

**ДІЛМАН Т.Б., МӘДЕЛХАНОВА Ә.Ж., СЕРІКБОЛ М.С.**

# **АМАЛДАРДЫ ЗЕРТТЕУ**

**Қызылорда – 2014**

Ділман Т.Б., Мәделханова Ә.Ж., Серікбол М.С.

**Амалдарды зерттеу.**

Электронды оқу құралы. – Қызылорда, Қорқыт ата атындағы Қызылорда мемлекеттік униавеситеті, 2014 жыл - 162 бет.

**Жауапты редактор –**

техника ғылымдарының докторы,  
профессор Жанмолдаев Б.Ж.

**ДІЛМАН Төрөбай Бимағанбетұлы,  
МӘДЕЛХАНОВА Әлия Жүсіпназарқызы,  
СЕРІКБОЛ Мақпал Серікболқызы**

Бұл электронды оқу құралы жоғары оқу орындарының техникалық және экономикалық мамандықтарында оқитын студенттеріне “Амалдарды зерттеу” пәні бойынша қосымша оқу құралы ретінде ұсынылады.

## **§1. Амалдарды зерттеудің негізгі ұғымдары, принциптері мен құралдары.**

Мақсатқа қол жеткізуге бағытталған кез келген іс-әрекеттің жиынтығын **амал (операция)** деп атайды. Мақсатсыз іс-әрекет операция емес. Мысалы, белгілі бір уақыт мерзімінде жоғары сапалы өнім (мақсат) алу үшін кәсіпорында жаңа құрал-саймандарды орнату операция болып табылады.

Мақсатқа қол жеткізуі мүмкін бірнеше операцияның ішінен тандалған операция **тиімді** болуы керек. Операцияның тиімділігін тандалған **көрсеткіш** анықтайды. Мысалы, құрал-саймандарды орнату уақытын немесе құрал-саймандарды орнатуға кететін қаржы шығынын көрсеткіш ретінде таңдауға болады. Құрал-саймандарды орнатуға мүмкіндігінше аз уақыт немесе аз шығын қажет ететін операция тиімді.

Мақсатқа қол жеткізуді қамтамасыз ететін жеке адамды немесе ұжымды **операция жасаушы** тарап деп атайды. Операцияға қатысу үлесі мен сипатына қарай операция жасаушы тараптың өкілі мақсатты өзі қоюы немесе жоғарғы жақтан бұйрық алуы мүмкін. Мысалы, құрал-саймандарды орнатуды мақсат еткен кәсіпорынның жұмысшылары мен қызметкерлері операция жасаушы тарап болады.

Операцияны ойдағыдай орындап, мақсатқа жету үшін пайдаланылатын материалдық, қаржылық, еңбек, әкімшілік және тағы басқа ресурстардың жиынтығын операцияның **белсенді құралдары** деп атайды. Операция жасаушы тарап өкілдері операцияны орындау барысында белсенді құралдарды қалаған кезінде қолдануға еркі болуы керек. Әйтпесе операция басқарылатын процесс болмайды және операция жасаушы тарап сырттай бақылаушы ғана болады.

Мысалы, құрал-саймандарды орнатуды мақсат еткен кәсіпорынның қызметкерлері, жұмысшылар мен қызметкерлердің біліктілігі, жалақы қоры, құрал-саймандарды сатып алуға қажет қаржы, өндіріс технологиясы операцияның белсенді құралдары болады.

Операцияның белсенді құралдарын пайдаланудың мүмкін әдістері операция жасаушы тараптың осы операциядағы **стратегиялары** деп аталады. Мүмкін стратегиялардың ішінен тандалған көрсеткіш бойынша артықшылығы бар **тиімді стратегия** табылады. Операция жасаушы тарап операцияны атқарудың тиімді стратегиясын табуы көздейді. Мысалы, кәсіпорында құрал-саймандарды орнату жұмыстарының реті – операцияның стратегиясы.

Операцияның ерекшеліктерін анықтайтын және орындалуына әсер ететін нақты шарттар мен жағдайлар операцияға **әсер етуші факторлар**

деп аталады. Факторларды **анықталған** (яғни, нақты белгілі) факторлар және **анықталмаған** (яғни, кездейсоқ табиғаты бар) факторлар деп бөледі. Факторлар операция жасаушы тарапынан **бақыланатын** және **бақыланбайтын** факторлар болып бөлінеді. Бақыланбайтын факторлар, әдетте, анықталмаған факторлар болады. Бақыланатын факторлардың бар болуы операцияның орындалу барысын басқаруға болатындығын көрсетеді. Әсер етуші факторлардың жиынтығы операцияның орындалатын жағдайын анықтайды. Мысалы, кәсіпорындағы жұмыс ауысымының белгіленген ұзақтығы, ауа райы, жалақының уақытылы берілуі – операцияның әсер етуші факторлары.

Операцияның мақсаты мен жасалған іс-әрекеттің арасындағы сәйкестік көрсеткішін операцияның (немесе таңдалған стратегияның) **тиімділік белгісі** деп атайды. Әр түрлі стратегияларды іске асырмай тұрып салыстыра бағалау, яғни тиімді стратегияны анықтау тиімділік белгісінің маңызды функциясы болып табылады. Әдетте тиімділік белгісінің максимум немесе минимум мәнін қамтамасыз ететін стратегия ізделеді. Операция мақсатын дұрыс анықтайтын және белсенді құралдарды орынсыз шығындамайтын тиімділік белгісін таңдау керек. Мысалы, кәсіпорында жаңа құрал-сайманды орнауға кететін қаржы шығынын тиімділік белгісі ретінде алуға болады.

Қалыптасқан іс-әрекеттің белгілі  $t$  уақыт моментіндегі нақты жағдайын бейнелейтін операция ерекшеліктерінің жиынтығын операцияның сол уақыттағы **күйі** деп айтады. Кез келген операция уақыт бойынша өзінің әр түрлі даму кезеңдерін өткеретін және мақсатқа сәйкес нәтиже алумен аяқталатын процесс болып табылады. Операцияның күйі бірнеше сандық көрсеткіштермен бағалануы мүмкін. Мысалы,  $\xi_1$  - орындалатын жұмыстың нөмірі,  $\xi_2$  - орнатылған құрал-саймандардың саны,  $\xi_3$  - операцияның аяқталуына дейін қалған уақыт.

Операцияның тиімділік белгісі мен әсер етуші факторларының арасындағы байланысты анықтайтын формалды қатынастарды операцияның **математикалық моделі** деп атайды. Математикалық модель тиімділік белгісі мен есепке алынған әсер етуші факторлардың параметрлерінің арасындағы байланыстарды анықтайтын формулалар, теңдеулер мен теңсіздіктер жүйесі, сандық тізбектер арқылы берілуі мүмкін.

