Н. Р. ЖОТАБАЕВ

РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ АБСТРАКЦИИ В ПОЗНАНИИ ОБЪЕКТИВНОГО МИРА

АКАДЕМИЯ ТРУДА И СОЦИАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ
г.Москвы

Алматинский филиал

Н. Р. ЖОТАБАЕВ

РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ АБСТРАКЦИИ В ПОЗНАНИИ ОБЪЕКТИВНОГО МИРА

Алматы
2005

ББК 22.12
Ж 81

Ж 81 **Жотабаев Н.Р.**
Роль математической абстракции в познании объективного мира. Алматы: «Мария», 2005 – 58 с.

ISBN 9965-9636-5-7

ББК 22.12

Ж $\frac{1602010000}{00(05)-05}$

ISBN 9965-9636-5-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основные положения данной работы были написаны мною ещё в начале 70-х годов прошлого столетия. Однако по ряду причин она не была опубликована. Впоследствии работа претерпела некоторые изменения.

Известно, что за последние десятилетия многое изменилось и в том числе в научной мысли. Но тема абстракции, имеющая более двух тысячелетнюю историю, остается ещё актуальной. Ведь любая наука и её результаты требуют закрепления и сохранения, а также дальнейшего развития.

В этой работе раскрывается значение абстракции и, математической в частности, в познании объективной действительности. Научное познание реальности с их бесконечными многообразиями, трудно представить без процесса абстрагирования.

Именно в результатах абстракции выражается наше понимание действительного мира. А понимание реалии через абстракцию — это не копия действительности, а ее субъективный образ, построенный в соответствии с намеченными условиями и средствами познания.

В целом, в абстракции сочетаются теоретические и практические способы действий. Абстракции раскрывают законы природы и общества, выполняют закономерности, относящихся к пространственным формам и количественным отношениям реального мира, и самое главное — отображает сущность вещей и явлений. Развиваясь на более высоких ступенях, они углубляют наши знания о тех или иных научных законах, дают возможность понять глубинные процессы реальной материи.

Синтез философии и математики можно наблюдать на всем этапе развития научной мысли, начиная с древних времен. Многие математические направления имеют определенный философский смысл.

В этом плане в брошюре показаны различные концепции понимания математической абстракции и ее роли в познании действительности.

Думается, что данная работа будет полезной всем тем, кто интересуется проблемами абстракции в теории познания.

Автор

I. ПРОЦЕСС АБСТРАГИРОВАНИЯ В ПОЗНАНИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ

Разум дан человеку для того, чтобы глубже проникнуть в природу вещей и предметов, в смысл тех или иных явлений (событий), скрытых от чувственного восприятия. Ведь чувственные формы познания действительности очень ограничены в силу своих физиологических возможностей. Исследуемый объект может быть зафиксирован при его воздействии на органы чувств, а если нет этой связи, то, естественно, не будет никаких ощущений и восприятий. Надо при этом учесть и то обстоятельство, что не все свойства вещей либо явлений воспринимаются органами чувств человека. У него имеются приборы, оборудования и другие технические инструменталии, через которые человек изучает те или иные стороны вещей либо предметов. Здесь-то и выступает в свои права человеческое мышление, созданное природой и развитый самим индивидуумом и общественными отношениями.

Для познания действительности человек создает мыслительные логические конструкции, которые не имеют эмпирических прообразов в реальном мире, так сказать некую модель.

Известно, что в объективном мире все предметы находятся во взаимной связи, в различных отношениях. Для того, чтобы изучить отдельные явления либо отдельные свойства, интересующих нас объектов, прежде всего следует выделить или отбросить определенные свойства, отношения. Мысленно исключая те или иные свойства и отношения вещей, предметов, мы отделяем те свойства, о которых уже рассуждаем, как об особых, самостоятельных объектах.

В процессе познания с помощью такого абстрагирования вырабатываются новые системы логических конструкций в виде суждений, умозаключений и понятий.

Происходит глубокое отражение материальной действительности при помощи мышления, переход от конкретного к абстрактному, обогащения нашего познания.

Первым, кто стал рассматривать абстракцию как научный метод анализа явлений, был **Аристотель**. Он считал, что с помощью абстракции можно вести плодотворное исследование, а мысленное разделение целого, свойственное абстракции , хотя и создает феномен нереальности результата, объективно все же оправдано многообразием свойств целого и относительной их независимостью друг от друга.

