**С. Е. ЕЛУБАЕВ, Т. Б. ДІЛМАН**

# ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ЖӘНЕ ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН КЕЙБІР КЕРІ ЕСЕПТЕР

*Электронды оқу құралы*

**Қызылорда 2014**

*Жауапты редактор -*

**Ғ.Б. Баканов -** Қорқыт ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университетінің кафедра меңгерушісі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор

*Пікір берушілер –*

**С.Е. Темірболат** - Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің профессоры, физика-математика ғылымдарының докторы;

**Н.Т. Данаев** - Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті жанындағы математика және механика ғылыми зерттеу институтының директоры, Қазақстан Республикасының Ұлттық және Халықаралық инженерлік академияларының академигі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор;

**С.Ө. Баекова** - Қорқыт ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университетінің профессоры, физика-математика ғылымдарының кандидаты.

**ЕЛУБАЕВ Сахабиден Елубайұлы,**
**ДІЛМАН Төребай Бимағанбетұлы**
**Гиперболалық және параболалық теңдеулер үшін кейбір кері есептер. Қызылорда, 2014. - 236 бет.**

Электронды оқу құралы гиперболалық және параболалық теңдеулер үшін қойылған кері есептер теориясының негіздерімен, кейбір интегралдық геометрия есептерімен таныстырады. Мұндай есептер негізінен классикалық мағынада корректілі емес есептер болғандықтан, олардың шартты корректілігі зерттеледі.

Университеттер мен педагогика институттарының студенттеріне арналған электронды оқу құралы.

# I тарау.  КІРІСПЕ

## §1. Дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған есептер

### 1$^{o}$. Математикалық физиканың коррективті және коррективті емес есептері

Жай дифференциалдық және математикалық физика теңдеулері үшін қойылған есептерді зерттегенімізде осы есептердің коррективтілігі туралы ұғым өте маңызды роль атқарады. Математикалық физика есебінің коррективтілігі туралы ұғымды 1902 жылы Жак Адамар (1865-1963) тұжырымдады [130].

Егер дифференциалдық теңдеу үшін қойылған есептің шешуі

1) бар,

2) жалғыз,

3) есептің берілгендеріне үздіксіз тәуелді

болса, онда бұл есепті классикалық мағынада немесе Ж.Адамар бойынша дұрыс қойылған (**коррективті**) есеп деп атайды. Егер 1)-3) шарттарының кемінде біреуі орындалмаса, онда дифференциалдық теңдеу үшін қойылған есепті классикалық мағынада немесе Ж.Адамар бойынша дұрыс қойылмаған (**коррективті емес**) есеп деп атайды

Бұл шарттар кейінірек дәлірек анықталды. Математикалық физика есептерінің шешулері мен қосымша шарттары белгілі бір функционалдық кеңістіктердің элементтері деп қарастырылады.

**Адамар мысалы.** Лаплас теңдеуі үшін қойылған Коши есебі классикалық мағынада коррективті емес [84]. Осы есепті қарайық:

$$\Delta u = 0 \quad (u = u(x, y)) \tag{1}$$

теңдеуі үшін алғашқы

$$u(x,0) = 0\,, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \alpha \cdot \sin nx \tag{2}$$

және шекаралық

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \tag{3}$$

шарттар берілсін, мұнда $\alpha$ - белгілі бір сан.

Осы (1)-(3) есебінің шешуі мына

$$u(x, y) = \alpha \cdot \frac{shny}{n} \cdot \sin nx \tag{4}$$

формуламен өрнектеледі. Егер $y$ айнымалысын белгілеп алсақ, онда $x$ айнымалысына тәуелді функциялардың функционалдық кеңістіктерінің жұбы мен кез келген $\varepsilon \succ 0$, $c \succ 0$ тұрақтылары үшін

$$\begin{cases} \left\| \alpha \cdot \sin nx \right\| \prec \varepsilon, \\ \left\| \alpha \cdot \dfrac{shny}{n} \cdot \sin nx \right\| \succ c \end{cases} \tag{5}$$

теңсіздіктері орындалатындай етіп $\alpha$ мен $n$ сандарын таңдап алуға болады. Ал (5) теңсіздіктер есептің шешуі есептің берілгендеріне үздіксіз тәуелді болмайтынын көрсетеді, яғни есептің берілгендерінің өте аз өзгерісі шешудің өте үлкен өзгерістеріне әкеледі.

Ж.Адамар мұндай корректілі емес есептер ешқандай нақтылы табиғи процесті суреттемейді деп ойлады. Сондықтан көп уақыт бойы математикалық физиканың белгілі бір функционалдық кеңістіктер жұбында корректілі болмайтын есептерінің ешқандай физикалық құбылыстармен байланысы жоқ деп есептеліп, математиктер корректілі емес есептерді зерттемеді.

Классикалық мағынада корректілі емес есепті ең алғаш рет 1943 жылы А.Н.Тихонов қарастырды [117].

Егер дифференциалдық теңдеу үшін қойылған есептің шешуі функционалдық кеңістіктің белгілі бір $M$ жиынында

1) бар,

2) жалғыз,

3) есептің берілгендеріне үздіксіз тәуелді (яғни есептің шешуін $M$ жиынынан шығармайтын есептің берілгендерінің шексіз аз өзгерісіне шешудің шексіз аз өзгерісі сәйкес келетін)

болса, онда бұл есепті Тихонов бойынша (немесе шартты) корректілі есеп деп атайды.

