ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
ҚОРҚЫТ АТА АТЫНДАҒЫ ҚЫЗЫЛОРДА МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ
Педагогикалық факультет
Физика және математика кафедрасы

Тұрбаев Боранбай Есмаханбаевич
Физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент

Алгебра және анализ бастамалары пәні бойынша есептер шешудің тиімді жолдары

(электрондық оқу-әдістемелік құрал)
6М010900-Математика, 6В010900-Математика мамандықтарына арналған

Қызылорда, 2018жыл

Пікір берушілер: Меңліқожаева С.Қ. п.ғ.к, доцент
Қайыңбаева Л.С. п.ғ.к

МАЗМҰНЫ

Кіріспе

Елбасымыз Н.Ә.Назарбаевтың «Қазақстан-2050» Қазақстан халқына жолдауында білім беру саласындағы басымдықтардың ішінде: «...Ескірген немесе сұраныс жоқ ғылыми және білім пәндерінен арылу, сонымен бірге сұраныс көп және болашағы бар бағыттарды күшейту қажет. Орта және жоғары білім берудің оқу жоспарларының бағыттылығы мен басымдықтарын оларға тәжірибелік машықтарға үйрету бойынша және тәжірибелік біліктілікке ие болу бағдарламаларын қосып, өзгерту...»[1] деп атап көрсеткен болатын.

Білім – үдемелі индустриальді жаңа технологияға бағытталған мемлекетіміздің дамуы мен бәсекелестік мүмкіндігінің анықтауыш көрсеткіші болып табылады.

Сондықтан еліміздің жаңа даму бағытында білім беру жүйесінің алдында:

1. Білім беру мекемелерін оңтайландыру;
2. Оқу-тәрбие үдерісін түбегейлі жаңғырту;
3. Білім беру қызметтерінің тиімділігін арттыру сияқты үш басты бағыт айқын қойылды. Соның ішінде жалпы білім беретін мектептердің алдында тұрған шұғыл міндет – оқуды өмірге, жаңа технологияға жақындату. Осыған байланысты мектептегі іргелі жаратылыстану-математика бағытындағы пәндерді оқытудағы әдістемелік мәселелердің мәні ерекше артады.

Қазақстан Республикасының «Білім туралы» заңында (2007ж.) білім беру жүйесінің жеке адамды қалыптастыруға, дамытуға және кәсіби шыңдауға бағытталған рөлі атап көрсетілсе, осы заңның 41-бабында: «Педагог қызметкерлер оқушылардың мемлекеттік білім беру стандартында көзделген деңгейден төмен емес білім, білік, дағды алуын қамтамасыз етуге, жеке шығармашылық қабілеттерінің көрінін дамуы үшін жағдай жасауға міндетті» делінген.

Сондықтан орта мектептің алдында тұрған негізгі міндеттердің бірі – оқушылардың шығармашылық қабілетін барынша ашып, қоғамды құрып дамытуға бар мүмкіндігін жұмсайтын қабілетті жеке тұлғаны қалыптастыру. Әрбір оқушының тұлға ретінде қалыптасып дамуына математикалық білімнің үлкен үлесі бар.

Себебі, *біріншіден*, математика басқа ғылымдар саласының дамуының тірегі, қызметшісі, *екіншіден*, математика қоршаған ортаны білудің басты көзі, *үшіншіден*, математика дедуктивтік құрылған ғылым болғандықтан, оқушының заңға сүйеніп, ой қорытындылауын, заңды сыйлау психологиясын қалыптастырады, *төртіншіден*, математика адамның рухани дамуына, ғылыми көзқарастарының қалыптасуына, логикалық ойлау қабілетінің дамуына көмектеседі.

Мектеп математикасын өмірмен байланыстыру, бұл пәнді адамдардың практикалық және техникалық іс-әрекетіне қолдану үшін мектеп математикасы мен математика ғылымын жаңа технологияларға үйлесімді және барынша түсінікті түрде оқыту қажет.

Бұл мәселені шешу мүмкіншілігі – алгебра және анализ бастамаларын орта мектеп математика курсында бүгінгі күн талабына сай оқытуды ұйымдастыру. Алгебра және анализ бастамаларының негізгі күрделі тарауларын мектеп курсында оқыту мәселесі ұзақ сатыдан өтті, оны мектепте оқыту тәжірибесіне енгізу мәселесі XIX ғасырдың екінші жартысында-ақ көптеген елдерді толғандырды.

XX ғасырдың 50 жылдарында Кеңестер Одағында математиканы орта мектепте оқыту реформасы жүзеге асырыла бастады. Алгебра және анализ бастамаларын мектеп курсына енгізу идеяларын академик Н.Н.Лузин, Д.М.Синцов, профессор Н.А.Глаголев, Б.Н.Делоне, Я.С.Дубнов және озат мұғалімдер қолдады.