Математикалық модельге байланысты **шешім** деп бақыланатын параметрлердің мәндерінің нақты жиынын айтады. Шешімді әр түрлі әдіспен, әр түрлі дәлдікпен және бақыланбайтын параметрлерге қарағанда айтылған әр түрлі болжаммен алуға болады. Әр уақытта бақыланбайтын факторлар бар болғандықтан кез келген модель нақты құбылысты дәл

суреттей алмайды.

Операцияларды, математикалық модельдерді әр түрлі тиімділік белгілері бойынша зерттеп, мүмкін стратегиялардың ішінен тиімді стратегияны іздейтін жеке адамды немесе ұжымды **операцияларды зерттеушілер** деп атайды. Операцияларды зерттеушілер операция жасаушы тарап құрамына енгенімен олардың қызметі зерттеу нәтижесін ұсынумен шектеледі. Нақты шешімді операция жасаушы тараптың әкімшілігі қабылдайды.

Операцияларды зерттеудің **негізгі мәселесі** – қабылданған модель бойынша тиімділік белгісінің экстремум мәндерін анықтау.

Өзара белгілі байланыстармен біріккен және арнайы мақсаттарға қол жеткізуге қолданылатын материалдық нысандардың (элементтердің) жиынын **система** деп атайды. Бұл анықтамадан система ұғымы келесі 1)элемент, 2)байланыстар, 3)операция деген ұғымдардың бірлігі екенін байқаймыз. Мысалы, завод система болып табылады, өйткені заводтың элементтері (цехтар, бөлімдер), элементтердің арасында әр түрлі байланыстар, әр элементтің операцияда атқаратын өз үлестері бар.

Системаның өзі басқа системаның элементі немесе басқа системалардың жиыны болуы мүмкін. Мысалы, университет, факультет, кафедра әрқайсысы система болады, сонымен бірге факультет университеттің элементі және кафедралардың жиыны.

Системаларды шартты түрде үш түрге бөледі: 1)детерминанттық, 2)ықтималдық және 3)ойын системалары.

### **Практикалық сабақ**

#### **Операциялардың математикалық модельдерін құру.**

**Мысал.** Тігін тігу құралы екі түрлі киім тігіп шығарады: көйлек және костюм. Оған 3 түрлі шикізат пайдаланылады: мақта мата, жібек мата, фурнитура. Көйлектің және костюмнің құны 30\$ және 60\$ құрайды. Ал шикізат бойынша қосымша мақта мата 21 м., жібек мата 21 м., фурнитура 18 дана, бір көйлекті тігіп шығару үшін 3 м мақта мата, 1 м жібек мата, 3 фурнитура жұмсалады. Бір костюмді тігу үшін 1 м мақта мата, 2 м жібек мата, және 1 фурнитура қажет. Өнімдер санын және ең үлкен пайда көлемін табу керек.

#### **Шешімі:**

1)  $x_1$  – көйлек саны,  $x_2$  – костюм саны.

2) Мақсаттық функция.

$30x_1$  – көйлек бойынша сатудан келетін табыс,

$60x_2$  – костюм саны бойынша келетін табыс.

3)Шектеулер:

$3x_1$  – көйлекке кететін мақта мата шығыны

$x_2$  – костюмге кететін мақта мата шығыны.

$x_1$  – көйлекке кететін жібек мата шығыны

$2x_2$  – костюмге кететін жібек мата шығыны.

$3x_1$  – көйлекке кететін фурнитура шығыны

$x_2$  – костюмге кететін фурнитура шығыны.

4)Экономикалық есептің математикалық моделі:

$$F(x) = 30x_1 + 60x_2 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 < 21 \\ x_1 + 2x_2 < 21 \\ 3x_1 + x_2 < 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

### Лабораториялық сабақ

#### Операциялардың математикалық модельдерін құру.

##### I.Есептің қойылымы.

**Есеп.** Фирма ішкі (I) және сыртқы (C) жұмыстар үшін екі түрлі бояу дайындайды. Осы өнімдерді шығару үшін түс және әліп май өнімдері пайдаланылады. Өнімнің шығыны, максималды тәуліктік қоры және 1 т. бояудың сату бағасы кестеде көрсетілген.

Өнімдер	1 т. бояуға кететін шығын		Тәулік қоры, т.
	бояу C	бояу I	
Түс (пигмент)	0,8	1,6	4,8
Әліп май (олифа)	1,6	0,8	6,4
<b>Бояудың сату бағасы (1 т.)</b>	2,4	1,6	

Сауда өтімі көрсеткендей, ішкі (I) жұмыстарға кететін бояудың тәуліктік сұранысы 1,6 тоннадан аспайды.

Өнімді өткізгенде максимум пайда табу үшін фирма бояудың қай түрін, қандай мөлшерде өндіруі керектігін анықтаңыз.

II. Математикалық моделін құру.

1) Белгілеулер енгіземіз.

$x_1$  – Сыртқы жұмыстарға қолданылатын бояу мөлшері;

$x_2$  – Ішкі жұмыстарға қолданылатын бояу мөлшері;

$X(x_1, x_2)$  – Сыртқы және ішкі жұмыстар үшін бояудың жоспарланған шығарылымы.

2) Ресурстар бойынша шектеулер.

Бастапқы өнімнің шығыны  $\leq$  Тәуліктік қор.

$0,8x_1$  – Сыртқы жұмыстарға арналған  $x_1$  бояуын дайындауға кететін түстің мөлшері.

$1,6x_2$  – Ішкі жұмыстарға арналған  $x_2$  бояуын дайындауға кететін түстің мөлшері.

$0,8x_1 + 1,6x_2$  – Ішкі және сыртқы жұмыстарға арналған  $x_1, x_2$  бояуын дайындауға кететін түстің жалпы мөлшері.

$0,8x_1 + 1,6x_2 \leq 4,8$  – түсті пайдаланудағы шектеулер.

Тура осы жолмен әліп майды пайдаланудағы шектеулерді құрамыз.

$1,6x_1 + 0,8x_2 \leq 6,4$  – әліп майды пайдаланудағы шектеулер.

$0,8x_2$  – ішкі жұмыстарға арналған бояудың тәуліктік сұранысы.

$0,8x_2 \leq 1,6$  – ішкі жұмыстарға арналған бояудың тәуліктік сұранысы.