Бұл ұғымды 1962 жылы М.М.Лаврентьев тұжырымдады [81].

Осы $M$ жиынын есептің корректілік жиыны деп атайды, ол көбінесе жинақы жиын болады. Егер есептің корректілік жиыны жинақы жиын болса, онда есептің шешуінің жалғыздығынан сол шешудің орнықтылығы шығатынын А.Н.Тихонов дәлелдеген [117]. Енді $C$ Банах кеңістігінде А.Н.Тихонов теоремасын тұжырымдайық.

**Теорема.** $X$ пен $Y$ - Банах кеңістіктері болсын. $A$ - анықталу облысы $X$, ал мәндер облысы $Y$ кеңістігінде жататын әбден үздіксіз оператор, $M \subset X$ - жинақы жиын. Егер $Ax = f$, $x \in X$, $f \in Y$ теңдеуінің шешуі жалғыз болса, онда шешу $M$ жиынында теңдеудің оң жағына бірқалыпты үздіксіз тәуелді, яғни кез келген $\varepsilon \succ 0$ үшін $\delta \succ 0$ табылып, кез келген $x_1, x_2 \in M$ үшін $\|Ax_1 - Ax_2\| \le \delta$ болғанда $\|x_1 - x_2\| \le \varepsilon$ теңсіздігі орындалады [84].

Функционалдық кеңістіктердің бір жұбында корректілі емес есеп кеңістіктердің екінші жұбында корректілі болуы мүмкін.

Корректілі емес есептерді зерттеудегі негізгі бағыттардың бірі – дифференциалдық теңдеу үшін қойылған есеп шешуінің жалғыздығы туралы теореманы дәлелдеу. Жай дифференциалдық теңдеулер мен математикалық физиканың тура есептері негізінен Ж.Адамар бойынша корректілі есептер болады. Осы кітапта қарастырылатын кері есептердің барлығы дерлік Ж.Адамар бойынша корректілі болмайды.

Классикалық мағынада корректілі болмайтын есептер теориясының негізін Андрей Николаевич Тихонов (1906-1993), Михаил Михайлович Лаврентьев (1932-2010) пен Валентин Константинович Иванов (1908-1992) жасады.

Бұл теорияның негіздері А.Н.Тихонов пен В.Я.Арсенин [120], М.М.Лаврентьев [81], М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов, В.Г.Васильев [89], М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов, С.П.Шишатский [90], М.М.Лаврентьев, К.Г.Резницкая, В.Г.Яхно [91], В.Г.Романов [108], Ю.Е.Аниконов [5], А.Л.Бухгейм [15], В.К.Иванов, В.В.Васин, В.П.Танана [64], Ғ.Б.Баканов [137] монографияларында, М.М.Лаврентьев [84], В.Г.Романов [110], В.Я.Арсенин [6], С.Е.Темірболатов [116], С.Е.Елубаев [59], С.Е.Елубаев, Т.Б.Ділманов [138] арнаулы курстарында және тағы басқа еңбектерде баяндалған.

## 2$^{o}$. Дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған тура және кері есептер

Дифференциалдық теңдеулер мен математикалық физика теңдеулері теориясында жай және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін тура және кері есептер қарастырылады. Дифференциалдық теңдеу үшін қойылған **тура есепте** алдын ала берілген қосымша (алғашқы және шекаралық) шарттар бойынша дифференциалдық теңдеудің жалғыз орнықты шешуі ізделінеді [17, 78, 103, 121, 123].

Дифференциалдық теңдеу үшін қойылған **кері есеп** деп келесі типтегі есепті айтады [82, 83, 109]. Дифференциалдық теңдеулер класы және осы класқа жататын бір дифференциалдық теңдеу үшін қойылған тура есептің шешуі немесе шешулері жөнінде информация берілсін. Сол белгілі информация бойынша берілген кластан дифференциалдық теңдеуді тауып алу керек. Дифференциалдық теңдеулер класы саны шекті параметрлердің немесе функциялардың жиыны арқылы беріледі. Сызықтық дифференциалдық теңдеулер үшін белгісіз функциялар ретінде осы теңдеулердің коэффициенттері немесе оң жақтары қарастырылады. Сондықтан дифференциалдық теңдеу үшін қойылған кері есепте дифференциалдық теңдеуді анықтайтын функциялар жиынын табу керек. Ал, дербес жағдайда, сызықтық дифференциалдық теңдеу үшін қойылған кері есепте теңдеудің барлық (не кейбір) коэффициенттері немесе теңдеудің оң жағы ізделінеді.

Тура есептердің шешулері жөніндегі информациялардың әр түрлі болуы мүмкін. Дербес жағдайда, тәуелсіз айнымалылардың кейбір көпбейнелерінде берілген шешудің өзі информация ретінде қарастырылады. Тура есептердің шешулері туралы информацияларды кейде сол есеп шешулерінің функционалдары деп атайды. Егер ізделінетін функциялардың ең болмаса біреуі $n \geq 1$ айнымалыдан тәуелді болса, онда мұндай кері есепті $n$ өлшемді кері есеп деп атайды. Кері есептер басқаша да қойылады, мысалы, теңдеудің коэффициенттерінің не оң жағының орнына алғашқы немесе шекаралық шарттар ізделінеді [90, гл. 7, §6].

Дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған кері есептер көбіне Ж.Адамар бойынша корректілі болмайды. Осыған байланысты кері есептер теориясында шешудің бар болуы және жалғыздығы туралы теоремалардың маңызы ерекше.

Дифференциалдық теңдеу үшін қойылған есепке мысал келтіреміз. Бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін қойылған Коши есебін қарастырайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + q(x)u = 0, \quad (x, y) \in R^2, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in R, \tag{2}$$

мұндағы $q(x)$ бүкіл $R$ сан осінде анықталған үздіксіз функция болсын. Берілген $\varphi(x)$ функциясы нақты сандар осінде үздіксіз дифференциалданады дейік. Сонда (1)-(2) есебі Ж.Адамар бойынша корректілі қойылған есеп болады. Енді (1)-(2) тура есебінің шешуі туралы келесі информация

$$u(0, y) = \psi(y), \quad y \in R \tag{3}$$

берілсін. Егер берілген $\psi(y)$ функция бойынша $q(x)$ коэффициенті ізделінсе, онда мұндай есеп кері есеп болады.

Шынында, (1)-(2) тура есептің шешуі төмендегі

$$u(x, y) = \varphi(x + y) \cdot \exp(\int_{x+y}^{x} q(t)dt), \quad (x, y) \in R^2$$

формуламен анықталатыны белгілі [108]. Бұған (3) шартты қолданғанымызда

$$\psi(y) = \varphi(y) \cdot \exp(\int_{y}^{0} q(t)dt), \quad y \in R \tag{4}$$

өрнекке келеміз. Егер

1) $\psi(y)$ функциясы үздіксіз дифференциалданса,

2) $\dfrac{\psi(y)}{\varphi(y)} \succ 0, \quad y \in R, \quad \varphi(0) = \psi(0)$ болса,

онда (1)-(3) кері есептің шешуі бар болады және ол

$$q(x) = -\frac{d}{dx}\ln\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}, \quad x \in R$$

формуласымен анықталады. Егер $\varphi(x) \neq 0, \quad x \in R$ болса, онда (4) формуладан кері есептің шешуі жалғыз екенін көреміз.

Дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған кері есептер теориясы бастапқыда тарихи үш бағытта дамыды.

**Бірінші бағыт** – көпшілікке кеңінен таныс Штурм-Лиувилль кері есебі. Мұнда дифференциалдық оператордың спектрі немесе спектрлік функциясы бойынша сол дифференциалдық оператордың өзін анықтау керек. Бұл есептің шешуінің жалғыздығы жөніндегі алғашқы теореманы 1929 жылы Виктор Амазаспович Амбарцумян (1908-1996) дәлелдеді [128].

Әрі қарай Штурм-Лиувилль кері есебінің теориясын Г.Борг [129], В.А.Марченко [95, 96], И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан [21], М.Г.Крейн [76, 77], Б.М.Левитан [94], М.Г.Гасымов, Б.М.Левитан [18], Ю.М.Березанский [8, 9], Л.П.Нижник [101], М.А.Наймарк [100], Л.Д.Фаддеев [125], Л.А.Чудов [127], З.С.Агранович, В.А.Марченко [1], А.С.Алексеев [4] және тағы басқалар дамытты. Штурм-Лиувилль есептеріне, спектрлік функция ұғымына төменде толығырақ тоқтаймыз ( I тарау, §3).

**Екінші бағыт** – сейсмиканың кері кинематикалық есебі. Осы есептің физикалық мазмұнын тұжырымдайық. Белгілі бір $S$ бетімен қоршалған $D \subset R^3$ облысындағы кейбір $x^0 \in D \cup S$ нүктелеріндегі ауытқу көздерінде туған толқындық процесті қарайық. Облыстың шекаралық $x \in S$ нүктелеріндегі қабылдағыштар арқылы толқынның $x^0$ нүктесінен $x$ нүктесіне дейінгі $\tau(x, x^0)$ таралу уақыттары белгіленіп алынды. Міне, осы информация бойынша ауытқудың $D$ облысының ішіндегі $v(x), \quad x \in D$ таралу жылдамдығын табу керек.

Енді сейсмиканың кері кинематикалық есебінің математикалық мазмұнымен танысайық. Изотроптық ортада $\tau(x, x^0)$ функциясы дербес туындылы бірінші ретті эйконал

$$\left| \nabla_x \tau(x, x^0) \right| = \frac{1}{v(x)} \tag{5}$$

теңдеуін қанағаттандырады [111], мұндағы $\nabla_x$ - Гамильтон операторы. Есептің физикалық мазмұнынан мынадай

$$\tau(x^0, x^0) = 0 \tag{6}$$

шартқа келеміз. Сейсмиканың тура кинематикалық есебінде (6) шартты қанағаттандыратын (5) теңдеудің $\tau(x, x^0)$ шешуі ізделінеді. Ал кері есепте (5) теңдеудің шешуі болатын

$$\tau(x, x^0), \quad x \in S, \quad x^0 \in D \cup S$$

бойынша (5) теңдеудің оң жағындағы $v(x), \quad x \in D$ функциясын табу керек.

