К.К. Истеков

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

К. К. Истеков

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Классическая механика
Специальная теория относительности
Электродинамика

Учебник для студентов физических специальностей педагогических университетов

PrintS
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Алматы
2005

ББК 22я73
И 89

Учебник рекомендован для студентов высших учебных заведений комиссией по проведению конкурса МОН РК по разработке учебников и учебно-методической литературы по группе специальностей «Образование»

Рецензенты:

Кафедра общей и теоретической физики КазНТУ им. К. Сатпаева – зав. кафедрой профессор **Кумеков С. Е.**;

Даутов Л. М., профессор;

Чечин Л. М., профессор.

Истеков К. К.

И 89 Курс теоретической физики: Классическая механика. Специальная теория относительности. Электродинамика: Учебник – Алматы: Print-S, 2005. – 580 б.

ISBN 9965–482–16–0

В книге рассмотрены физико-математические основы классической механики, специальной теории относительности и электродинамики.

Материал изложен в соответствии с программой курса теоретической физики для педагогических университетов.

Книга является учебником для студентов педагогических специальностей, изучающих теоретическую физику.

А $\dfrac{\mathbf{1604000000}}{\mathbf{00\ (05)\text{–}05}}$

ББК 22я73

ISBN 9965–482–16–0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателей книга написана на основе лекций, прочитанных автором в разные годы в Казахском национальном педагогическом университете им. Абая по таким разделам теоретической физики как классическая механика, специальная теория относительности, электродинамика. Содержание приведено в соответствие с действующей программой по теоретической физике для педагогических специальностей.

В книге излагаются приемы получения уравнения движения и законов сохранения как на основе экспериментально найденных закономерностей, так и на основе постулирования вариационного принципа - принципа наименьшего действия. Вариационный принцип является мощным, надежным и близким к внутренней логической структуре современной физики приемом для изучения системы взаимодействующих частиц и полей, позволяющий объединить и единообразно рассмотреть большую совокупность физических явлений.

Логическим завершением такого подхода к изложению материала является глава 8 из третей части книги. По сути, это переизложение специальной теории относительности и электродинамики в лагранжевом вариационном подходе, показывающее связь пространства Минковского с динамикой специальной теории относительности и с классической электродинамикой. Эта глава предназначена для дополнительного чтения или проработки на специальных курсах.

Чтобы трудности в проведении вычислений не затрудняли восприятие физических идей и основных положений, излагаемых разделов теоретической физики, все выкладки в книге проведены в возможно полном объеме.

В приложении дается краткое изложение сведений из методов математической физики, необходимых для усвоения основного материала книги. Приступая к изучению классической механики желательно повторить векторную и тензорную алгебру в объеме первых семи параграфов приложения А.

Элементы векторной и тензорной алгебры в 4-пространстве, необходимые для изложения специальной теории относительности, даются в основном тексте книги. Раздел “Электродинамика” потребует знания векторного и тензорного анализа в объеме приложения А.

Книга содержит систематизированные, разные по уровню сложности способы изложения одного и того же материала, это позволяет выбрать необходимый объем заданий, как для аудиторных занятий, так и для самостоятельных и дополнительных занятий.

Каждая часть книги может быть использована самостоятельно, они достаточно замкнутые и не требуют частых обращений к другим разделам.

Каждая часть имеет свою сквозную нумерацию параграфов. Нумерация формул дана отдельно по параграфам: числа в скобках обозначают номер параграфа и номер формулы в параграфе. При ссылке внутри параграфа указывается только номер формулы. При ссылке на формулы других частей книги добавляется номер части. Ссылки на формулы Приложения содержат буквенное обозначение приложения, номер параграфа и номер формулы.

Предполагается, что чтение книги будет сопровождаться решением задач, которые могут быть взяты из известных книг. Например "Сборник задач по электродинамике" В.В. Батыгина и И.Н. Топтыгина, "Задачи и упражнения по классической механике" М.Ф. Бариновой и О.В. Голубевой, "Сборник задач по классической электродинамике" А.И. Алексеева, "Сборник задач по теоретической физике" Л.Г. Гречко и др.

В книге использованы идеи, подходы и приемы изложения, развитые авторами известных учебников. Хотя текст книги и не содержит специальных ссылок на заимствованный материал, список использованной литературы, общий для всех частей книги, составлен и приводится. Следует особо отметить "Начала теоретической физики" Медведева Б.В. Внимательный читатель заметит, что изложение некоторых тем было заимствовано из этой книги. Есть ряд и самостоятельных методических разработок.

Содержание книги складывалось в ходе учебного процесса. Некоторые разделы курса возникли как ответы на пожелания и замечания студентов.

В процессе своей работы над книгой автор встретил самую активную поддержку, словом и делом, со стороны заведующего кафедрой теоретической физики КазНПУ им. Абая профессора Косова В.Н.

Труд чтения варианта рукописи книги, представленный на рецензию, приняли на себя доктора физ.-мат. наук, профессора: Даутов Л.М., Кумеков С.Е., Мукашев К.М. Чечин Л.М. Их конструктивные критические замечания автор принял во внимание при доработке рукописи, что в значительной мере способствовало ее улучшению.

Всем названным лицам автор выражает глубокую благодарность и признательность.

К сожалению, в книге могли остаться ошибки и недостатки в изложении, за которые несет ответственность только автор. Автор заранее благодарен за все пожелания, предложения и замечания, относящиеся к содержанию книги, которые читатель сочтет нужным сообщить.

Часть первая

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Глава 1. Основные положения и принципы классической механики

§ 1. *Объекты и явления природы, изучаемые в классической механике*

Из огромного скопления предметов и событий окружающего мира классическая механика объектом для изучения выбирает механическое движение макроскопического тела - изменение положения тела в пространстве с течением времени.

Классическая механика не рассматривает явления в физических полях, явления связанные с элементарными частицами, явления, приводящие к изменению сущности предметов. Но и в этом случае для формулировки классической механики необходимо выделить только существенные, основные факторы, влияющие на механическое движение, необходимо абстрагироваться от многих несущественных деталей. Вместо реального объекта природы рассматривается идеализированный объект, его модель.

Основным идеализированным объектом, движение которого изучает классическая механика, является материальная точка - тело, размеры и внутренняя структура которого несущественны в рассматриваемой задаче. Иногда вместо термина «материальная точка» мы будем использовать термин «частица».