$0,8x_1 + 1,6x_2 \leq 4,8$

$1,6x_1 + 0,8x_2 \leq 6,4$

$0,8x_2 \leq 1,6$

3) Мақсаттық функциясы (оптимальді шешім табудағы шарты).

$2,4x_1$  – Сыртқы жұмыстарға арналған  $x_1$  мөлшердегі бояудың сату бағасы.

$1,6x_2$  – Ішкі жұмыстарға арналған  $x_2$  мөлшердегі бояудың сату бағасы.

$2,4x_1 + 1,6x_2$  – Ішкі және сыртқы жұмыстарға арналған  $x_1, x_2$  мөлшердегі бояудың жалпы сату бағасы.

$$F = 2,4x_1 + 1,6x_2 \rightarrow \max$$

4) Теріс болмау шарты

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Сонымен есептің (1), (2), (3) математикалық моделі – сызықты модель болады, себебі мақсат функциясындағы және шектеулердегі  $x_1, x_2$  – айнымалылар дәрежесі бірге тең.

$$F = 2,4 x_1 + 1,6 x_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 1,6x_2 \leq 4,8 \\ 1,6 x_1 + 0,8x_2 \leq 6,4 \\ 0,8x_2 \leq 1,6 \\ x_1, x_2 > 0 \end{cases} \quad (2)$$

## §2. Математикалық программалау есептерінің қойылымдары.

Сызықтық программалау (СП) есебінің жалпы қойылымы: мақсаттық

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

функцияның

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, k}), \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}), \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, l}, l \leq n) \quad (4)$$

шарттар орындалғандағы максимумын немесе минимумын табу керек, мұндағы  $a_{ij}, b_i, c_j$  - берілген тұрақты сандар және  $k \leq m$ .

Берілген (1) функция **мақсаттық** функция деп, ал (2)-(4) шарттар СП есебінің **шектеулері** деп аталады. Мақсаттық функция мен шектеулерге айнаымалылардың тек бірінші дәрежесі енетіндіктен (1)-(4) есебін **сызықтық** программалау есебі деп атайды.

СП есебінің **стандарттық (симметриялық)** қойылымында мақсаттық (1) функцияның (2), (4) шарттар орындалғандағы ( $k = m, l = n$ ) максимум мәні ізделінеді. Басқа сөзбен айтқанда, стандарттық қойылымның шектеулерінде теңсіздіктер ғана беріледі.

СП есебінің **канондық (негізгі)** қойылымында мақсаттық (1) функцияның (3), (4) шарттар орындалғандағы ( $k = 0, l = n$ ) максимум мәні ізделінеді. Басқа сөзбен айтқанда, канондық қойылымның шектеулерінде теңдеулер ғана беріледі.

Берілген (2)-(4) шектеулерді қанағаттандыратын  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  сандар жиынтығын берілген СП есебінің **жоспары** (мүмкін шешуі) деп атайды. Мақсаттық (1) функцияның экстремум мәндерін қамтамасыз ететін  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  жоспарын **тиімді жоспар** деп атайды. Әруақытта  $F(X) \leq F(X^*)$  немесе  $F(X) \geq F(X^*)$  орындалады.

СП есебі қойылымының үш түрі өзара **эквивалентті**, яғни бір түрдегі қойылымды екінші түрге түрлендіруге болады. Бір қойылымдағы СП



есебінің тиімді жоспары екінші қойылымдағы есептің де тиімді жоспары болады. Мақсаттық  $F$  функциясының минимумы ізделінетін есепті  $-F$  функциясының максимумы ізделінетін есепке келтіруге болады.

### §3. Сызықтық программалау есебін геометриялық әдіспен шешу.

Мақсаттық

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (1)$$

функцияның

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \quad (i = \overline{1, k}), \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2) \quad (3)$$

шарттарды қанағаттандыратын шешуін табу керек. Осы (2), (3) теңсіздіктердің әрқайсысы сәйкесінше  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad (i = \overline{1, k})$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  түзулерімен шектелген жарты жазықты анықтайды. Егер (2), (3) теңсіздіктердің жүйесі үйлесімді болса, онда оның шешулері жоғарыда айтылған барлық жарты жазықтықтарда жататын нүктелер жиынын құрайды. Жарты жазықтықтардың қиылысуынан шыққан жиын дөңес жиын. Демек, (1)-(3) есебінің мүмкін шешулер жиыны шешулер көпбұрышы деп аталатын дөңес жиын. Осы көпбұрыштың қабырғалары теңдеулері берілген шектеулер жүйесінде теңсіздік белгілерінің орындарына теңдік белгілерін қою арқылы алынатын түзулер.

Сонымен СП есебінің шешуін табу есебі шешулер көпбұрышының ішінен мақсаттық  $F$  функциясының максимумын қамтамасыз ететін нүктені табуға келтірілді. Егер шешулер көпбұрышы бос жиын болмаса және онда мақсаттық функция жоғарғы жағынан шектелген болса, онда мұндай нүкте табылады. Көпбұрыштың бір төбесінде мақсаттық функцияның максимум мәні бар. Осы ізделінді төбені табу үшін белгілі бір тұрақты  $h$  үшін шешулер көпбұрышы арқылы өтетін деңгейлік  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$  сызығын саламыз. Сөйтіп оны  $\vec{C} = (c_1; c_2)$  векторының бағыты бойынша шешулер көпбұрышының шеткі нүктесінен өткенше қозғаймыз. Табылған нүктенің координаттары СП есебінің тиімді жоспарын анықтайды. Кейде мақсаттық функцияның максимум мәні бір нүктеде емес, белгілі бір кесіндінің барлық нүктелерінде табылуы мүмкін.

Ескерту. Егер мақсаттық функция шешулер көпбұрышында шектелмеген болса немесе СП есебінің шектеулер жүйесі өзара үйлесімсіз болса, онда есептің шешуі болмайды.

Мақсаттық функцияның минимумын табу үшін деңгейлік  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$  сызығын  $\vec{C} = (c_1; c_2)$  векторына қарама қарсы бағытта қозғаймыз.

### Практикалық сабақ

#### Сызықтық программалау есептерін геометриялық әдіспен шешу.

**Мысал.** Кәсіпорында  $A$  және  $B$  өнімдерін өндіру үшін үш түрлі шикізат қолданылады. Бір өнімге қажет шикізат нормасы кестеде берілген. Сонымен бірге мұнда әр түрлі өнімнің бір бірлігін сатқандағы кәсіпорынның пайдасы мен шикізаттардың қоры көрсетілген.

Шикізат түрі	Бір өнімге қажет (кг) шикізат нормасы		Шикізат қоры (кг)
	$A$	$B$	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Бір өнімнің пайдасы (теңге)	30	40	

$A$  және  $B$  өнімдерін қанша данадан өндіргенде табыс барынша көп болады?