Алғаш рет кері кинематикалық есепті 1905-1907 жылдары Густав Герглотц (1881-1953) [131], Эмиль Вихерт (1861-1928) пен Карл Зофриц (1881-1908) [134] зерттеді. Олар Жердің сфералық симметриялық моделі бар деп болжап, (5) теңдеу үшін бір өлшемді кері кинематикалық есептің шешуін, атап айтсақ, монотонды өспелі $v(r)$ функциясын іздеді, мұндағы $r$ - белгілі бір $x$ нүктесінен Жердің центріне дейінгі ара қашықтық. Егер

$$\left(\frac{r}{v(r)}\right)'_r \succ 0$$

болса, онда $v(r)$ жылдамдығы $\tau(x, x^0)$ функциясы бойынша бір мәнді анықталатынын дәлелдеді, сонымен бірге $v(r)$ жылдамдығын есептеуге арналған формулалар табылды.

Жоғарыда аталған еңбектер Жер қыртысы мен мантиясының құрылымы туралы алғашқы өте маңызды нәтижелерді алуға мүмкіндік берді [13].

Сейсмиканың кері кинематикалық есебінің теориясын дамытуға М.М.Лаврентьев [89, 90], А.С.Алексеев [4], А.В.Белоносова, А.С.Алексеев [7], В.Г.Романов [110], М.А.Гервер, В.М.Маркушевич [23], Р.Г.Мухометов [99], В.Б.Гласко [24], Ю.Е.Аниконов [5] және тағы басқалар елеулі үлес қосты. Бұл еңбектерде көп өлшемді кері есептер шешулерінің жалғыздығы жөніндегі теоремалар дәлелденді және кері есептер мен интегралдық геометрия есептері арасында байланыс бар екендігі анықталды.

**Үшінші бағыт** – Ньютон потенциалы теориясының кері есебі. Бұл есептің физикалық мазмұны мынадай: $S$ бетімен шектелген облыстың сыртында беттің ішіндегі белгілі бір тығыздығы бар дененің (магниттік немесе тағы басқа) потенциалы берілген. Осы информация бойынша әлгі дененің формасын, тығыздығын және кеңістіктегі орнын анықтау керек. Гравитациялық өрістің потенциалы бойынша пайдалы қазбаны іздеу есебі осындай кері есепке әкеледі.

Ньютон потенциалы теориясының кері есебіне байланысты қойылатын бір математикалық есепті қарастырайық. Егер тығыздығы $\rho(x) \neq 0, \quad x \in R^3$ болатын денені $D$ деп белгілесек, онда осы дененің тудыратын $u(x)$ потенциалы Пуассон

$$\Delta u = -4\pi\rho(x)\mu(D)$$

теңдеуін қанағаттандырады [123], мұндағы $\mu(D)$ - дененің характеристикалық функциясы. Пуассон теңдеуінің $S$ бетінен тыс жердегі $u(x)$ шешуі бойынша $\rho(x), \quad \mu(D)$ функцияларын табу есебі – Ньютон потенциалы теориясының кері есебі болып табылады. Жалпы айтқанда, потенциал теориясының кері есептерінде эллипстік теңдеулердің (дербес жағдайда, Пуассон теңдеуінің) оң жақтары ізделінеді.

Ньютон потенциалы теориясының кері есебі шешуінің жалғыздығы туралы алғашқы теореманы 1938 жылы Петр Сергеевич Новиков (1901-1975) дәлелдеді [102].

Мұндай есептерді зерттеумен А.Н.Тихонов [117, 120], В.К.Иванов [62], М.М.Лаврентьев [80, 81], Л.Н.Сретенский [114], И.М.Рапопорт [107], А.И.Прилепко [105, 106], В.Н.Страхов [115] және тағы басқалар айналысып, көптеген маңызды нәтижелерге қол жеткізді. Бұл бағыттағы біраз кері есептердің шешулерінің жалғыздығы және орнықтылығы туралы теоремалар дәлелденді.

Қазіргі кезде жай дифференциалдық теңдеулер мен математикалық физика теңдеулері үшін қойылған кері есептер теориясы кеңінен даму үстінде.

Көп өлшемді кері есептер теориясындағы алғашқы нәтижені 1953 жылы Юрий Макарович Березанский (1925) алды [8, 9]. Ол Шредингер теңдеуінің коэффициентін бір мәнді анықтау туралы теореманы дәлелдеді.

Әрі қарай сызықтық дифференциалдық теңдеудің коэффициентін анықтауға байланысты көп өлшемді кері есептерді зерттеуге М.М. Лаврентьев [82], Г.И.Марчук [97], В.Г.Романов [108-111], А.С.Алексеев [4], А.В.Белоносова, А.С.Алексеев [7], Б.М.Будак, А.Д.Искендеров [14], А.Д.Искендеров [67-69], С.Е.Елубаев [39-61], А.С.Благовещенский [11, 12] және тағы басқалар ат салысып, маңызды нәтижелер алды.

Дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған кері есептер теориясының дамуы М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов, С.П.Шишатский [90], В.Г.Романов [108], Ю.Е.Аниконов [5], В.Я.Арсенин [6], М.И.Иманалиев [65], С.Е.Елубаев, О.Ш.Тұрсынбеков [51, 52], С.Е.Елубаев [53-57], М.В.Клибанов [72-74], В.Н.Страхов [115], С.Е.Темірболатов [116], С.Ж.Азаматов [2], Е.Ы.Бидайбеков [10], С.И.Кабанихин [71] және тағы басқалардың еңбектеріне байланысты болды.

Бұл еңбектерде кері есептер дәл және сызықтандырылған қойылымдарда қарастырылады, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер системасы коэффициенттерінің матрицалары ізделініп, кері есептердің шартты корректілігі көрсетілді.

Израиль Моисеевич Гельфанд (1913-2009) 1960 жылы енгізген терминологияға сәйкес, **интегралдық геометрия** есептері деп келесі типтегі есептерді айтамыз [19]: көпбейнелер жиыны бойынша алынған интегралдар арқылы интеграл астындағы функция ізделінеді ("интегралдық геометрия" термині басқа мағынада да түсініледі [112]). Интегралдық геометрияның классикалық есептері ретінде Иоганн Радон (1887-1956) [133] мен Рихард Курант (1888-1972) [78] есептерін атауға болады. И.Радон есебінде көпбейнелер жиыны ретінде гипержазықтықтар, ал Р.Курант есебінде – радиусы кез келген, центрі белгілі бір гипержазықтықта жататын сфералар жиыны қарастырылады.

И.Радон есебінің әр түрлі мәселелерімен Ф.Йон [70], И.М.Гельфанд, М.И.Граев, Н.Я.Виленкин [20], Ю.Г.Решетняк, В.И.Семянистый және тағы басқалар айналысты. Сфералар мен эллипсоидтар жиыны үшін интегралдық геометрия есептерін Р.Куранттан басқа Ф.Йон [70], Г.И.Плаксин [104], В.Г.Романов [108-111], С.В.Успенский, С.Б.Садыкова [126], М.В.Клибанов [72, 73] және тағы басқалар зерттеді.

Көптеген практикалық маңызы бар мәселелер интегралдық геометрия есептеріне келтіреді. Атап айтсақ, сейсмикалық толқындардың тарау уақыттары бойынша Жердің ішкі құрылымын анықтау есебі; сәуле түсіру арқылы тірі организмнің құрылысын анықтауға арналған томография есебі; белгілі бір объектімен байланысты оптикалық өрісті өлшеу арқылы әлгі объектінің оптикалық сипаттамаларын анықтауға арналған оптиканың дистанциялық есебі.

## 3°. Жалпыланған функция және жалпыланған шешу туралы ұғымдар

$R^n$ кеңістігінде анықталған барлық нақты $\varphi(x)$ функцияларының $D$ жиынын қарастырайық. Әрбір $\varphi(x)$ функциясы кез келген ретті үздіксіз туындысы бар және финитті функция болсын, яғни белгілі бір шектелген облыстың (әрбір $\varphi(x)$ функциясы үшін өз облысы қаралады) сыртында нөлге тең болады. Осындай функцияны негізгі функция, ал $D$ жиынын **негізгі кеңістік** деп атаймыз.

Негізгі функцияларды өзара қосуға және нақты (немесе комплекс) сандарға көбейтуге болады, бұлай алынған функциялар да негізгі функциялар болады. Бұдан $D$ жиынының сызықтық кеңістік болатынын көреміз.

Егер негізгі функциялардың $\{\varphi_k(x)\}, \quad k = 1, 2, 3, ...$ тізбегінің мүшелері белгілі бір шектелген облыстың сыртында нөлге айналса және тізбек кез келген ретті туындыларымен бірге нөлге бірқалыпты (жай мағынада) ұмтылса, онда негізгі функциялардың тізбегі $D$ кеңістігінде нөлге ұмтылады дейді.

Егер белгілі бір ереже бойынша негізгі $\varphi(x)$ функциясына $(f, \varphi)$ нақты саны сәйкес қойылып,

1°) кез келген $\alpha_1, \alpha_2$ нақты сандар және кез келген $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ негізгі функциялар үшін

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$$

теңдігі орындалса ($f$ функционалының сызықтық қасиеті),

2°) негізгі функциялардың

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k, ...$$

тізбегі $D$ жиынында нөлге ұмтылғанда сандардың

$$(f, \varphi_1), (f, \varphi_2), ..., (f, \varphi_k), ...$$

тізбегі нөлге ұмтылса ($f$ функционалының үздіксіздік қасиеті),

онда $D$ кеңістігінде сызықтық үздіксіз $f$ функционалы берілген дейді.

Мысалы, $R^n$ кеңістігінің әрбір шектелген облысында абсолютті интегралданатын бір $f(x)$ функциясы берілсін. Осы функцияның көмегімен әрбір негізгі $\varphi(x)$ функциясы үшін

$$(f,\varphi)=\int\limits_{R^n} f(x)\varphi(x)dx \tag{1}$$

нақты санын сәйкес қоюға болады. Мұндағы интеграл шектелген облыс бойынша алдынады, себебі осы облыстың сыртында $\varphi(x)$ функциясы негізгі функцияның анықтамасы бойынша нөлге тең. Осылай анықталған $f$ функционалы үшін 1) және 2) шарттардың орынды екенін көрсетуге болады.