Абстракция, по нему, не является произволом человеческого мышления. Аристотель допускал, что об абстракции можно говорить как о **сущем**. Иначе и научное познание, которое всегда есть познание общего и абстрактного, лишилось бы смысла.

Ученик Аристотеля философ **Евдем** определил путь познания как переход от чувственного восприятия к мысленному содержанию и от последнего – к разумному знанию.

Дело науки, говорил **А.И.Герцен**, возведение сущего в мысль. Только мысль переводит отражение факта из формы представления в форму понятия или теории. А эти формы являются сутью абстракции.

Абстракция нужна, прежде всего, как источник априорной информации о ее возможных моделях с тем, чтобы опередить опыт. Следовательно, в абстракции должны содержаться информация, которую нельзя извлечь из той части опыта, что служит для индуктивных шагов порождения абстракции или материальной её проверки. Анализ реальных вещей дополняется размышлением, логикой, интуицией и умозрением. В результате абстракция возникает не только как результат отвлечения от данных опыта, но и как результат их восполнения. Следует сказать, что восполнение нередко определяют как особый тип мыслительного акта – как идеализацию. Выделяя некоторый абстрактный объект, исследователь идеализирует реальность. При этом он знает из чего отвлекается, а что оставляет в стороне. Оставляя в стороне действия сил на движущееся тело, ученый приходит к идеальному понятию о равномерном и прямолинейном движении. Мы идеализируем, говорил **Мах**, ибо движения без действия сил в реальности не бывает.

Тем не менее иные философские школы умаляли абстракцию как форму и метод познания природы. Только к середине XIX века признание гносеологической значимости абстракции выходит за пределы её понимания как "отвлеченной мысли", распространяясь на методы объяснения явлений природы и общественной жизни.

К.Маркс считал, что объективная диалектика развития осознается через развитие субъективной диалектики понятий, и поэтому принцип абстракции играет в ней ведущую роль.

Позднее, в начале XX века, **В.И.Ленин** напишет, что "мышление, восходя от конкретного к абстрактному, не отходит – если оно правильное ... – от истины, а подходит к ней. Абстракция материи, закона природы, абстракция стоимости и т.д., одним словом все научные (правильные, серьезные, невздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, полнее. От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике – таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности" (1).

Использования модели либо абстракции в познании действительности способствуют развитию аналитического мышления, дают большую возможность исследователю осмыслению интегрировать свои знания, правильно ориентироваться в реальной жизни. Они помогают исследователю для конструирования абстракций в виде теоретических концепций с последующим использованием на практике для изучения сущности того или иного объекта либо явления (события). Например, в социологии главным предметом анализа является деятельность людей.

В процессе познания исследователь вступает в общение с теми, чьё поведение он изучает. Здесь основным методом социологического познания выступает понимание.

По **М.Веберу** необходимо, наблюдая цепочку реальных действий людей, сконструировать их объяснение на основе понимания внутренних мотивов этих действий, исключая субъективные суждения индивидуумов. Происходит процесс абстрагирования.

Естественно, одним из сложных моментов абстрагирования является осмысления его сути. Это означает, что нужно каким-то образом выразить её содержание через содержание абстракции более низкого порядка, т.е. представить первую как обобщение второй с сохранением ее исходной позиции. Когда речь идет об абстракции некоторой теории, такого рода прием нередко непосредственно приводит к более общей теории. Например, что основные понятия элементарной (Евклидовой) геометрии (точки, прямые, плоскости) и сама эта геометрия возникли как абстракции от наблюдений за поведением физических тел. Стало быть, это абстракции не очень высокого порядка. В свою очередь, проективная геометрия возникает как обобщение элементарной и как абстракция от ее абстракций. Следовательно, понятиям проективной геометрии следует приписать более высокий порядок абстрактности, чем понятиям элементарной геометрии. И одной из таких более высоких абстракций является понятие о бесконечно удаленной точке. Осмыслить эту абстракцию через абстракцию обыкновенной метрической точки — значит, в соответствии с допущенном выше, перенести все проективные свойства обыкновенной точки на точку бесконечно удаленную.