Кәсіпорын  $A$  өнімінен  $x_1$  дана,  $B$  өнімінен  $x_2$  дана өндіреді дейік. Өнім өндіру қолда бар шикізаттың көлемімен шектеледі және өндірілетін өнімдер саны теріс болмайды. Демек, мына теңсіздіктер

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

жүйесі орынды. Өндірілген өнімдерді сатудан түскен жалпы табыс

$$F = 30x_1 + 40x_2$$

болады.

Демек, келесі математикалық есепті алдық: берілген жүйенің теріс емес шешулерінің ішінен мақсаттық  $F$  функциясының максимумын қамтамасыз ететін шешуін табу керек.

Қойылған есептің ізделінді шешуін геометриялық әдіспен анықтайық. Алдымен шешулер көпбұрышын анықтайық. Ол үшін СП есебінің берілгендері бойынша мына түзулер

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, & (I) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, & (II) \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252, & (III) \\ x_1 = 0, & (IV) \\ x_2 = 0 & (V) \end{cases}$$

жиынын табамыз. Әрбір түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі. Сол жарты жазықтықтардың біреуін, яғни бастапқы теңсіздікті қанағаттандыратын бөлігін таңдап аламыз. Мысалы,  $12x_1 + 4x_2 < 300$  теңсіздігін қанағаттандыратын жарты жазықтықты қалай табады?  $O(0,0)$  нүктесінің координаттары  $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 300$  теңсіздігін қанағаттандырады. Демек,  $O(0,0)$  нүктесін өзінде ұстап тұрған жарты жазықтық  $(I)$  түзуден пайда болған ізделінді жарты жазықтық. Сол сияқты  $(II)$ ,  $(III)$ ,  $(IV)$ ,  $(V)$  түзулерден туындаған жарты жазықтықтарды бастапқы бір жазықтыққа бейнелейміз. Сонда шешулер көпбұрышы  $OABCD$  бесбұрышы болады.

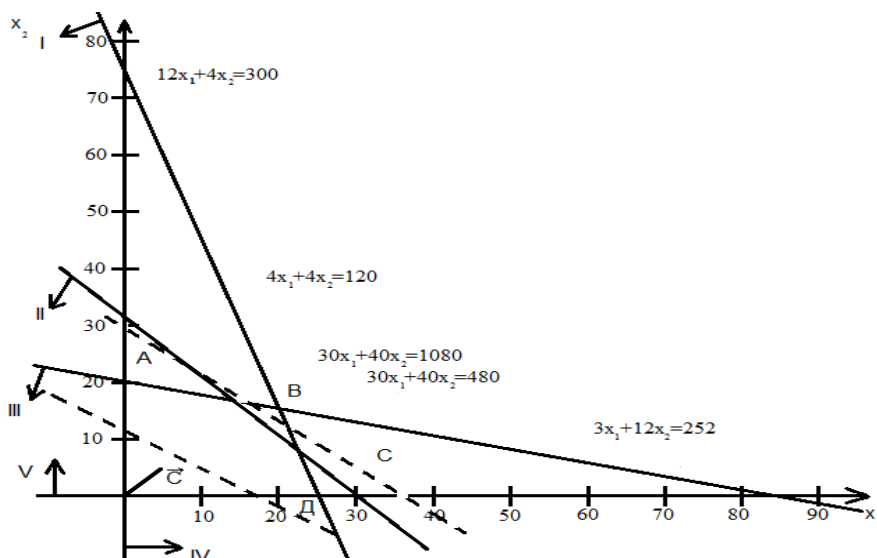
Енді  $F$  мақсаттық функциясының максимумын қамтамасыз ететін  $OABCD$  бесбұрышының нүктесін табуымыз керек. Ол үшін  $\vec{C} = (30;40)$  векторы мен  $30x_1 + 40x_2 = h$  сызығын саламыз, мұндағы  $h$  дегеніміз  $30x_1 + 40x_2 = h$  сызығы шешулер көпбұрышы арқылы өтетіндей тұрақты сан. Енді осы сызықты  $\vec{C}$  векторының бағытымен параллель қозғаймыз. Осы сызықтың шешулер көпбұрышымен қиылысатын соңғы нүктесінің координаттары берілген СП есебінің тиімді жоспарын анықтайды.

Ізделінді нүкте  $(II)$ ,  $(III)$  түзулерінің қиылысуынан пайда болды, яғни оның координаттары

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, & (I) \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, & (II) \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандырады. Бұл жүйені шешіп,  $x_1^* = 12$ ,  $x_2^* = 18$  екенін көреміз. Демек, *A* өнімінен 12 дана, *B* өнімінен 18 дана өндіру керек, сонда табыс барынша көп болады:

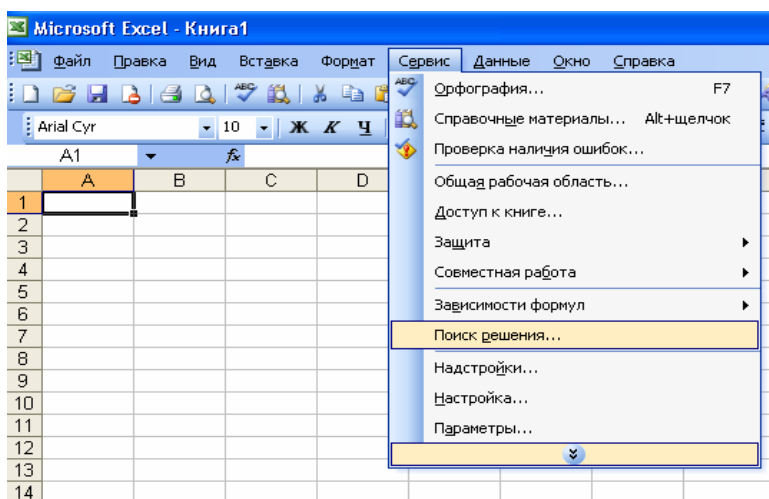
$$F_{\max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080 \text{ теңге.}$$



### Лабораториялық сабақ

Сызықтық программалау есептерін MS Excel көмегімен шешу.

Сызықтық программалау есептерін MS Excel-де шешу үшін бас мәзірдегі «Сервис» пунктінен шақырылатын, «Шешімді іздеу» қондырма бөлімі (надстройка) қолданылады.