Бесструктурная материальная точка не может иметь внутренние характеристики, для объяснения которых надо предположить сложное строение. Например, не имеет смысла говорить о собственном моменте инерции точки, так как нет возможности задания выделенного направления у точки. Для материальной точки в механике существенным является только такая внутренняя скалярная характеристика как масса. Предполагают, что масса точки не изменяется при всех явлениях, в которых участвует точка и что масса величина аддитивная: масса механической системы равна сумме масс составляющих ее точек.

Не для всех окружающих нас тел применима модель материальной точки. В таком случае объект можно представить как совокупность тел, каждая из которых рассматривается как материальная точка, и всю совокупность точек называют системой материальных точек или механической системой. В частном случае, если расстояния между точками системы при всех обстоятельствах не меняются, то такую систему называют абсолютно твердым телом.

Если тело деформируемо и занимает большую, по сравнению с характерными размерами регистрирующих движение систем, область пространства, то имеем дело со сплошной средой. Это упругие, жидкие и газообразные тела.

Таким образом, в классической механике объекты окружающего мира представляются как совокупность дискретно или непрерывно расположенных в пространстве материальных точек, механических систем и твердых тел. Любые объекты по своей структуре отличаются друг от друга только числом составных частей, их взаимным расположением в пространстве.

Механика твердых тел и сплошных сред может быть получена как следствие и обобщение законов движения системы материальных точек. В данной книге механика сплошных сред не рассматривается.

Материальные объекты оказывают друг на друга влияние, воздействие, говорят, что они взаимодействуют. Материальные тела, входящие в данную систему могут взаимодействовать как между собой, так и с другими телами, не входящими в эту механическую систему.

Если точки механической системы взаимодействуют только между собой, то такую систему называют замкнутой или изолированной механической системой.

Если же точки механической системы взаимодействуют и с иными телами, не входящими в эту систему, то такую систему назовем незамкнутой.

Замкнутая система состоящая из одного тела - это свободное или изолированное тело.

§ 2. *Пространство и время в классической механике*

Представления о пространстве и времени играют решающую роль при построении физической картины мира. Понятие "пространство" используется для выражения протяженности предметов, порядка сосуществования и расположения тел друг относительно друга.

Понятие "время" применяется для выражения порядка смены явлений, последовательности событий.

С помощью этих понятий можно отождествлять и различать отдельные фрагменты материальной действительности, можно строить научное описание физических явлений.

Поместим в некоторую точку пространства тело отсчета (точку отсчета). Опыт показывает, что пространство трехмерное, т.е. для определения положения любой другой точки пространства относительно точки отсчета надо провести с помощью некоторого масштаба три независимых измерения. Для проведения этих измерений с точкой отсчета связывают систему координат.

Построим прямоугольную декартовую систему координат с осями X, Y, Z. Каждая точка пространства задается ее радиус-вектором $\vec{r}$ или координатами x, y, z. Координаты точки будут компонентами радиус-вектора на оси декартовых координат. Обозначив единичные координатные векторы $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, можем записать

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z. \tag{2.1}$$

Введем понятие расстояния между точками пространства. Пусть радиус-вектор первой точки будет $\vec{r}_1$ (его координаты x_1, y_1, z_1), а радиус-вектор второй точки - $\vec{r}_2$ (его координаты x_2, y_2, z_2). Зная связь векторов с координатами (1) и пользуясь правилом сложения векторов, можно расстояние (пространственный промежуток) Δl между точками выразить через координаты

$$\Delta l = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \tag{2.2}$$

Зависимость расстояния между точками пространства от их координат называют метрикой пространства. Пространство с метрикой (2) - евклидовое.

Для измерения времени необходимо располагать часами (периодическим процессом). Если в течении времени отметили два момента t_1 и t_2, то промежуток времени между этими двумя моментами (метрика времени) равен

$$\Delta t = t_1 - t_2. \tag{2.3}$$

В основе классической механики лежат наиболее простые, кажущиеся интуитивно очевидными представления о свойствах пространства и времени.

Пространство рассматривается как некоторое пассивное, пустое место расположения материальных объектов. По своим свойствам оно не зависит от всего, что в себя вмещает, оно существует само по себе и своим существованием не обязано чему бы то ни было. Вмещает все тела природы и дает место всем ее явлениям, но не испытывает на себе никакого их воздействия - в этом состоит смысл абсолютности пространства.

В классической механике пространство однородно и изотропно. Однородность означает: оно всюду и везде одинаково по своим свойствам, все его участки равноправны, в нем нет выделенных участков и точек.

Изотропность пространства означает, что все направление в нем равноправны и одинаковы.

А вот какими представляются в классической механике свойства времени. Как и пространство, время существует само по себе. Его ходу подчиняются все тела природы, все физические явления. Но сами тела и явления не влияют на ход времени. Ход времени везде и всюду в мире одинаков. Эти перечисленные свойства являются свойствами абсолютности времени.

В механике ход времени одинаково равномерен в прошлом, настоящем и будущем. Все моменты времени между собой равноправны, нет выделенных моментов в течении времени. Перенос начала отсчета времени не скажется на ходе времени. Все это выражение свойства однородности времени.

Однородность времени, однородность и изотропность пространства представляют собой их свойства симметрии.

Однородность - это симметрия, неизменность свойства пространства и времени относительно сдвигов в пространстве и времени.

Изотропия - это симметрия, неизменность свойства пространства относительно поворотов вокруг любых осей в пространстве.

В классической механике принимается, что абсолютное время и абсолютное пространство не связаны друг с другом и существуют независимо друг от друга. Они непрерывны и логически допускается, что можно рассматривать сколь угодно малые интервалы (промежутки) в пространстве и времени.

Пространственные и временные интервалы в классической механике являются абсолютными, не зависящими друг от друга, от наличия тел, происходящих процессов.

§ 3. *Классическое описание положения и движения материальной точки*

Каждый физический процесс охватывает какую-то область пространства и какой-то промежуток времени. Весь процесс можно считать состоящим из отдельных кратковременных явлений, т.е. событий, протяженностью которых в пространстве и длительностью во времени можно пренебречь.

Событие, происходящее в данной точке пространства в данный момент времени, описывается четырьмя числами (координатами события): три его пространственные координаты x, y, z и момент времени t, в который оно произошло.