Негізгі $D$ кеңістігінде анықталған әрбір сызықтық үздіксіз функционалды **жалпыланған функция** деп атайды. Жоғарыдағы (1) формуламен берілген жалпыланған функцияларды регулярлық, ал қалғандарын – сингулярлық функциялар деп атайды.

Әрбір функцияға оның $x=0$ мәнін сәйкес қоятын функционал сызықтық және үздіксіз болады. Бұл функционалды Дирактың дельта-функциясы деп атап, оны $\delta(x)$ арқылы белгілейді, яғни

$$(\delta(x),\varphi(x))=\varphi(0)\,. \tag{2}$$

“Жылжытылған” дельта-функция, яғни мынадай

$$(\delta(x-x_0),\varphi(x))=\varphi(x_0) \tag{3}$$

теңдікпен анықталатын функционалдар жиі кездеседі. Егер $[a,b]$ сегментінде үздіксіз $\psi(x)$ функциясын қарастырсақ, онда бұл функцияның негізгі қасиеті

$$\int\limits_a^b \psi(x)\delta(x-x_0)dx=\begin{cases}\psi(x_0), & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases} \tag{4}$$

мына формуламен беріледі.

Соңғы (4) теңдікпен берілген дельта-функцияның қасиетін кейде осы функцияның анықтамасы ретінде де береді. Бұл функция жалпыланған сингулярлық функцияның мысалы бола алады. Жалпыланған функцияларды өзара қосып немесе жалпыланған функцияларды санға және шексіз ретті дифференциалданатын функцияға көбейтіп жалпыланған функцияны аламыз.

Барлық жалпыланған функциялардың жиынын $D' = D'(R^n)$ деп белгілейік. Осы $D'$ жиыны сызықтық жиын құрайды.

Сызықтық $D'$ жиынында жалпыланған

$$f_1, f_2, \dots, f_k, \dots \tag{5}$$

функциялар тізбегі берілсін және кез келген $\varphi \in D$ үшін

$$(f_k, \varphi) \to (f, \varphi), \quad k \to \infty$$

болса, онда (5) тізбекті $D'$ жиынында жалпыланған $f$ функциясына әлсіз жинақталады дейді. Бұл жағдайда $D'$ жиынында

$$f_k \to f, \quad k \to \infty$$

деп жазамыз.

Әлгі енгізілген жинақтылық ұғымымен бірге қаралған $D'$ сызықтық жиынын жалпыланған функциялардың $D'$ кеңістігі деп атаймыз.

Функциялардың барлығы өздерінің анықталу облыстарында дифференциалдана бермейтіні белгілі. Бұған керісінше, барлық жалпыланған функциялардың кез келген ретті туындысы бар және олардың өздері де жалпыланған функциялар болады.

Функцияның туындысын анықтау үшін дифференциалданатын бір айнымалыдан тәуелді $f(x)$ функциясын қарайық. Бұл жағдайда

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \tag{6}$$

функционалды құруға болады. Енді (6) интегралды бөлшектеп интегралдағанда $\varphi(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісінің сыртында нөлге тең екенін ескерсек, онда мынадай

$$(f', \varphi) = (f, -\varphi') \tag{7}$$

теңдікке келеміз.

Егер $f$ - негізгі $D$ кеңістігінде анықталған сызықтық үздіксіз функционал болса, онда

$$(\mu, \varphi) = (f, -\varphi') \tag{8}$$

формула арқылы берілген $\mu$ функционалын $f$ функционалының туындысы дейміз де $f'$ немесе $\dfrac{df}{dx}$ деп белгілейміз.

Осылай алынған $\mu$ функционалы да негізгі $D$ кеңістігінде сызықтық үздіксіз функционал болады.

Мысалы, бізге мынадай функция

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x \prec 0 \end{cases} \tag{9}$$

берілсін. Бұл функцияны Оливер Хевисайд (1850-1925) есімімен атайды. Осыған сәйкес функционалды $g$ деп белгілейміз. Енді (9) функция үшін (6) формуладан мынаны

$$(g', \varphi) = (g, -\varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) \tag{10}$$

аламыз. Ал (10) теңдіктен (2) формула бойынша

$$g'(x) = \delta(x) \tag{11}$$

екенін көреміз. О.Хевисайд функциясының жалпыланған туындысы Дирактың дельта-функциясы болатынын (11) өрнектен байқауға болады.

Осыған ұқсас етіп көп айнымалыдан тәуелді жалпыланған функцияның жалпыланған туындысын анықтауға болады.

Жай дифференциалдық теңдеулер теориясы мен математикалық физиканың шеттік есептерін жалпыланған түрде қойып шығарғанда жалпыланған функциялар теориясы пайдаланылады [16, 22]. Бұлай қойылған есептердің шешулері жалпыланған шешулер болады.