Так поступают в геометрии, руководствуясь принципом постоянства формальных законов, согласно которому законы операций, определенные для элементов некоторой исходной области (в данном случае для точек евклидовой плоскости), при последующих ее обобщениях (в данном случае за счет бесконечно удаленных точек проективной плоскости) должны сохраняться и для новых элементов. Этим устанавливается связь прежних и новых понятий, смысловое отношение абстракций разных порядков. Развитие познания предстает как дискретный процесс, на каждом новом этапе раскрывающий новую "сущность".

Любое явление, когда его изучают, считают как функцию, постоянную в фиксированном временном интервале, т.е. мыслят и судят о постоянстве этой функции не вообще, а только в некотором временном интервале, для каждого явления своём, в котором это явление "для нас" или относительно условий, существенных для суждения о нем, не претерпевает никаких изменений.

Это очень важно в процессе изучения любого явления методом абстрагирования.

Таким образом, используя процесс абстрагирования, анализируя соответствующие связи и отношения, в которые вступают исследуемые предметы, человек познает такие их свойства, которые не только не могут быть восприняты непосредственно, но и даже современными техническими средствами.

Абстракция мыслительного процесса позволяют отделять общее от единичного, существенное от несущественного в объектах и явлениях, сформировать в них научные понятия, вскрыть связи между ними, общие закономерности.

II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АБСТРАКЦИИ И ИХ ЗНАЧЕНИЕ В ПОЗНАНИИ ОБЪЕКТИВНОГО МИРА

1. Понятие о математической абстракции

Одним из видов абстракции или чистой логической модели являются математические абстракции. Нет ни одной науки, которая столь широко оперировала бы научными абстракциями, как математика.

Математические абстракции отражают свойства объективного мира, но своими специфическими методами. Они изучают количественные отношения и пространственные формы материи. В этом и заключается отличительная черта математической абстракции.

Ещё в XIX веке **Ф.Энгельс** писал: "...чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал.

Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное; таким путём мы получаем **точки,** лишенные измерений, **линии**, лишенные толщины и ширины, разные **а** и **в**, **х** и **у**, постоянные и переменные величины... Но, как и во всех других областях мышления, законы, абстрагированные от реального мира, на известной ступени развития отрываются от реального мира, противопоставляют ему как нечто самостоятельное, как явившееся извне законы, с которыми, мир должен сообразоваться...." (2).

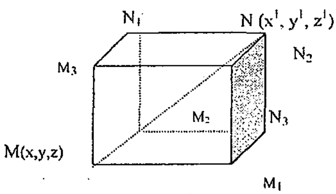
Самые простые понятия в математике такие, как число, точка, прямая линия, треугольник и т.д. — представляют собой глубокие абстракции.

Изучая свойства чисел и правила действий над ними, обычно не принимаем в расчёт конкретные величины, а формируем полученные результаты независимо от того, что этими числами выражено.

Всякая линия, начерченная тушью или карандашом, имеет ширину и длину. Стержни, рельсы — это прообразы прямой линии.

Отвлекаясь от всех других свойств этих предметов, оставляют только свойства, связанные с протяжённостью, которые затем обобщаются и в результате абстракции даёт нам понятие прямой линии.

Рассмотрим математическое понятие “расстояние”. Как найти расстояние между двумя точками M и N в трёхмерном пространстве?



Обозначим q /M, N/ - длину отрезка MN, которое означает, что расстояние между точками является числовой функцией от пары точек.

Каждая точка имеет свои координаты: $M(x, y, z)$ и $N(x^1, y^1, z^1)$. Отсюда q есть функция шести переменных: $q(M, N) = F(x, y, z, x^1, y^1, z^1)$.

Известно, что квадрат диагонали параллелепипеда равен сумме квадратов трех его сторон.

Следовательно, $MN^2 = MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 = (x - x^1)^2 + (y - y^1)^2 + (z - z^1)^2$

Отсюда $q(M,N) = \sqrt{(x - x^1)^2 + (y - y^1)^2 + (z - z^1)^2}$

Более обобщённое в пространственно-временном мире (в теории относительности) расстояние между двумя точками определяется по формуле:

$$q(\zeta,\eta)=\sqrt{c^2(t-t_1)^2-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2-(z-z_1)^2}$$

где, ξ,η - векторы в п-мерном пространстве, С – скорость света, t – момент времени.