Для измерения координат события необходимо иметь систему отсчета: совокупность тела отсчета, системы координат и способа измерения времени.

Попадание частицы в какую-то точку пространства в определенный момент времени является элементарным механическим событием. Механическое движение представляет собой непрерывную совокупность последовательных механических событий.

В классической механике частица в каждый момент времени имеет точно определенное место в пространстве. Положение частицы в пространстве определяется радиус-вектором $\vec{r}$ (координатами x, y, z) точки пространства, где находится частица. Для определения момента времени t, когда частица находилась в данном месте пространства, нужно измерить промежуток времени между данным событием и каким-то другим событием (началом отсчета времени).

Если известно положение тела в каждый момент времени, то говорят, известен закон механического движения.

Если положение материальной точки задано радиус-вектором, то ее закон движения - это зависимость радиус-вектора от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{3.1}$$

Если положение материальной точки в пространстве задано с помощью координат, то закон движения этой частицы опишется зависимостью координат от времени.

В декартовых координатах это будут следующие функции

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t). \tag{3.2}$$

При движении материальной точки конец ее радиус-вектора описывает в пространстве кривую, называемую траекторией движения точки. Уравнения (2) параметрический задают уравнение траектории. Параметром служит время t.

В механике предполагается, что изменение положения материальной точки в пространстве происходит непрерывно, что закон движения является непрерывной, гладкой функцией и что существуют его первая и достаточное число высших производных.

Производная закона движения по времени задает скорость частицы. Если закон движения дан в векторной форме (1), то первая производная радиус-вектора по времени называется вектором скорости частицы

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}. \tag{3.3}$$

Если закон движения известен в координатной форме, то их первые производные по времени дадут составляющие вектора скорости частицы по осям координат. Например, в декартовых координатах из законов движения (2) получим декартовые составляющие вектора скорости

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \qquad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \qquad \upsilon_z = \frac{dz}{dt}. \tag{3.4}$$

Зная эти проекции, можем записать и выражение для вектора скорости:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{e}_x + \upsilon_y \vec{e}_y + \upsilon_z \vec{e}_z. \tag{3.5}$$

В свою очередь, изменение скорости частицы характеризуется ускорением - производной скорости по времени. Для вектора ускорения из (3) получим

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt} \equiv \ddot{\vec{r}}. \tag{3.6}$$

Проекции вектора ускорения на оси декартовых координат найдем из (4):

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{3.7}$$

Тогда вектор ускорения запишется следующим образом

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z. \tag{3.8}$$

Скорость и ускорение материальной точки в классической механике называют кинематическими характеристиками движения.

§ 4. *Преобразования систем отсчета*

Системой отсчета мы назвали совокупность тела отсчета, системы координат и способа измерения времени. Каждая из ее составляющих может быть выбрана не единственным образом.

В начале остановимся на выборе системы координат. В §2 для примера рассматривалась декартовая система координат. Но система координат может быть и иной. Можно было бы выбрать цилиндрические координаты, тогда положение точки в пространстве может быть задано одной угловой величиной φ и двумя линейными величинами ρ и z. Если же выбрана сферическая система координат, то положение точки уже задается одной линейной ρ и двумя угловыми величинами φ и θ.

В любом случае положение точки однозначно определено тремя независимыми величинами - обобщенными координатами. Для удобства эти координаты обозначим одной буквой с индексами. Например, q_1, q_2, q_3 или еще короче q_i, где индекс i принимает значения $i = 1,2,3$.

Координаты точки в любой системе координат однозначно определяют положение точки в пространстве, поэтому радиус-вектор точки будет однозначной функцией обобщенных координат

$$\vec{r} = \vec{f}(q_1, q_2, q_3) \equiv \vec{f}(q_i). \tag{4.1}$$

В таком случае, должна быть и однозначная связь между координатами одной и той же точки в разных системах координат. Формулы, устанавливающие эту связь, называют преобразованием координат.

Например, переход от цилиндрических координат φ, ρ, z к декартовым координатам x, y, z осуществляется известным преобразованием

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$$

Формулы преобразования любых других обобщенных координат q_i в те же декартовые координаты можно записать как однозначные функции

$$x = f_1(q_1, q_2, q_3), \qquad y = f_2(q_1, q_2, q_3), \qquad z = f_3(q_1, q_2, q_3). \tag{4.2}$$

При переходе к новым координатам q_i любая из декартовых координат может зависеть, вообще говоря, от всех новых (как, например, в упомянутом выше переходе от цилиндрических к декартовым). Поэтому в правых частях формул (2) предусмотрена зависимость от всех величин q_i.

Если известен закон движения в обобщенных координатах $q_i = q_i(t)$, то производная обобщенных координат по времени - это обобщенная скорость

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}. \tag{4.3}$$

Тогда подставив (1) и (3) в определение (3.3), получим выражение для вектора скорости через обобщенные скорости

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i}\dot{q}_i\,. \tag{4.4}$$

Обратите внимание: в общем случае в формулу входят не только обобщенные скорости, но и обобщенные координаты.

Найдем выражение для вектора ускорения $\vec{a}$ точки через ускорения в обобщенных координатах $\ddot{q}=\dfrac{d\dot{q}}{dt}$. Подставив (4) в (3.6), получим

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i}\dot{q}_i=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial q_j\partial q_i}\frac{dq_j}{dt}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i}\ddot{q}_i=$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial q_j\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\vec{f}}{\partial q_i}\ddot{q}_i\,. \tag{4.5}$$

Обратимся к другим способам построения систем отсчета. Даже если не касаться возможности разного выбора системы координат, то бесконечное множество отличающихся друг от друга систем отсчета можно построить с помощью следующих четырех способов или их комбинаций:

1) смещение тела отсчета;

2) произвольный поворот осей координат в пространстве;

3) смещение начала отсчета времени;

4) выбор движущегося тела отсчета.

Пусть в системе отсчета K произошли два события. Первое произошло в момент времени t_1 в точке с радиус-вектором $\vec{r}_1$ (координаты x_1,y_1,z_1). Момент времени второго события обозначим t_2, радиус-вектор точки пространства, где произошло это событие, обозначим $\vec{r}_2$ (координаты x_2,y_2,z_2).