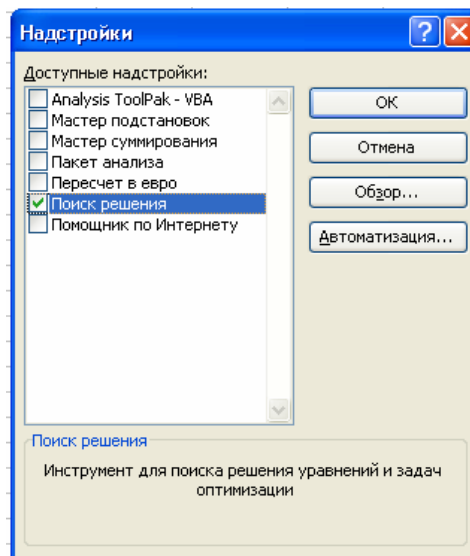


Егер сіздің компьютерде орнатылған Excel-дің нұсқасында «Сервис» мәзірі болмаса, онда «қондырма бөлімі (надстройка)» мәзір пунктін

шақырып және қосымша модульдердің көрсетілген тізімінде «Шешімді іздеу (Поиск решения)» таңдау керек. Жоғарыдағы есепті шешіп көрелік.

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 30x_1 + 40x_2$$

Excel-де төменде көрсетілгендей шаблон құрамыз:



Осы қондырма бөлімнің (настройка) қолданылуын мысал арқылы қарастырайық. Оның көмегімен математикалық моделі мына түрде болатын есепті шешеміз.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Айнымалылар	x1	x2								
2		1	1								
3											
4	F-мақсаттық функция	70									
5											
6	T1 - теңсіздік 1	16									
7	T2 - теңсіздік 2	8									
8	T3 - теңсіздік 3	15									
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											

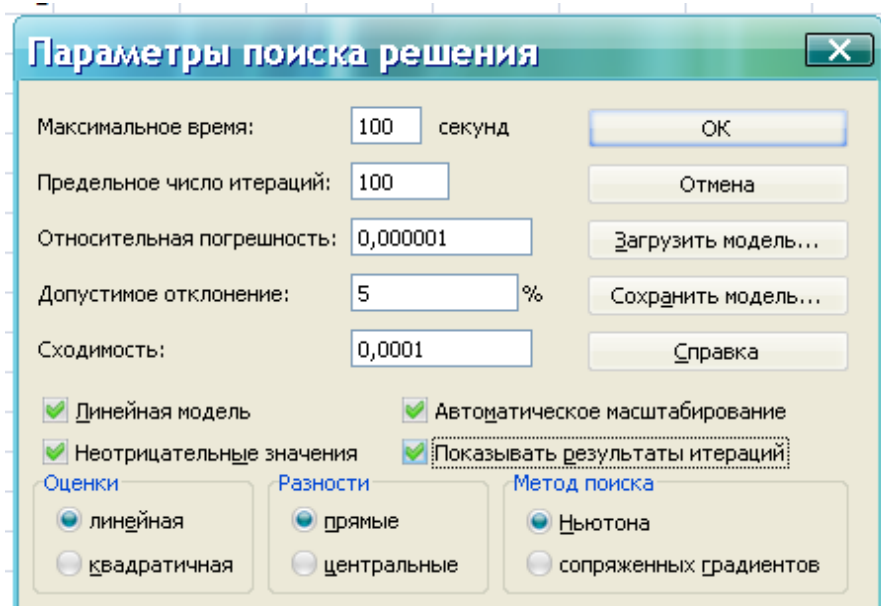
Әр ұяшыққа ұмытып қалмас үшін функция аттарын және формулаларын тереміз. Қалай терілетіндігі келесі СП есептерін симплекс кесте арқылы шешу тақырыбында кездеседі:

«Ұяшыққа сілтеме-Ссылка на ячейку» дегенге, біртіндеп В6, В7 және В8-дерді енгізе бастаймыз. Мәселен, В6 енгізгеннен соң мынадай бейне терезені аламыз.

«Қосымша-Добавить» батырмасын басқаннан соң алдыңғыдай бейне терезе көрінеді. Оған В7, соңынан В8 енгіземіз.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Айнымалылар	x1	x2							
2		1	1							
3										
4	F-мақсаттық функция	70								
5										
6	T1 - теңсіздік 1	16								
7	T2 - теңсіздік 2	8								
8	T3 - теңсіздік 3	15								
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										

«Параметрлер-Параметры» батырмасын бассақ мынадай терезе пайда болады.



Осы бейне терезедегі «Сызықтық модель-Линейная модель» деген ұяшықта «жалауша» болуы тиіс, болмаса оны қондыру қажет. Сонан соң «Жарайды-Ок»-ді басамыз. Алғашқы бейне терезе шығады.

Есептеу процедурасының барлығы аяқталды. Енді тек «Орында-Выполнить» деген батырманы басып, бұйрықты орындау қажет.

Нәтиже төмендегі бейне терезеде көрсетілді.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Айнымалылар	x1	x2						
2		12	18						
3									
4	F-мақсаттық функция	1080							
5									
6	T1 - теңсіздік 1	216							
7	T2 - теңсіздік 2	120							
8	T3 - теңсіздік 3	252							
9									
10									
11									

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Тип отчета: Результаты, Устойчивость, Пределы

Сохранить найденное решение

Восстановить исходные значения

Кнопки: ОК, Отмена, Сохранить сценарий..., Справка

Тиімділеу есебінің шешімдері B2:F2 ұяшықтарда жазылған. Функцияның максимум мәні F=1080 теңге. Ол B4 ұяшықта жазылған.

**Мысал-2.**

$$F(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 0,8x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Excel-де төменде көрсетілгендей шаблон құрамыз:

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Переменные			Целевая функция	
3		Продукция П1	Продукция П2			
4	Значение					
5	Коэффициент в ЦФ					
6						
7		Ограничения				
8				Левая часть	Знак	Правая часть
9	Ресурс А					
10	Ресурс В					
11	Ресурс С					
12	Ограничение по спросу 1					
13	Ограничение по спросу 2					
14						
15						

Енді берілген сандық мәліметтерді есепке енгіземіз

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Переменные			Целевая функция		
3		Продукция П1	Продукция П2				
4	Значение						
5	Коэффициент в ЦФ	3	2				
6							
7		Ограничения					
8				Левая часть	Знак	Правая часть	
9	Ресурс А	1	2		<=	6	
10	Ресурс В	2	1		<=	8	
11	Ресурс С	1	0,8		<=	5	
12	Ограничение по спросу 1	-1	1		<=	1	
13	Ограничение по спросу 2	0	1		<=	2	
14							
15							