Компоненттері теріс емес бүтін санды $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ векторын қарайық. $D^\alpha f(x)$ арқылы $f(x)$ функциясының $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ ретті туындысын белгілейік:

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^0 f(x) = f(x),$$

$$D = (D_1, \dots, D_n), \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Өзінің $D^\alpha f, \quad |\alpha| \le p, \quad 0 \le p \prec \infty$ туындыларымен бірге $G$ облысында үздіксіз болатын $f$ (нақты не комплекс) функциялар жиыны $C^p(G)$ функциялар класын құрайды. Кез келген $p$ үшін $C^p(G)$ класына жататын функциялар жиынын $C^\infty(G)$ деп белгілейміз.

Мына

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad f \in D' \tag{12}$$

теңдеу $m$ ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу болсын, мұндағы коэффициенттер $a_\alpha(x) \in C^\infty(G)$.

Кез келген жалпыланған $u \in D'$ функциясы $G$ облысында (12) теңдеуді жалпыланған мағынада қанағаттандырса, онда кез келген $\varphi \in D(G)$ үшін мына

$$(\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x) D^\alpha u, \varphi) = (f, \varphi)$$

теңдік орынды болады. Бұл жағдайда $u \in D'$ функциясын (12) теңдеудің $G$ облысындағы жалпыланған шешуі деп атаймыз.

Төменде қарастырылатын барлық кері есептердің шешулері жалпыланған шешулер болады. Сондықтан әрі қарай осы есептердің жалпыланған шешулерін “жалпыланған” терминінсіз қысқаша түрде шешулер деп атаймыз.

## §2. Функционалдық анализдің кейбір негізгі ұғымдары

### 1°. Кеңістіктер мен операторлар

Функционалдық анализ курсында [75] табиғаты әр түрлі жиындар қаралады. Мұндай жиынның элементі, дербес жағдайда, бір не бірнеше айнымалыдан тәуелді функция болуы мүмкін. Егер осындай жиын үшін элементтер тізбегінің жинақтылық ұғымын белгілі бір жолмен енгізсек, онда бұл жиынды **функционалдық кеңістік** деп атаймыз.

Жиынның элементтері үшін екі элементтің ара қашықтығы ұғымын енгізейік. Сосын осы ара қашықтықтың көмегімен шекке көшу ұғымын енгізіп, жиынды кеңістікке айналдырамыз.

Егер $R=\{x, y, ...\}$ жиынынан алынған реттелген $(x, y)$ жұптар жиыны үшін **метрика** (ара қашықтық) деп аталатын теріс емес нақты $\rho(x, y)$ функциясы анықталса және келесі шарттар орындалса:

1°. $\rho(x, y)=0$ болуы үшін $x=y$ теңдігі қажетті және жеткілікті;

2°. $\rho(x, y)=\rho(y, x), \quad x, y\in R$;

3°. $\rho(x, y)\le\rho(x, z)+\rho(z, y), \quad x, y, z\in R$,

онда $R$ жиынын **метрикалық кеңістік** деп атаймыз.

Мұндағы 1°-3° шарттар ара қашықтық аксиомалары деп аталады.

Метрикалық кеңістіктің элементтерін нүктелер деп атауға болады.

$R$ - метрикалық кеңістік болсын. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x, x_n) = 0$ болса, онда $\{x_n\}$ нүктелер тізбегі $x$ нүктесіне жинақталады дейміз. Бұл жағдайда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ деп жазамыз және $x$ нүктесін берілген тізбектің шегі деп атаймыз. Ал егер $\{x_n\}$ тізбегі $M \subset R$ жиынынан алынса және $x \in R$ болса, онда $M$ жиынының $\{x_n\}$ тізбегі $x \in R$ нүктесіне жинақталады дейді.

Егер кез келген $\varepsilon \succ 0$ саны үшін $n_\varepsilon$ табылып, барлық $n \geq n_\varepsilon$, $m \geq n_\varepsilon$ нөмірлері үшін $\rho(x_n, x_m) \prec \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $R$ метрикалық кеңістігінің $\{x_n\}$ нүктелер тізбегі фундаменталдық тізбек деп аталады.

Егер $M \subset R$ жиынының элементтерінен құралған кез келген жинақталатын тізбектердің шектік нүктелері $M$ жиынында жатса, онда $M$ жиынын тұйық жиын дейміз. Егер $M$ жиынының $R$ кеңістігіне дейінгі $R \backslash M$ толықтауыш жиыны **тұйық** жиын болса, онда $M$ жиынын **ашық** жиын деп атайды.

Егер $R$ метрикалық кеңістігіндегі $M$ жиыны элементтерінің кез келген шексіз тізбегі жинақталатын тізбекшені өзінде ұстаса, онда $R$ метрикалық кеңістігінің $M$ жиынын **жинақы** жиын деп атаймыз. Егер тізбекшелердің шектері $M$ жиынында жатса, онда бұл жиынды өзінде жинақы жиын дейді. Егер бұл шектер $M$ жиынында жатпай, $R$ кеңістігінде жатса, онда $M$ жиынын $R$ кеңістігінде жинақы жиын деп атаймыз.

Егер $R$ метрикалық кеңістіктен алынған кез келген фундаменталдық тізбек сол кеңістікте жинақты болса, онда бұл кеңістікті **толық**

**кеңістік** деп атайды.

Метрикалық кеңістіктің мысалдары:

1. Ара қашықтығы

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

болатын нақты сандар жиыны $R^1$ метрикалық кеңістігін құрайды.