Пространственный промежуток (расстояние) между этими событиями определяется формулой (2.2), а временной промежуток - формулой (2.3).

Построим другую систему отсчета K'. Все величины, относящиеся к этой системе отсчета, будем обозначать буквами со штрихами.

Абсолютность пространственных промежутков означает, что

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+(z_1'-z_2')^2 \tag{4.6}$$

или

$$|\vec{r}_1-\vec{r}_2|=|\vec{r}_1'-\vec{r}_2'|. \tag{4.7}$$

Абсолютность временных промежутков запишется в виде

$$t_1-t_2=t_1'-t_2'\,. \tag{4.8}$$

Если в обеих системах отсчета K и K' выбрать одно и то же начало отсчета времени, то из (8) следует

$$t = t'. \tag{4.9}$$

Следующая наша задача: найти формулы, связывающие пространственные координаты и моменты времени одного и того же события в разных системах отсчета, т.е. формулы преобразования координат и времени.

Если системы отсчета K и K' отличаются изменением начала отсчета времени на величину a, то преобразование временного сдвига имеет вид

$$t' = t + a. \tag{4.10}$$

Теперь рассмотрим системы отсчета, в которых начала отсчета времени совпадают, т.е. $t' = t$. Пусть система отсчета K' отличается от K выбором положения тела отсчета в пространстве. Радиус-вектор тела отсчета O' в системе K обозначим $\vec{R}$ (рис.1). Рассмотрим некоторую частицу, которая в данный момент времени находится в точке A пространства. Из условия абсолютности длин отрезков (7) следует, что расстояние между точками A и O' должно быть одно и то же в обеих системах отсчета. В таком случае, изображенный на рисунке вектор $\vec{r}'$ одинаков в системах отсчета K и K'. Тогда из рисунка следует, что

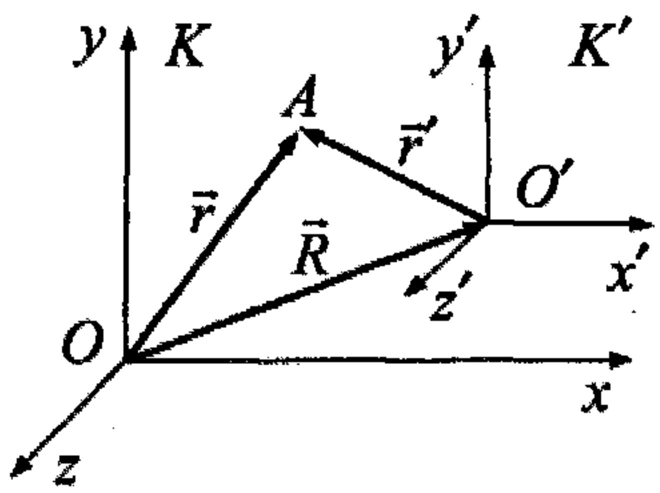

Рис. 1.

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}. \tag{4.11}$$

Так выглядит общий вид формулы преобразования радиус-вектора точки A из одной системы отсчета в другую.

Если радиус-векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ зависят от времени, (частица движется или относительно K, или относительно K', или относительно и K и K') то выражение (11) будет формулой преобразования закона движения.

Функция $\vec{R} = \vec{R}(t)$ определяет закон движения системы отсчета K' относительно K. В зависимости от вида $\vec{R} = \vec{R}(t)$ возможны частные случаи.

Рассмотрим некоторые из них. Пусть системы отсчета K и K' отличаются только смещением тела отсчета на постоянный вектор $\vec{R} = \vec{b}$, тогда

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{b}. \tag{4.12}$$

Для сокращения записи декартовые координаты точки будем обозначать одной буквой с индексом

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3$$

или еще проще

$$x_\mu, \text{ где } \mu = 1,2,3.$$

Тогда компоненты радиус-вектора $\vec{r}$ точки в K-системе запишутся как x_μ, а в K'-системе радиус-вектор $\vec{r}'$ будет иметь компоненты x'_μ.

Обозначим проекции вектора $\vec{b}$ через b_μ - через координаты тела отсчета системы K' в системе K. Тогда уравнение (12) в проекциях примет вид

$$x_\mu = x'_\mu + b_\mu \qquad \mu = 1,2,3. \qquad (4.13)$$

Преобразования (12) или (13) называются преобразованием сдвига или трансляции системы координат.

Теперь предположим, что система отсчета K' движется с произвольной скоростью $\vec{V}(t)$ относительно K-системы. Пусть оси координат K' остаются параллельными осям координат K и совпадают с ними в начальный момент времени $t = t' = 0$. По истечении промежутка времени t, система отсчета K' относительно K заняла положение в пространстве указанное на рис. 1.

Преобразование радиус-вектора точки из одной системы отсчета в другую в общем виде нам известно (11). Только вектор $\vec{R}$, входящий в это выражение, теперь зависит от скорости $\vec{V}(t)$:

$$\vec{R} = \int \vec{V}(t) dt.$$

Тогда преобразование (11) примет вид

$$\vec{r} = \vec{r}' + \int_0^t \vec{V}(t) dt. \qquad (4.14)$$

В частном случае, когда $\vec{V} = const$, получим

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t, \qquad (4.15)$$

откуда в проекциях на координатные оси можно записать

$$x_\mu = x'_\mu + V_\mu t \qquad \mu = 1,2,3. \qquad (4.16)$$

Соотношения (15) или (16) представляют собой преобразования Галилея.

Пусть система отсчета K' получена поворотом осей координат системы K, но у них общее тело отсчета, т.е. $\vec{R} = 0$. Здесь радиус-вектор точки A не изменится $(\vec{r} = \vec{r}')$, но координаты точки в этих системах отсчета будут различными. Правила преобразования компонент радиус-вектора при повороте осей координатной системы нам известны (А.6.6)

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} a_{\mu\nu} x_\nu \qquad \mu = 1,2,3. \qquad (4.17)$$

Коэффициенты преобразования $a_{\mu\nu}$ - это косинусы углов между осями x'_μ системы K' и осями x_ν системы K (А.4.11).

Формулы преобразования координат (17) позволяют по известным проекциям вектора $\vec{r}$ на оси системы K вычислять проекции на оси системы K'. Они справедливы при произвольных поворотах систем отсчета относительно любой из осей координат. В каждом случае будет своя матрица коэффициентов преобразования $a_{\mu\nu}$ (А.4.11).