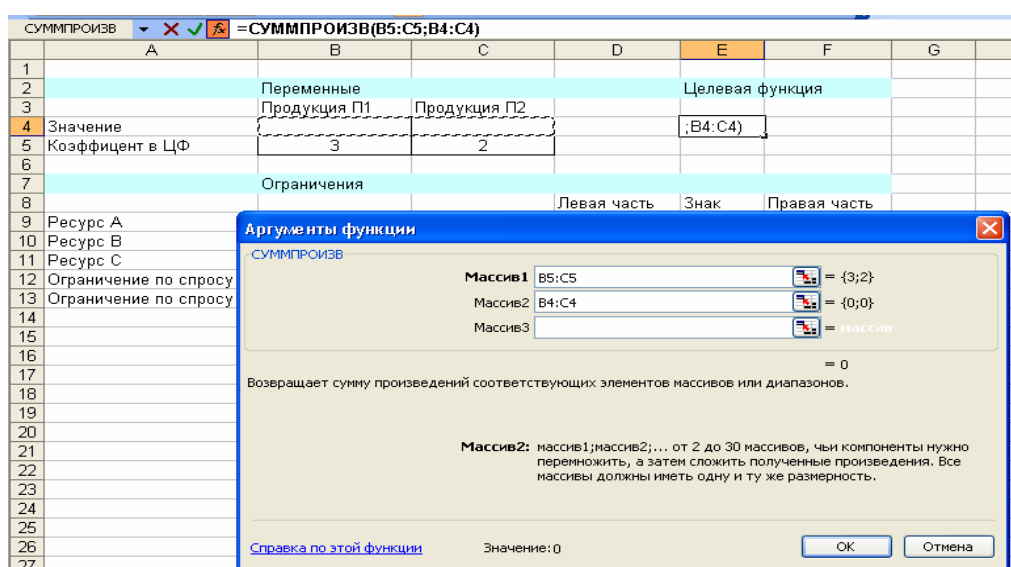
Белгіленген бос торларға (мақсаттық функцияның және теңсіздіктің сол жақ мәндері) байланыстарды және жұмыс парағындағы сандар арасындағы қатынасты суреттейтін формулаларды енгізу қажет.



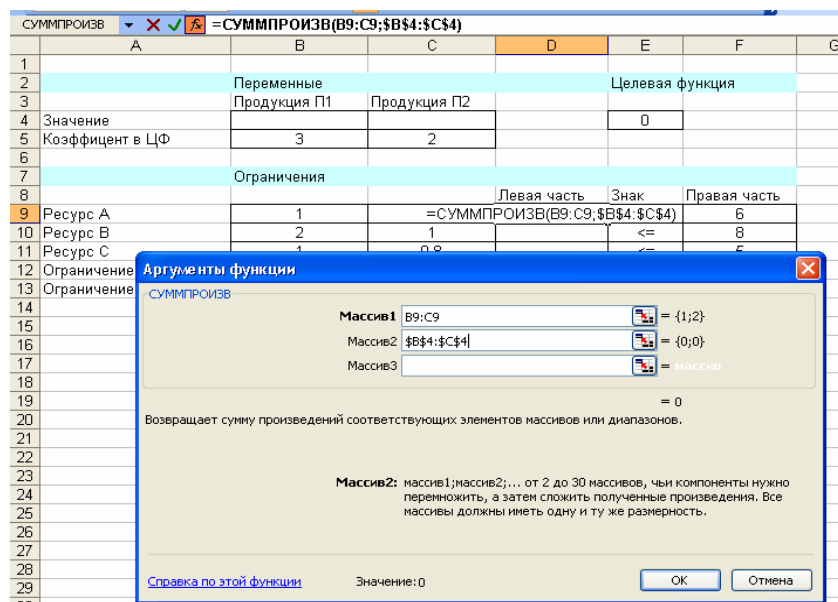
В4:С4 торлары Excel-де өзгермелі (біздің моделімізде бұл белгісіз айнымалылар) деп аталады, яғни олардың **Шешімдерін іздеулерін** өзгерте отырып, мақсаттық функцияның оптимальді мәнін табады. Бұл торларға бастапқыда енгізілетін мәндер, әдетте нөлдер (толтырылмаған торлар өздігінен нөлдік емес мәндері бар торлар ретінде болады).

Енді формулаларды енгізу қажет. Біздің бұл математикалық модельде, мақсаттық функция коэффициенттер векторының белгісіздер векторына көбейтіндісі. Шынында да,  $3x_1 + 2x_2$  өрнегін (3,2) векторыны  $(x_1, x_2)$  векторына көбейтіндісі ретінде қарстыруға болады.

Excel-де векторлардың скаляр көбейтіндісін табуға көмектесетін СУММПРОИЗВ функциясы бар. Е4 торына осы функцияны шақыру керек, ал көбейту векторлары ретінде тендеулердің коэффициенттерінен (бұл жағдайда В5:С5) және шешу нәтижесінде қою керек,  $x_1, x_2$  (В4:С4 торлары) мәндері орналасатын торлардың адресстерін орнатамыз.



Шектеудің әрбір сол жағы екі вектордың көбейтіндісін береді: шығынның матрицасының жолы мен белгісіздер векторы. Яғни,  $x_1 + 2x_2$  (бірінші шектеу үшін  $x_1 + 2x_2 \leq 6$ ) өрнегін (1,2) коэффициенттер векторы мен әзір айнымалы болып тұрған  $(x_1, x_2)$  векторының көбейтіндісі ретінде қарастырамыз. бірінші шектеудің сол бөлігінің формуласы үшін бөлінген торда (D4), СУММПРОИЗВ функциясын шақырамыз. Көбейтілетін векторлар адресстері негізінде коэффициенттер жолының адресін В9:С9 және айнымалылар мәндері адресін В4:С4 енгіземіз.



«Сол жақ бөлік» графасының қалған төрт торына шығын матрицасының сәйкес жолын пайдаланып, ұқсас формулаларды енгіземіз. Енгізілген формулалары бар экранның бөлігі төменде көрсетілген:

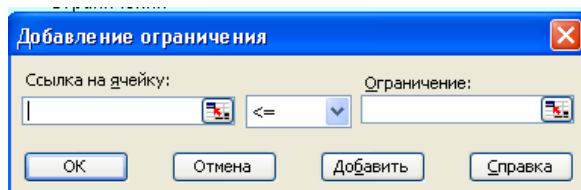
	A	B	C	D	E	F
1						
2		Переменные		Целевая функция		
3		Продукция П1	Продукция П2			
4	Значение					0
5	Коэффициент в ЦФ	3	2			
6						
7		Ограничения				
8				Левая часть	Знак	Правая часть
9	Ресурс А	1	2	0	<=	6
10	Ресурс В	2	1	0	<=	8
11	Ресурс С	1	0,8	0	<=	5
12	Ограничение по спросу 1	-1	1	0	<=	1
13	Ограничение по спросу 2	0	1	0	<=	2

Жұмыс парағында «Шешімді іздеу» сервисін шақыру кезінде есеппен бірге шектеудің сол жақ бөлігі үшін формулалар және мақсаттық функцияның мәні үшін формула енуі қажет.