Нахождение расстояния между двумя точками в пространстве решено сугубо абстрактным мышлением.

В этом мыслительном процессе, упущены все свойства материального предмета, кроме необходимых для математики.

Происходит выделение существенных свойств в чистом виде. Без такой идеализации немыслимо было бы найти общее выражение расстояний между точками (телами) в объективном пространстве.

Математические понятия отражают свойства материальных предметов и законы диалектической материи.

На первый взгляд такая характеристика математических абстракций кажется весьма странной.

И действительно, что может быть материального в математических символах и операциях? В этом и заключается весь смысл философского вопроса математики, т.е. каково отношение математических понятий, формул и законов к реальному миру.

Особенностью математики является то, что она оперирует с отвлечёнными предметами или явлениями, которые находятся на различных уровнях абстракции. В большинстве случаев они связаны с действительным миром через ряд опосредствований.

Мышление позволяет человеку оперировать с умственными моделями предметов – различными понятиями, как с действительными объектами.

С развитием теоретического познания происходит процесс образования всё более и более глубоких абстракций, с осмысливанием связей между ними, с разработкой методов оперирования ими.

Математические абстракции отражают действительные отношения предметов лишь приблизительно.

Они огрубляют, схематизируют действительность, вместе с тем, дают полное и глубокое знание предметов, обогащают его.

В.И.Ленин писал, что «мы не можем представить, выразить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, угрубив, не разделив, не омертвив живого. Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление, - и не только мыслью, но и ощущением, не только движения, но и всякого понятия. И в этом суть диалектики. Эту-то суть и выражает формула: единство, тождество противоположностей» (3)

Каждая математическая абстракция представляет собой ступень в познании материальной действительности, её количественных сторон и пространственных форм.

В целом абстракции, в частности математические, отражают движение познания от явления к сущности, от сущности первого порядка к сущности второго порядка и т.д., до бесконечности.

2. Виды математических абстракций

Как и любые другие абстракции, математические абстракции прошли длительное историческое развитие.

Рассмотрим гносеологическое содержание основных видов абстрагирования в математике.

Математика изучает окружающий мир, с помощью таких процессов абстрагирования как **отождествления, потенциальной осуществимости, актуальной бесконечности.**

В повседневной практике мы часто оперируем словами: «число», «точка», «прямая», «плоскость» и т.д. Эти термины так прочно вошли в человеческую жизнь, что многие из нас не обращают внимания, и эти понятия считаются как бы просто-напросто данными. Но если присмотреться и задать себе вопрос: «Что они собой представляют?», «имеются ли прообразы этих понятий в реальной действительности?», то ответы вызывают очень серьёзные затруднения.

Возьмём число 3. Оно представляет совокупность каких-то трёх предметов (три машины, три стола, три книги и т.п.). Машины, книги, столы и т.п., то есть множество разных предметов имеют общее свойство, в данном случае оно выражено числом 3.

Здесь мы отвлекаемся от качественной природы предметов, сравниваем эти множества, устанавливаем взаимнооднозначное соответствие между их элементами (например, одной машине соответствует одна книга, или один стол и т.д.)

Такое сопоставление предметов, выделение общего, что они имеют, образуют количественную сторону этих множеств.

Образованное путём сравнения, отождествления, понятие выражает количественные отношения объектов, вне их предметной конкретности.

Отождествляя вещи или явления, заведомо отвлекаемся от их различий, независимо от того, делаем ли это по своей воле либо в силу каких-то объективных причин.

Рассматриваемый процесс абстракции, основанной на объединении, отождествлении предметов, в отвлечении от всех различий данных объектов, называется абстракцией отождествления.

Таким образом, абстракция отождествления – это такая абстракция, когда с её помощью из каких-либо объектов одного рода посредством отвлечения от их несущественных различий порождается объект, единственный в своем роде – абстрактный объект.

Абстрагируя признак, общий многим, исследователь делает первые шаги к цели, тем самым создавая логическую возможность для «уравнивания» многих объектов, одинаковых по данному признаку. Затем эту возможность переводит в действительность, вводя одинаковость в систему использу́емых понятий.

Абстракция отождествления широко применяется в образовании математических абстрактных понятий. Примером может служить образование понятия натурального числа и понятия геометрической фигуры.

Эти математические понятия были осуществлены в процессе перехода конкретно-чувственных представлений свойств материального мира к абстрактно-мысленному их отображению.