Например: осям x, y придадим положение x', y' путем поворота на угол α вокруг оси z. Тогда матрица коэффициентов преобразования поворота пространственных осей координат примет вид (А.4.17)

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Полученные нами формулы преобразований (10), (12), (14), (17) и их комбинации позволяют найти связь между радиус-векторами (или координатами) материальной точки в различных системах отсчета.

Преобразования (10), (12) и (17) называют тривиальными преобразованиями. Совокупность тривиальных преобразований и преобразований Галилея (14) объединяют общим названием: преобразования Галилея в широком смысле.

Продифференцировав преобразования координат (14) по времени получим

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}. \tag{4.19}$$

Это закон сложения скоростей (преобразования скоростей) в классической механике. Он связывает скорости $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ и $\vec{v}' = \dfrac{d\vec{r}'}{dt}$ частицы в движущихся друг относительно друга системах отсчета K и K', соответственно.

В свою очередь, продифференцировав закон сложения скоростей (19) по времени, установим связь между ускорениями частицы в двух движущихся друг относительно друга системах отсчета

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0, \tag{4.20}$$

где $\vec{a}_0 = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ - ускорение системы отсчета K' относительно K.

В частности, если K' движется с постоянной скоростью ($\vec{V} = const$), то

$$\vec{a} = \vec{a}'. \tag{4.21}$$

В принципе для описания движения частицы можно использовать произвольно выбранную систему отсчета. Из формул (11), (17), (19), (20) очевидно, что закон движения, а иногда и скорость, и ускорение частицы могут выглядеть по-разному в разных системах отсчета. Из некоторых систем отсчета поведение даже свободной частицы может выглядеть достаточно сложно и странно.

Например, покоящаяся в какой-то момент времени свободная частица в последующий момент времени может начать двигаться по произвольной траектории. В системе отсчета K, где частица покоится,

$$\vec{r} = const \quad \text{и} \quad \vec{v} = 0.$$

Пусть K'-система начнет произвольно двигаться относительно K, значит в формуле (11) будет стоять функция $\vec{R} = \vec{R}(t)$. Тогда с точки зрения K'-системы частица придет в движение и ее радиус-вектор $\vec{r}'$ будет изменяться по закону

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}(t).$$

И если $\vec{R}(t)$ сложная функция времени, например описывающая зигзагообразную траекторию, то и закон движения частицы $\vec{r}'(t)$ в системе K' будет столь же сложным. В таких системах отсчета для свободной частицы различные положения и ориентации в пространстве могут показаться не эквивалентными, не эквивалентными могут показаться и разные моменты времени, т.е. в этих системах отсчета пространство и время будут не однородными и не изотропными.

Возникает естественная задача построения такой системы отсчета, в которой и закон движения свободной частицы выглядел бы наиболее просто, и пространство было бы однородным и изотропным, и время - однородным.

Оказалось, что существует система отсчета, где эти условия выполняются одновременно. Ее называют инерциальная система отсчета, сокращенно ИСО.

Признаком ИСО является то, что в ней выполняется 1-ый закон Ньютона: относительно такой системы отсчета изолированная (свободная) частица либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно.

Допустим, ИСО выбрана, обозначим ее K. Теперь можем построить множество других систем отсчета K', отличающихся от K или смещением тела отсчета, или ориентацией осей координат, или смещением начала отсчета времени, или которые движутся относительно K. Будут ли все эти новые системы отсчета K' инерциальными или нет?

Для ответа на этот вопрос надо из K' проследить за поведением свободной частицы, за ее скоростью. По условию в системе K скорость свободной частицы постоянна $\vec{v} = const$. В таком случае, во всех системах отсчета K', покоящихся относительно K, скорость свободной частицы останется постоянной. Это прямое следствие закона сложения скоростей.

Действительно, при $\vec{V} = 0$ из (19) получим

$$\vec{v}' = \vec{v} = const.$$

Таким образом, все системы отсчета покоящиеся относительно какой-то ИСО также инерциальные.

Рассмотрим систему отсчета K', движущуюся относительно инерциальной системы отсчета K со скоростью $\vec{V} \neq 0$. Так как $\vec{v} = const$, то из закона сложения скоростей (19) очевидно, что измеренная в K' скорость свободной частицы $\vec{v}'$ будет постоянной только при условии $\vec{V} = const$.

Отсюда вывод: среди всех рассматриваемых систем отсчета K' будут инерциальными только движущиеся с постоянной скоростью относительно другой инерциальной системы отсчета.

Итак, суммируя, получим. Существует множество ИСО, в которых движение свободной частицы определяется 1-ым законом Ньютона.

В различных ИСО закон движения и скорость свободной частицы могут оказаться различными. Но такие свойства движения свободной частицы, как равномерность и прямолинейность неизменны.

Во всех ИСО пространство однородное и изотропное, а время однородное. Переход из одной ИСО в другую совершается в общем случае с помощью преобразований (10), (12), (15), (17).

§ 5. *Относительность в классической механике*

Физический смысл преобразований Галилея в широком смысле можно трактовать двумя способами:

1. Имеем механическую систему и происходящие в ней или с ней явления изучаем из различных систем отсчета. В этом случае указанные преобразования, как и преобразования (4.2), соответствуют переходу от одного способа описания к другому способу описания одного и того же явления с точки зрения наблюдателя из каждой системы отсчета. Такие преобразования называются пассивными. Именно о них шла речь в предыдущем параграфе. Инерциальные системы отсчета выбраны такими, чтобы из них одинаково выглядело движение свободного тела (сохранялось свойство постоянства скорости)

2. Можно поступить и по другому. Взять механическую систему и перенести или повернуть в пространстве, или привести ее в движение с постоянной скоростью относительно выбранной системы отсчета. Можно перенести во времени начало механического процесса. В этих случаях преобразования Галилея в широком смысле выражают связи между старыми и новыми координатами и временами механической системы относительно выбранной системы отсчета. Такие преобразования называются активными, т.е. они соответствуют реальному преобразованию самой механической системы относительно выбранной системы отсчета. Изучаются и сравниваются механические процессы, происходящие в разных системах отсчета.