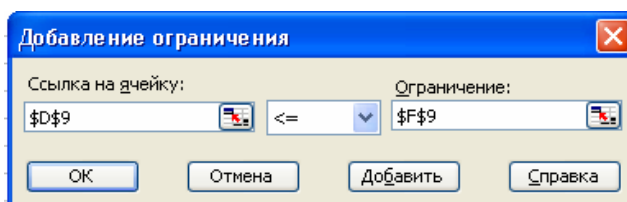
Сервис мәзірінен «Шешімді іздеу-Поиск решения» таңдаймыз. Пайда болған терезеде келесі мәліметті қоямыз:

- Мақсаттық тор ретінде E4 мақсаттық функциясының мәні үшін тордың адресін орнатамыз;
- «жалаушаны» «максимум мән» нұсқасына орнатамыз, себебі бұл жағдайда мақсаттық функцияның максимумы ізделінеді.
- Өзгеретін торлар ретінде B4:C4 айнымалылар мәні жолдарының адресі жазылады;

- Шектеулерді енгізуге арналған терезенің оң жағынан «Енгізу-Добавить» батырмасын басамыз, шектеуді енгізуге арналған форма шығады;

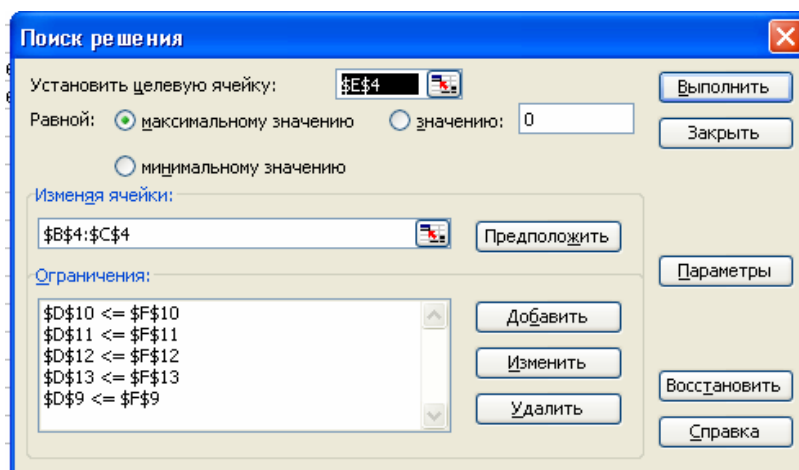


- «Торға сілтеме-Ссылка на ячейку» формасының сол бөлігіне бірінші D9 шектеудің сол бөлігіне арналған формуланың адресі жазылады, теңсіздіктің керекті таңбасы (біздің жағдайда <=), «Шектеу-Ограничение» өрісіне F9 шектеуінің оң жағына нұсқау енгізіледі;



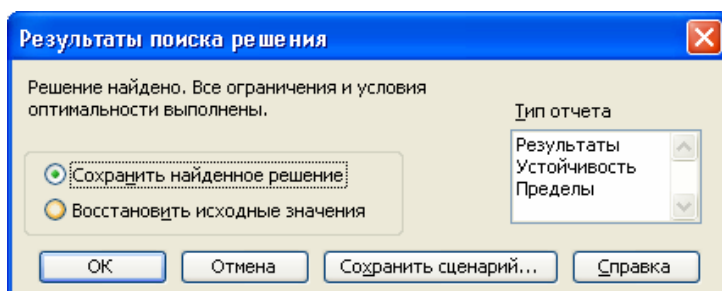
- Сол сияқты есептің барлық шектеулері енгізіледі, сосын «Ок» батырмасы басылады;

Сонымен, барлық мәлімет енгізілген «Шешімді іздеу-Поиск решения» терезесі мына түрде болады:



Әрі қарай «Параметрлер-Параметры» батырмасын басып, «Сызықтық модель-Линейная модель» және «Теріс емес мәндер-Неотрицательные значения» «жалаушаларын» орнату керек, себебі бұл жағдайда есеп

сызықтық программалау есебі болады. Ал шектеулер айнымалылардың теріс емес болуын талап етеді. Сосын «Ок», «Орындау-Выполнить» батырмасы басылады, сосын шешімдердің нәтижесі терезесі шығады.



Егер барлық әрекеттердің соңғы нәтижесінде «Шешім табылды-Решение найдено» хабарламасымен терезе шықса, онда есеп берудің үш түрін алуға болады. Олар модельдің сезгіштігіне талдау жасағанда қажет. Бұл мысалда табылған шешімді «Ок» батырмасын басу арқылы сақтап қою жеткілікті. Нәтижесінде есептің шешімі алынды.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Переменные				Целевая функция	
3		Продукция П1	Продукция П2				
4	Значение	3,333333333	1,333333333			12,66667	
5	Кoeffициент в ЦФ	3	2				
6							
7		Ограничения					
8				Левая часть	Знак	Правая часть	
9	Ресурс А	1	2	6	<=	6	
10	Ресурс В	2	1	8	<=	8	
11	Ресурс С	1	0,8	4,4	<=	5	
12	Ограничение по спросу 1	-1	1	-2	<=	1	
13	Ограничение по спросу 2	0	1	1,333333333	<=	2	
14							
15							
16							

Егер есепті шешу нәтижесінде шешімдерін табу мүмкін еместігі туралы хабарламасы бар терезе шықса, онда ол есепті жазу барысында қате (шектеулер үшін формулалар толмаған, максимизацияның немесе минимизацияның жалаушалары дұрыс қойылмаған және т.б.) кетті деген сөз.

### Тапсырмалар

**Тапсырма №1:** Аң өсіру фермасында түлкі мен бұлғын бағылады. Оларды қалыпты жағдайда өсіру үшін үш түрлі жем пайдаланылды. Әрбір аңның жақсы өсуіне қажетті жемнің рационы кестеде келтірілген. Сол

сияқты мұнда әр жемнің қолда бар қоры, аңның терісін өткізуден түсетін табыс мөлшері берілген. Табыс барынша көп болуы үшін қанша түлкі және бұлғын өсіру қажет?