Как было сказано выше, число 3 и вся числовая последовательность была образована постепенным отвлечением от предметной формы и превращением их в количественное определение.

Различая разные пространственные формы предметов, сравнивая их друг с другом, в процессе практической деятельности, человек осуществлял мысленное отвлечение от других свойств предметов, кроме пространственной формы, и обобщал однородные формы различных вещей. Так были образованы геометрические понятия.

В элементарной геометрии, например, объём параллелепипеда всегда равен произведению площади основания на высоту, независимо от конкретной природы этого параллелепипеда (спичечная коробка, кирпичный дом, кристалл соли и т.д.).

Математические абстракции позволяют рассматривать действительность в «чистом виде», без конкретности. Никакой треугольник не может иметь идеально-прямой угол, прямолинейные стороны. В природе невозможно установить такой построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, площадь которого равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

Математические абстракции в материальной действительности не существуют. Но они дают нам возможность познать действительные свойства и отношения вещей, предметов и помогают решать конкретные задачи практической жизни.

Абстракция отождествления применима не только при создании основных математических понятий, но и при образовании новых, более абстрактных понятий (например, понятия n-мерного пространства, комплексного числа и т.п.).

Создавая всё новые абстрактные понятия, отвлекаясь всё дальше от реальной действительности, мы имеем большие возможности более глубоко изучать количественные отношения и пространственные формы реальной материи.

* * *

В математике широкое распространение получила абстракция потенциальной осуществимости.

Суть этого вида абстрагирования состоит в отвлечении наших действительных возможностей, связанных ограниченностью человеческой жизни.

Абстракция потенциальной осуществимости предполагают осуществлять любое конечное число операций, находить последующие элементы рассматриваемого множества.

Задачи, которые заранее знаем, что они неосуществимы, считаем при помощи абстракций потенциальной осуществимости возможной.

К примеру, всегда можно найти число, равное $2^{10^{10}}$, путём последовательного увеличения числа элементов множества на единицу или представляя их рядом палочек, следующих друг за другом. Решая эту задачу, мы отвлекаемся от практической неосуществимости, от нашей действительной возможности, которая ограничена в силу своей природы в пространстве и во времени.

Абстракция потенциальной осуществимости используется для образования математических понятий.

Она позволяет нам рассуждать, например, о сколь угодно больших числах, как о числах, которые мы можем выразить, посчитать.

Любой член числового ряда с положительными членами мы можем получить путём последующего увеличения на соответствующую единицу.

В теории пределов бесконечно малой величиной называют такую переменную, когда для любого заданного постоянного $\varepsilon>0$ в ходе развития найдется момент, начиная с которого всегда будет $|\varphi|<\varepsilon$, т.е. величина в данном процессе безгранично приближается к нулю. Надо сказать, что в действительности ни одна реальная величина не может безгранично приближаться к нулю. С истечением времени, например, реальный маятник остановится, газ не может безгранично расширяться.

В Евклидовой геометрии всегда можно провести через любые две точки прямую, причём, единственную, описать окружность из всякого центра с любым радиусом. На практике очень трудно, да и в некоторых случаях просто невозможно соединять прямой две точки за земной поверхности. Как начертить окружность радиусом в одну астрономическую единицу (150 млн.км) или в один атом?

Абстракция потенциальной осуществимости считает эти задачи осуществимыми. На основе этой абстракции было расширено понятие числа. Дробные, отрицательные, иррациональные, мнимые числа принимались как решённые задачи.

Возможна ли существования числа $\sqrt{2}$? В реальности его нет. Это иррациональное число было создано логическим путём, при установлении несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной.

При решении сложных задач, доказательстве математических теорем, считаем их разрешимыми; допускаем мысленную идеализацию. Происходит огрубление действительности, т.к. мы отвлекаемся от реальных границ возможного.

Таким образом, абстракция потенциальной осуществимости углубляет ещё на одну ступень наши знания в изучении сущности пределов объективного мира.

* * *

Одним из сильных видов абстрагирования является абстракция актуальной бесконечности, сущность которой состоит в отвлечении от незавершимости процесса образования бесконечного множества, от невозможности задать такое множество посредством полного перечисления его элементов. Эта абстракция предполагает в бесконечном множестве выделения каждого его элемента, она рассматривает всякое множество (множество натуральных чисел, множество действительных чисел и т.д.) как существующее в виде завершённой совокупности.