2. Ара қашықтығы

$$\rho(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

болатын $n$ нақты саннан тұратын реттелген $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ векторлар жиыны $n$ - өлшемді арифметикалық евклидтік $R^n$ кеңістігі деп аталады. Бұл кеңістік метрикалық кеңістік болды.

3. Ара қашықтығы

$$\rho(x, y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$$

болатын $[a,b]$ кесіндісінде анықталған үздіксіз нақты функциялар жиыны метрикалық кеңістік болады. Оны $C[a,b]$ деп белгілейді.

4. Енді $[a,b]$ кесіндісінде үздіксіз $x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ туындылары бар кез келген $x(t)$ функцияларының жиынын қарастырайық. Осы жиынның элементтерінің ара қашықтығы

$$\rho(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \max_{a \le t \le b} \left| x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t) \right|$$

формуласымен берілсін. Енгізілген метриканы қанағаттандыратын $[a,b]$ сегментінде үздіксіз $n$ рет дифференциалданатын функциялар жиыны метрикалық $C^n[a,b]$ кеңістігін құрайды.

5. $R$ - $[a,b]$ сегментінде $p$ дәрежесімен интегралданатын барлық $x(t)$ функцияларының жиыны. Мұнда ара қашықтық

$$\rho(x, y) = \left[ \int_a^b |x(t) - y(t)| dt \right]^{\frac{1}{p}}$$

формуласымен енгізілген. Осылай анықталған метрикалық кеңістікті $L_p[a,b]$ деп белгілейміз.

Метрикалары әр түрлі тағы басқа көптеген метрикалық кеңістіктерді құруға болады. Жоғарыда қарастырылған кеңістіктерде метриканың 1º-3º аксиомаларының орындалуы әр түрлі оқулықтарда көрсетілген. Егер функционалдық кеңістіктің элементтері үшін қосу мен $\lambda$ (нақты не комплекс) санына көбейтуге қарағанда сызықтық (векторлық) аксиомалары қанағаттандырылса, онда функционалдық кеңістік **сызықтық кеңістік** деп аталады. Жоғарыда қарастырылған барлық метрикалық кеңістіктер сызықтық кеңістіктер болып табылады.

Егер сызықтық кеңістік сонымен бірге метрикалық кеңістік болса, онда ол кеңістікті **сызықтық метрикалық кеңістік** деп атаймыз.

Егер $R$ (нақты не комплекс) сызықтық кеңістіктің $x \in R$ нүктелерінің жиынында **норма** деп аталатын және $\|x\|$ деп белгіленетін нақты функция анықталса және сонымен қоса мынадай шарттарды қанағаттандырса:

1º. $\|x\| \geq 0, \quad x \in R$ және $x = 0$ болғанда ғана $\|x\| = 0$;

2º. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad x \in R, \quad \lambda$ - нақты сан;

3º. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in R$,

онда $R$ кеңістігін **нормаланған кеңістік** деп атайды.

Сызықтық нормаланған $R$ кеңістіктегі кез келген элементтер арасындағы ара қашықтық (метрика)

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \tag{1}$$

формуласымен енгізіледі. Енді (1) теңдікті пайдаланып, сызықтық нормаланған кеңістіктің элементінің нормасын

$$\|x\| = \rho(x, \theta)$$

формуласымен анықтауға болады, мұнда $\theta$ арқылы осы кеңістіктің нөлдік элементін белгілейміз. Метриканы осылай енгізгендіктен сызықтық нормаланған $R$ кеңістігі сызықтық метрикалық кеңістікке айналады. Бұл кеңістікте норма бойынша жинақтылық орын алған.

Егер $n \to \infty$ ұмтылғанда $\|x - x_n\| \to 0$ болса, онда $R$ сызықтық нормаланған кеңістіктің элементтерінен құрылған $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ тізбегі $x \in R$ нүктесіне жинақталады дейміз және оны символдық түрде $x_n \to x$ немесе $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ деп белгілейді.

Егер сызықтық нормаланған кеңістік осы кеңістіктің нормасы бойынша құрылған метрикаға қарағанда толық метрикалық кеңістік болса, онда бұл кеңістікті **толық сызықтық нормаланған кеңістік** деп атайды. Толық сызықтық нормаланған кеңістікті әдетте Банах кеңістігі деп атаймыз.

Енді оператор ұғымы мен оның кейбір қасиеттеріне тоқтап кетейік. $X$ пен $Y$ табиғаты кез келген жиындар делік. Әрі қарай $X$ жиынында $G$ ішкі жиынын қарайық $(G \subseteq X)$. Егер әрбір $x \in G$ элементіне $y \in Y$ элементі сәйкес қойылса, онда $y = Fx$ немесе $y = F(x)$ **операторы** берілген дейміз. Бұл жағдайда $G$ жиынын $F$ операторының анықталу облысы деп атаймыз, әрі $G(F)$ деп белгілейміз. Сол сияқты $E = E(F) = \{y \in Y : y = F(x), x \in G\}$ жиынын $F$ операторының мәндер облысы дейміз. $F$ операторының амалын схема түрінде $F : X \to Y$ деп жазуға болады. “Оператор” терминінің орнына “функция”, “бей-