Жем түрі	Бір аңға қажет (кг) жем нормасы		Жем қоры (кг)
	түлкі	бұлғын	
I	2	3	$180+6n$
II	4	1	$240+4n$
III	6	7	$426+2n$
Бір аң терісінің пайдасы (теңге)	16	12	n – студенттің жеке нөмірі

**Тапсырма №2.** Екі түрлі  $P_1$  и  $P_2$  бұйым дайындау үшін үш түрлі шикізат қолданады:  $S_1, S_2, S_3$ . Есептің басқа да шарттары келесі кестеде көрсетілген:

Шикізат түрі	Бір бұйымға қажет (кг) шикізат нормасы		Шикізат қоры (кг)
	$P_1$	$P_2$	
$S_1$	2	5	$20+6n$
$S_2$	8	5	$40+4n$
$S_3$	5	6	$30+2n$
Бір бұйымның пайдасы (теңге)	50	40	n – студенттің жеке нөмірі

Табыс барынша көп болуы үшін қанша өнім шығару қажет?

**Тапсырма №3.** Трикотажды зауыт жемпір мен көйлек тігу үшін тоқыма мата, силикон және нитрон қолданады. Бұлардың қоры 820, 430 және 310 кг. Есептің қалған шарттары кестеде көрсетілген:

Шикізат түрлері	Шығын нормасы		Қор
	Жемпірлер	Көйлектер	
Тоқыма мата	0,4	0,2	$820+6n$
Силикон	0,2	0,1	$430+4n$
Нитрон	0,1	0,1	$310+2n$
Пайдасы	7,8	5,6	n – студенттің жеке нөмірі

Кіріс максимум болатындай бұйымды өндіру жоспарын анықтау қажет.

**Тапсырма №4.**

$$f = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 + n, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -6 + 2n, \\ x_1 - x_2 \leq 4 + 3n, \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 28, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Тапсырма №5.**

$$f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -9 + 2n, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 27 + n, \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 + 2n, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Тапсырма №6.**

$$f = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 + n, \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 + 2n, \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 9 + 3n, \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 28, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Тапсырма №7.**

$$f = -12 + 6x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 15 \geq 0 + n, \\ x_1 \leq 10 + 2n, \\ 4x_1 + x_2 \geq -2 + 3n, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Тапсырма №8.**

$$f = x_1 + 2x_2 + 3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 8 + n, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 + 2n, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Тапсырма №9.**

$$f = -2x_1 - x_2 \rightarrow \max, \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 1 + n, \\ 3x_1 - x_2 \geq -1 + 2n, \\ x_1 - 4x_2 \leq 2 + 3n \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

#### **§4. Азғындалмаған сызықтық программалау есебін симплекс-таблица әдісімен шешу.**

СП есебінің жалпы қойылымы: сызықтық

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

функцияның максимумы немесе минимумы сызықтық

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, k}), \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}), \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, l}, l \leq n) \quad (4)$$

теңсіздіктер мен теңдеулерді қанағаттандыратын шешулер жиынында ізделінеді, мұндағы  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_j$  берілген нақты сандар және  $k \leq m$ . Қарастылған (1) функцияны (1)-(4) есебінің мақсаттық функциясы, ал (2)-(4) шарттарды осы есептің шектеулері деп атайды. СП есебінің стандарттық (симметриялық) қойылымы: (1) функцияның максимумы (2) ( $k = m$ ) және (4) ( $l = n$ ) теңсіздіктерді қанағаттандыратын шешулер жиынында ізделінеді.

СП есебінің канондық (негізгі) қойылымы: (1) функцияның максимумы (3) ( $k = 0$ ) теңдеулер мен (4) ( $l = n$ ) теңсіздіктерді қанағаттандыратын шешулер жиынында ізделінеді.

Есептегі (2)-(4) шарттарды қанағаттандыратын  $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  сандар жиынын есептің мүмкін шешулері немесе жоспары деп атайды. Мақсаттық (1) функцияның максимумын не минимумын қамтамасыз ететін  $X^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$  жоспарын тиімді жоспар деп атайды.

СП есебінің жалпы, стандарттық және канондық қойылымдары бір

біріне түрленеді. СП есебін шешу әдістері канондық қойылым үшін баяндалады. Егер  $\min F = -\max(-F)$  екенін ескерсек, онда мақсаттық  $F$  функциясының минимумының орнына  $-F$  функциясының максимумын іздейді.

Егер  $C \cdot X$  деп  $C = (c_1; c_2; \dots; c_n)$ ,  $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  векторларының векторлық көбейтіндісін белгілесек, онда мақсаттық функцияны  $F = C \cdot X$  деп жазуға болады. СП есебінің векторлық формада жазылған канондық қойылымы: мақсаттық

$$F = C \cdot X \quad (5)$$

функциясының максимумы

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = P_0, \quad (6)$$

$$X \geq 0 \quad (7)$$

шарттары орындалған жағдайда ізделінеді. Бұл есептегі келесі

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

векторлар теңдеулер системасындағы белгісіз айнымалылар жанындағы коэффициенттер мен бос мүшелерден тұратын  $m$  өлшемді вектор-бағандар.

Егер (6) формуладағы оң мәнді  $x_j$  коэффициенттерінің жанындағы  $P_j$  векторлар системасы өзара сызықтық тәуелсіз болса, онда  $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  жоспарын тірек жоспары деп атайды.  $P_j$  векторларының оң мәнді компоненттерінің санын  $k$  деп белгілейік.  $P_j$  векторлары  $m$  өлшемді векторлар болғандықтан  $k \leq m$ . Егер тірек жоспарында  $k = m$  ( $k < m$ ) болса, онда тірек жоспарын азғындалмаған (азғындалған) тірек жоспары деп атайды. СП есебінің бастапқы тірек жоспары азғындалмаған (азғындалған) болса, онда бұл есепті симплекс (жасанды базис) әдісімен шешеді.

Егер (6) формуладағы алғашқы  $P_1, P_2, \dots, P_m$  векторлары бірлік векторлар болса, онда  $b_1 P_1 + b_2 P_2 + \dots + b_m P_m = P_0$  болғандықтан  $X = (b_1; b_2; \dots; b_m; 0; \dots; 0)$  жоспары азғындалмаған тірек жоспарын құрайды. Бұл тірек жоспары  $m$  өлшемді кеңістікте базис құрайтын  $P_1, P_2, \dots, P_m$  бірлік векторларымен анықталды. Сондықтан  $P_1, P_2, \dots, P_n, P_0$  векторларының кез келгені базистік векторлардың сызықтық комбинациясы болады.

Енді

$$z_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij}, \Delta_j = z_j - c_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (8)$$