Во втором случае возникает вопрос: Будут ли в разных ИСО одинаковые физические условия для любых механических процессов?

Имеет смысл сравнивать механические явления в разных системах отсчета, если из одной системы отсчета в другую перенесем все, что хоть как-то влияет на механическую систему и на происходящие в ней явления. Перенос незамкнутой системы вызвал бы изменение расположения частиц по отношению к внешнему, не перенесенному телу, взаимодействующему с системой, и это отразилось бы на процессах в системе. Впредь, будем сравнивать механические явления в различных ИСО, происходящие в замкнутых системах.

Любые механические явления должны происходить одинаковым образом в любых ИСО, отличающихся сдвигом тела отсчета. Если бы это было не так то, помещая тела отсчета в разные места пространства, смогли бы отличить одно место в пространстве от другого по различиям в механических явлениях в этих системах отсчета. Но это противоречит однородности пространства.

В ИСО, отличающихся ориентацией осей координат, механические явления должны происходить также одинаковым образом. Иначе можно было бы найти механические методы различения одних направлений в пространстве от других, что противоречит изотропности пространства.

Очевидно, механические явления не должны устанавливать и преимущества для какого-либо начала отсчета времени, т.к. время однородно. Значит, механические явления должны развиваться одинаковым образом в любых ИСО, отличающихся сдвигом начала отсчета времени.

Теперь обратимся к ИСО, движущимся друг относительно друга с постоянной скоростью. Известные нам свойства ИСО, пространства и времени ничего не говорят о свойствах механических явлений в таких системах отсчета.

Опираясь на опытные факты, вводят дополнительный постулат называемый принципом относительности Галилея:

в инерциальных системах отсчета, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга, все механические процессы протекают одинаковым образом.

Итак: во всех ИСО процессы в замкнутой механической системе будут протекать одинаковым образом, все ИСО равноправны и эквивалентны.

Классическая механика должна выразить законы изучаемого процесса на математическом языке в виде уравнений, соотношений и т.п. Но если механические процессы протекают одинаково во всех ИСО, значит, и описывающие эти процессы математические уравнения не должны зависеть от выбора ИСО, они не должны меняться при переходе из одной ИСО в другую.

Таким образом, проявлением свойств симметрии пространства и времени в ИСО и принципа относительности Галилея являются:

одинаковый характер течения механических процессов во всех ИСО;

и, как следствие, неизменность уравнений классической механики при переходе от одной ИСО к другой.

Это свойство уравнений называется свойством инвариантности или симметрии и имеет важное значение.

Во-первых, эвристическое значение, так как предопределяет и предсказывает общие свойства уравнений и законов механики.

Во-вторых, если полученные уравнения и законы не зависят от выбора ИСО, значит они отображают объективные свойства и законы механического явления, а не отношения этого явления к системе отсчета, в которой оно происходит и изучается.

В конечном счете, в этом и состоит преимущество, привилегированность ИСО перед остальными неинерциальными. В принципе законы и уравнения механики можно сформулировать в любой системе отсчета, но только в ИСО они обладают свойством инвариантности и выражают объективные закономерности явления, не усложненные выбором системы отсчета.

В законы и уравнения механики, представленные в математической форме, входят явно или неявно время t, координаты $\vec{r}$, подсчитанные в какой-либо системе отсчета, и функции от этих величин. В общем случае с помощью преобразований (4.10), (4.12), (4.15), (4.17) сможем записать переменные t, $\vec{r}$ и зависящие от них величины в новой ИСО. Тем самым переведем математические уравнения в целом из одной ИСО в другую.

Если при этом уравнение сохраняет свой вид (форму), значит оно ковариантное по отношению к этим преобразованиям. Величины, не изменяющиеся при совершении преобразования, представляют собой инвариант этого преобразования. Если все члены уравнения - инварианты, то уравнение называют инвариантным относительно данного преобразования.

В таком случае, свойство инвариантности уравнений классической механики математически означает, что в силу однородности и изотропности пространства, однородности времени и принципа относительности Галилея все уравнения механики должны быть инвариантны (ковариантны) относительно преобразований Галилея в широком смысле (4.10), (4.12), (4.15), (4.17).

Напомним, что при выводе самих преобразований Галилея дополнительно использовано требование абсолютности пространственных и временных промежутков во всех ИСО.

Возвращаясь к началу параграфа, заметим, что в зависимости от смысла рассматриваемых преобразований по-разному трактуется и свойство инвариантности. По отношению к пассивным преобразованиям в нем проявляется эквивалентность различных способов описания одного итого же механического явления, свобода выбора ИСО для описания этого явления.

По отношению к активным преобразованиям свойство инвариантности означает возможность одинакового течения явления (а значит и одинакового их описания) происходящего в механической системе, помещенной в различные инерциальные системы отсчета.

§ 6. *Описание взаимодействия тел в классической механике*

В классической механике считается, что взаимодействие между двумя телами возникает только при наличии обоих тел без всяких посредников. Пространству не отводится никакой роли в передаче взаимодействия. Постулируется, что передача взаимодействия происходит мгновенно. Такое представление о взаимодействии называется принципом дальнодействия.

Принцип дальнодействия совместно с рассмотренными ранее свойствами симметрии пространства и времени и понятием материальной точки предопределяет общее свойство взаимодействия тел в классической механике.

В общем случае взаимодействие может зависеть как от собственных (внутренних) характеристик тел, так и от взаимного расположения и скоростей взаимодействующих тел и от времени.

В классической механике тела моделируются бесструктурными точками (частицами), не имеющими векторных характеристик. Значит, взаимодействие может зависеть только от скалярных собственных характеристик тел, например, масса или заряд. В классической механике предполагается, что в процессе движения эти характеристики тел не меняются. А вот положения тел, их скорости могут существенно меняться при движении, значит, может меняться и зависящее от них взаимодействие. Нас интересуют общие свойства функциональной зависимости взаимодействия от этих переменных величин.

Если процесс передачи взаимодействия между телами происходит мгновенно, то за время прохождения взаимодействия (а оно равно нулю) никаких изменений в положении и движении тел не может произойти, даже если взаимодействующие тела и движутся друг относительно друга с какой-то (конечной) скоростью. Тогда взаимодействие в данный момент времени должно зависеть только от взаимного расположения тел в этот же момент времени и не должно зависеть в явном виде от расположения тел в предыдущие моменты и от скорости движения взаимодействующих тел.

