базистік шешімі.

Теорема дәлелденді.

1.6 және 1.7 теоремалардан келесі салдар алынады:

Салдар. Егер сызықтық программалау есебінің тиімді шешімі бар болса, онда оның үйлесімді базистік шешімінің кем дегенде біреуі сол тиімді шешіммен тура келеді.

Сонымен, сызықтық программалау есебінің сызықтық функциясының оптимумын оның жарамды базистік шешімдерінің ақырлы санының ішінен іздеу керек.

Бақылау сұрақтары

1. Сызықтық кеңістік ұғымы, векторлардың сызықтық комбинациясы, сызықты тәуелді (тәуелсіз) векторлар жүйесі.
2. Кеңістіктің өлшемділігі, кеңістіктің базисі.
3. Сызықтық ішкі кеңістік, аффиндік жиын, гипержазықтық.
4. Дөңес көпжақтың анықтамасын айтыңыз.
5. Дөңес жиынның бұрыштық нүктесіне қойылатын талап.
6. Дөңес көпжақтың қандай нүктелері оның төбелері деп аталады?
7. Дөңес қабықша деп қандай қабықшаны айтамыз?
8. Көпжақты дөңес конус.
9. Негізгі, негізгі емес айнымалылар, негізгі айнымалылар тобының мүмкін болатын максимал мәні неге тең?
10. Экономикалық-модельдеудің негізгі кезеңдерін айтыңыз.
11. Сызықтық программалау есебінің жалпы қойылуы.
12. Тиімді шешім барлық уақытта базистік шешім болып табыла ма?
13. Сызықтық программалау есебінің түрлері.
14. Сызықтық программалау есебінің матрицалық және векторлық жазылуын, қасиеттері.