Например, любой отрезок является совокупностью бесконечного числа, каждую из которых можно зафиксировать, обозначив её каким-то действительным числом.

$$A \frac{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ \dots\ x_n\ x_{n+1}\ \dots}{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \dots\ a_n\ a_{n+1}\ \dots} B$$

Отрезок $AB)$ $(x_1, x_2, x_3 \ \dots\dots x_n, x_{n+1}, \dots\dots)$

Точкам отрезка (АВ) соответствуют действительные числа, обозначенные буквенными выражениями.

x_1 — a_1	x_4 — a_4
x_2 — a_2	. . . .
	x_n — a_n
x_3 — a_3	x_{n+1} — a_{n+1}
. . . . . .	и т.д.

Геометрические фигуры, такие как окружность, эллипс, парабола, гипербола являются геометрическими местами множества точек.

Однако, известно, что практически зафиксировать и описать элементы бесконечного множества совершенно невозможно.

Абстракция актуальной бесконечности представляет нам возможность «остановить» движение и выделить каждый элемент данной бесконечной совокупности, которая выступает в данный момент завершённой, уже законченной.

Актуальная бесконечность применяется при изучении непрерывности, функциональной зависимости, теории множества и т.п. Возьмём функцию $y = \varphi(x) = x^2$. В действительности, обозначающая конкретное движение, изменяющиеся в зависимости от аргумента x.

Данная функция графически может быть изображена кривой линией, состоящей из точек, и представлена в виде множества пар чисел (x, y), характеризующих координаты этих точек. Каждую точку этой кривой линии мы можем индивидуализировать, указав её координаты.

В этом примере допускаем расчленение движения, предполагаем определить каждое составляющее, а затем — всё движение в целом.

Как видно, в процессе познания осуществляется формализация действительности, переход от одной ступени абстрагирования к другой, позволяющей глубже отобразить реальный мир.

Рассмотренные виды абстрагирования в математике не могут существовать особо отдельно, они вливаются в единый мыслительный процесс, взаимно дополняя друг друга.

Процесс абстрагирования приводит к образованию всё новых математических понятий, обобщению имеющихся теорий. Абстрагирование в математике тесно связано с действительностью, и поэтому математические понятия, полученные путём абстрагирования, являются образами мышления определённых отношений материального мира.

Вышеизложенные процессы образования математических абстракций подтверждают диалектическое развитие познания, расширяют человеческое знание о предметах и явлениях объективной действительности.

3. Внутренние закономерности математических абстракций

Рассмотрим внутренние закономерности математических абстракций и как в них проявляется диалектика.

В.И.ЛЕНИН говорил, что в любом суждении можно и нужно найти, словно в клетке, зачатки всех элементов диалектики, Это утверждение вполне соответствует и математическим понятиям.

Возьмём, например, простое уравнение: $x - 2 = 0$. В этом уравнении x обозначает любое число в множестве действительных чисел, 2 обозначает определённое число.

Как видно из уравнения, произведено отождествление ($x \equiv 2$) противоположности – общее (x) и отдельное (2). Произвольное число x возможно только при условии существования единичных чисел (1; 2; 6; $\frac{4}{3}$; 7; 8 и т.д.).

Эти единичные числа содержатся в абстрактном числе x. Число 2 имеет смысл только в том случае, если существуют другие числа, т.е. оно не могло существовать, если не было бы других чисел (необходимость существования числа 2).

Таким образом, в этом примере уже имеются зачатки понятия необходимости, объективной взаимосвязи и взаимообусловленности природы.

Известно, что абстракция по своему содержанию есть отражение действительности, имеет прообразы в действительном мире.

Так, например, любая геометрическая фигура, есть абстракция. Но она является отражением действительности в мыслительном процессе и служит для её познания.

В объективном мире чистые математические абстракции не существуют, ибо нет в действительности предметов, которые бы не имели ни длины, ни ширины, ни частей, ни углов в точности равными 90° и т.д.

Отсюда вытекает вывод, что любая абстракция есть единство действительного и недействительного, единство противоположностей.