Рассмотрим зависимость взаимодействия двух частиц от их положения в пространстве. Пусть заданы радиус-векторы первой частицы $\vec{r}_1$ и второй частицы $\vec{r}_2$. Из однородности пространства следует, что их взаимодействие не должно меняться при преобразовании сдвига. Из радиус-векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ можно составить только одну величину $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, которая является инвариантом преобразования сдвига.

Кроме того, пространство изотропное, тогда взаимодействие не должно меняться при одновременном повороте взаимодействующих частиц. Этому требованию можно удовлетворить, если взаимодействие будет зависеть от модуля вектора $|\vec{r}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, т.е. от расстояния между взаимодействующими частицами.

Что можно сказать о зависимости взаимодействия от времени? Время однородно, значит, взаимодействие между двумя частицами будет одинаковым, в какой бы момент времени это не произошло. В таком случае взаимодействие не должно явно зависеть от времени, оно должно быть стационарным.

Таким образом, общее свойство взаимодействия двух частиц в классической механике состоит в том, что оно должно определяться собственными скалярными характеристиками взаимодействующих частиц и относительным расстоянием между ними. Такие взаимодействия называются потенциальными.

В результате взаимодействия в системе может произойти следующее:

а) изменятся скорости движения взаимодействующих частиц;

б) изменяется положение каждой частицы, значит, изменяется положение всех частиц системы или конфигурация системы.

По любому из этих проявлений можно судить о величине взаимодействия и определить количественную характеристику, меру взаимодействия.

Изменение скорости движения частицы определяется ускорением. Ускорение вектор, значит и определенная через нее мера взаимодействия будет векторной величиной. Векторную меру взаимодействия называют силой $\vec{F}$.

Пусть взаимодействуют две частицы. Силу, с которой частица 1 действует на частицу 2, обозначим $\vec{F}_{12}$. Частица 2, в свою очередь, действует на частицу 1 с силой $\vec{F}_{21}$. Если взаимодействие определяется только расстоянием между частицами $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, тогда величины (модули) сил $F_{12} = |\vec{F}_{12}|$ и $F_{21} = |\vec{F}_{21}|$ должны быть функциями этого расстояния и должны быть равны друг другу

$$F_{21}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = F_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \equiv F(r). \qquad (6.1)$$

Теперь надо выяснить направление силы, например, направление $\vec{F}_{12}$. У материальных точек нет внутренних векторных характеристик, а у изотропного пространства нет выделенного направления, поэтому направление вектора силы $\vec{F}_{12}$ может быть связано только с направлением векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Причем, направление силы не должно меняться при одновременном повороте взаимодействующих частиц. Таким направлением будет направление от одной частицы к другой $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, которое можно задать единичным вектором

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{\vec{r}}{r}. \tag{6.2}$$

В таком случае, вектор силы запишется единственным образом

$$\vec{F}_{12} = \vec{n}\left|\vec{F}_{12}\right| = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} F_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \tag{6.3}$$

Такие силы называют центральными.

Таким образом, силами, не противоречащими принципу дальнодействия, свойствам симметрии пространства и времени и представлению о без структурности взаимодействующих частиц, являются центральные силы вида (3).

Этот вывод равносилен содержанию 3-го закона Ньютона. Покажем это. Поменяв местами в выражении (3) взаимодействующие частицы, получим

$$\vec{F}_{21} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} F_{21}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = -\vec{n} F_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\vec{F}_{12}. \tag{6.4}$$

Действительно, в формуле (4) узнаем 3-ий закон Ньютона: сила, с которой действует первая частица на вторую, равна по величине и противоположна по направлению силе, с которой действует вторая частица на первую.

А теперь займемся определением меры взаимодействия по изменению конфигурации системы, по изменению взаимного расположения частиц системы.

Опять рассмотрим взаимодействие двух частиц. Положение такой системы в пространстве задается радиус-векторами этих частиц $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. В результате взаимодействия изменилось положение каждой частицы: приращение радиус-вектора $\vec{r}_1$ обозначим $d\vec{r}_1$, а приращение радиус-вектора $\vec{r}_2$ обозначим $d\vec{r}_2$. При этом совершилась работа.

Элементарной работой силы $\vec{F}$ на малом перемещении $d\vec{r}$ называется скалярное произведение этих векторов

$$d'A = \vec{F} d\vec{r}. \tag{6.5}$$

Символ d' употреблен здесь с целью показать, что элементарная работа, вообще говоря, может и не быть дифференциалом некоторой функции.

Элементарная работа, совершенная в системе из двух тел, будет равна

$$d'A = \vec{F}_{12} d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} d\vec{r}_2. \tag{6.6}$$

Запишем это выражение для центральных сил (3), используя (4) и (1),

$$d'A = F(r)\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}d\vec{r}_1 - F(r)\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}d\vec{r}_2 = F(r)\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = F(r)\frac{\vec{r}}{r}d\vec{r}.$$

Направления $\vec{r}$ и $d\vec{r}$ совпадают, значит $\vec{r}d\vec{r} = rdr$, поэтому получим

$$d'A = \vec{F}(r)d\vec{r} = F(r)dr. \qquad (6.7)$$

Итак, элементарная работа, совершаемая в результате потенциального взаимодействия в системе из двух частиц, не зависит от положений $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, от перемещений $d\vec{r}_1$ и $d\vec{r}_2$ каждой частицы в отдельности, а зависит только от расстояния между взаимодействующими частицами r и приращения этого расстояния dr. Поэтому полученное выражение $\vec{F}(r)d\vec{r}$ является полным дифференциалом некоторой скалярной функции

$$\vec{F}(r)d\vec{r} = -dU, \qquad (6.8)$$

т.е.

$$U(r) = -\int \vec{F}d\vec{r} + C. \qquad (6.9)$$

Пусть в начальный момент времени положение двух частиц системы было $\vec{r}_1^{\,н}$ и $\vec{r}_2^{\,н}$, а расстояние между ними $r_н = \left|\vec{r}_1^{\,н} - \vec{r}_2^{\,н}\right|$. В конечный момент времени частицы уже в точках $\vec{r}_1^{\,к}$ и $\vec{r}_2^{\,к}$, а расстояние между ними стало $r_к = \left|\vec{r}_1^{\,к} - \vec{r}_2^{\,к}\right|$. Совершенная при этом работа равна интегралу от (7)

$$A = \int_{r_н}^{r_к} d'A = \int_{r_н}^{r_к} \vec{F}(r)d\vec{r} = -\int_{r_н}^{r_к} dU = -(U_K - U_H) = U_H - U_K. \qquad (6.10)$$

Можно утверждать, что каждому взаимному расположению двух частиц (каждой конфигурации системы) соответствует некоторое значение функции

$$U(r) \equiv U_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

Тогда работа взаимодействия, вызвавшего изменение положений частиц, равна разности значений функции U для начальной и конечной конфигураций и не зависит от закона движения $\vec{r}_i(t)$. Функцию U, характеризующую способность взаимодействия совершать работу, запас работы, называют потенциальной энергией.

Знак в определении (8) выбран так, чтобы работа совершалась за счет убыли энергии системы. Взаимодействие осуществляет свою возможность приводить тело в движение, возможность изменять конфигурацию системы. При этом совершается работа и система переходит в новую конфигурацию с меньшей потенциальной энергией. Часть энергии превратилась в работу.

Работа зависит от разности потенциальной энергии, поэтому потенциальная энергия определена не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной (постоянная C в определении (9)). Этой постоянной можно придать любое значение, т.к. величина потенциальной энергии непосредственно не измеряется, измеряется только работа, равная разности энергий. Выбор постоянной называется калибровкой (нормировкой) потенциальной энергии.

Какое-либо произвольное положение системы, характеризующееся заданием координат ее материальных точек, условно примем за нулевое. Тогда потенциальная энергия системы в рассматриваемом положении равна работе, совершаемой взаимодействием при переходе системы из этого положения в нулевое.

Итак, потенциальное взаимодействие частиц можно описать либо используя понятие силы, действующей на каждую частицу системы, либо используя понятие потенциальной энергии всей системы. Оба описания взаимодействия в механике равноправны. Классическую механику можно построить приняв в качестве меры взаимодействия как силу, так и потенциальную энергию.

До сих пор мы рассматривали меру взаимодействия в системе из двух частиц. А как быть в случае, когда механическая система состоит из большего числа частиц и каждая из частиц одновременно взаимодействует с другими частицами?

В физике предполагается, что если тело взаимодействует с несколькими телами, то эти взаимодействия не влияют друг на друга. Это принцип независимости взаимодействия.

Так же предполагается, что результирующий эффект сложного процесса взаимодействия данного тела со всеми другими телами равен сумме эффектов, вызываемых взаимодействием данного тела с каждым другим телом в отдельности. Это принцип суперпозиции взаимодействия.

Эти два принципа позволяют решить поставленную задачу. Рассмотрим незамкнутую механическую систему из n частиц. На любую из этих частиц действуют силы как со стороны других частиц этой же механической системы, так и со стороны тел не входящих в эту систему.

Силы, действующие на i-ую частицу системы со стороны любой другой j-ой частицы системы, обозначим $\vec{F}_{ij}$ и назовем внутренние силы.

Силы, действующие на i- ую частицу со стороны тел, не входящих в выбранную систему, обозначим $\vec{F}^{e}_{ia}$ и назовем внешние силы. Индекс a обозначает внешнее тело.

Тогда из принципов суперпозиции и независимости взаимодействия найдем полную, результирующую силу $\vec{F}_i$, действующую на i - ую частицу

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} + \sum_{a} \vec{F}^{e}_{ia}, \qquad i = 1,...,n, \quad j \neq i. \tag{6.11}$$

В дальнейшем всюду (если специально не оговорено) будем считать, что внутренние силы $\vec{F}_{ij}$ являются центральными силами.

Относительно внешних сил $\vec{F}^{e}_{ia}$ предположим, что они в общем случае могут явно зависеть от времени, положения и скорости частиц, т. е. имеют вид

$$\vec{F}^e_{ia} = \vec{F}^e_{ia}(\vec{r}_i - \vec{r}_a, \vec{v}_i - \vec{v}_a, t). \tag{6.12}$$

Положение и скорость частицы i даются относительно внешних тел a.

Теперь рассмотрим потенциальную энергию взаимодействия в механической системе из n частиц. Пусть система замкнутая. Полагаем, что потенциальная энергия взаимодействия двух частиц U_{12} известна. Согласно принципам независимости и суперпозиции потенциальная энергия U_i взаимодействия i-й частицы со всеми остальными частицами системы складывается из энергии U_{ij} взаимодействия i-й частицы с каждой другой частицей системы в отдельности:

$$U_i = \sum_{j=1}^{n} U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \qquad i = 1, \ldots, n \qquad j \neq i \tag{6.13}$$

Потенциальная энергия U^{in} взаимодействия всех тел замкнутой системы равна

$$U^{in}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) = \sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \qquad j \neq i \tag{6.14}$$

Как быть, если система не замкнута? В общем случае трудно говорить о потенциальной энергии взаимодействия частиц системы с внешним телом. Наиболее часто потенциальная энергия U^e внешнего взаимодействия оказывается зависящей от времени. Это происходит в следующем случае. Пусть интересующая нас незамкнутая система I взаимодействует с внешним телом II, движение которой не зависит от движения системы I. Говорят, что движение системы II задано. Так как внешнее тело совершает движение в пространстве независимо от системы I, то взаимодействие меняется со временем и потенциальная энергия взаимодействия системы с этим телом станет зависящим от времени. Эти же доводы объясняют появление зависимости от времени в формуле (12).

Потенциальная энергия частиц во внешнем поле $U^e(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_1, t)$ складывается из потенциальных энергий отдельных частиц $U^e_i(\vec{r}_i, t)$:

$$U^e(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n, t) = \sum_{i=1}^{n} U^e_i(\vec{r}_i, t). \tag{6.15}$$

В таком случае полная потенциальная энергия механической системы во внешнем поле будет равна

$$U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n, t) = U^e(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_1, t) + U^{in}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} U^e_i(\vec{r}_i, t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \tag{6.16}$$

Во всех наших рассуждениях есть одна недоговорка. Мы знаем, от каких переменных должна зависеть сила и потенциальная энергия, но не знаем, как найти явный вид функций, описывающих эти зависимости. Эта конкретная за-