Всякий реальный объект есть единство единичного и общего. В.И.ЛЕНИН в «философских тетрадях» пишет, что «отдельное не существует иначе как в той связи, которая ведёт в общему. Общее существует лишь в отдельном, через отдельное. Всякое отдельное есть (так или иначе) общее».

Следовательно, понятия предметов, полученные в результате мыслительного процесса, представляет собой не только простое отражение предметов действительного мира, но и является отражением как общего, существенного, так и единичного в предмете.

Абстрактное понятие отражает общее в предметах, общее свойство для некоторых множеств предметов. Вместе с тем, отражая общее, существенное в предметах (три машины, три книги, три дома — число 3), понятия заключает в себе понимание каждого единичного предмета. А это свидетельствует о том, что абстрактное понятие есть единство противоположностей, единство общего и единичного.

Значит абстрактное понятие, выражая общее в предмете, даёт возможность для понимания единичного, т.е. в ходе развития познания абстрактное понятие становится конкретным.

«Значение общего, - писал В.И.ЛЕНИН, - противоречивое: оно мертво, оно нечисто, неполно etc, etc, но оно только и есть ступень к познанию конкретного, ибо мы никогда не познаём конкретного полностью. Бесконечная сумма общих понятий, законов даёт конкретное в его полноте» (4).

Таким образом, общее является ступенью к познанию единичного, т.е. познания реального предмета.

Единичное, разумеется, никогда нельзя познать полностью. Однако сумма общих понятий и законов может дать единичное в его полноте.

Научное понятие, являясь формами познания, выражает внутреннюю сущность предметов, причём противоречивую сущность. В виду высокой абстракции в математике противоречивость предметов не выступает в явной форме, но она является определяющей внутреннее содержание математических понятий.

Понятие «число», как известно, является основным понятием всей математики. В историческом развитии первым выступает понятие натурального числа (целое и положительное).

Расширение и обогащение натуральных чисел привело к возникновению дробных и отрицательных чисел.

Последовало некоторое несоответствие законов при выполнении отдельных операций с новыми числами, чем с натуральными.

Для натуральных чисел, к примеру, действительно, что произведение (а х в) не может быть меньше любого из сомножителей а и в, то при умножении дробных чисел это невыполнимо:

1) 7 х 8 = 56 > 8; 56 >7.

2) $\frac{1}{7} x \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$; *то* $\frac{1}{56} < \frac{1}{7}; \frac{1}{56} < \frac{1}{8}$.

Затем было выработано понятие иррационального числа. Дальнейшее расширение понятия числа связано с введением комплексных чисел, представляющих определённое единство, действительных и мнимых чисел а + вi. При решении некоторых квадратных уравнений появились в качестве корней выражения, включающие в себя корни из отрицательного числа. Так, уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ имеет следующие корни:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2};$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Эти корни во множестве действительных чисел оказались совершенно неразрешимыми. Для устранения такого усложнения, и было введено понятие о мнимом числе. Общее во множестве чисел есть комплексные числа, в них содержатся как единичные, так и все числовые подмножества.

Любое уравнение П степени с вещественными или произвольными комплексными коэффициентами обязательно имеет комплексный корень.

Комплексные числа явились логическим обобщением понятия числа, следствием диалектического развития математики. Каждое расширение понятия числа, таким образом, раскрывает противоречивое содержание общего понятия числа.

Рассмотрим с диалектических позиций понятия математической бесконечности. По своей внутренней сущности эта абстракция глубоко противоречива, она представляет единство конечного и бесконечного, актуальной и потенциальной бесконечности.

Любое число, будь натуральное или отрицательное, выражающее конечную величину, представляет собой отдельный элемент бесконечного множества чисел.

Каждый ограниченный отрезок прямой есть часть бесконечной прямой линии, каждая геометрическая фигура на плоскости есть конечная часть бесконечной плоскости.

Единство конечного и бесконечного проявляется ещё в том, что конечное может содержать в себе бесконечность, то есть возможность выполнения положения диалектического материализма о бесконечности материи вглубь. В математике любое абстрактное выражение, даже элементарное понятие вроде числа, арифметических действий, отрезка содержит в себе неисчислимое многообразие связей, свойств, отношений и т.д.

Математическая формула, например, $\sin(\alpha+\beta)= =\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$ тоже содержит в себе бесконечность.

Под аргументами α и β подразумевается бесконечное множество различных значений.