Осы кезеңде ірі ғалым-математиктер А.Д.Александров, А.И.Бега, Б.В.Гнеденко, Я.Б.Зельдович, А.Н.Колмогоров, М.А.Лаврентьев, А.И.Маркушевич, И.Г.Петровский және басқалардың мектепте математикалық білімді модернизациялау туралы маңызды мақалалары баспасөзде жарияланды.

XX ғасырдың 70 жылдарының соңында орта мектепке жаңа курс «Алгебра және анализ бастамалары» енгізілді, бұл курстың енгізілуіне байланысты осы пәнді оқыту әдістемесін дайындаудың қажеттілігі туды.

Алғашқы кезеңде көптеген математик және әдіскерлер (А.Н.Колмогоров, А.И.Маркушевич, С.И.Шварцбурд, Н.Я.Виленкин, О.С.Ивашев-Мусатов және тағы басқалар) курстың жетекші идеясы мен мазмұнын анықтау бағытында жұмыс жасады. Сол сияқты бұл сұрақтарға М.Ахметов, В.В.Ветров, Е.В.Галкин, Д.М.Соловьева, А.С.Шумов тағы басқалардың диссертациялық зерттеулері арналды.

Орта мектепте математикалық білім мазмұнын жетілдіру, білім стандартын жобалау, оқу-әдістемелік кешенмен қамтамасыз ету, математикалық білімнің сабақтастығы мен болашағы, жаңа технологиялар мәселелері қазақстандық ғалымдар А.Е.Әбілқасымова, М.Есмұхан, Б.Баймұханов, Е.Ө.Медеуов. С.Е.Шәкілікова, Д.Рахымбек, О.Сатыбалдиев тағы басқалардың еңбектерінде қарастырылды.

Ресейлік ғалымдардың зерттеулерінің басым көпшілігі алгебра және анализ бастамаларын мектепте оқыту мазмұнын анықтау және олардың алгебра, геометрия курсымен өзара байланысы бағытында жүргізілген. Кешенді түрде қарастырылған жұмыстар аздау. Ал қазақстандық ғалымдардың (А.М.Мубараков, О.Сатыбалдиев, т.с.с.) еңбектері математиканы окытудағы сабақтастық және болашақ мұғалімдерді жоғары оқу орнында кәсіби дайындау жүйесіне арналған.

Қазіргі уакытта Республикамыздағы мектептер бұрынғы біржүйелі орта білім беретін мектеп емес, пәндерді тереңдетіп оқытатын сыныптар мен мектептердің бар болуы, ақпараттық технологияның қарқындап өсуі заман ағымына сай білім беруді жетілдіруге бағытталған мәселелерді айқындау, яғни оқыту әдістемесін жетілдіру, алдымыздағы тәжірибені жинақтап негіздеу, математиканың болашақ дамуын болжауды қойып отыр.

Сонымен қатар Қазақстан Республикасы мектептеріндегі алгебра және анализ бастамаларын оқыту практикасында шешілмеген маңызды мәселелер әлі де аз емес. Оған: орта мектепте алгебра және анализ бастамаларын оқытуды жетілдіруді теориялық-әдістемелік тұрғыдан негіздеу, математиканың қолданбалық бағытын терең ашу, пәнішілік және пәнаралық байланыстарды жүзеге асыру, сабақтастықты дамыту, қазіргі заманға сай технологияларға негізделген әдістемелік жабдықтармен математика мұғалімдерін қамтамасыз ету және бүгінгі күнн талабына сай білім деңгейін үнемі көтеріп отыру мәселелері жатады.

1. Алгебра және анализ бастамалары пәнін оқытудағы сабақтастық және пәнішілік байланыстардың рөлі

Болашақ маманның үздіксіз шығармашылықпен дамуын қамтамасыз ету және оның білім алу траекториясын өз мүддесіне, бейімділігі мен қажеттіліктеріне сәйкес қалыптастыру үздіксіз көпдеңгейлі кәсіби білім беру бағдарламаларының сабақтастыққа негізделуіне тікелей байланысты.

ХХ ғасырдың 90-шы жылдарындағы білім беру жағдайының өзгерістері сабақтастығы ең өзекті мәселелердің қатарына көтерді. Оның төмендегідей себептері болды:

– білім берудің қазіргі жүйесіндегі білім беру мекемелерінің әр типтілігі;

– оқу-тәрбие үдерісінің нысандары мен субъектілерінің түрліше сипаттылығы;

– педагогикалық іс-әрекеттің екі жүйесінің (пәндік-бағдарлы және тұлғалық-бағдарлы) қарама-қайшылығы.

Әдетте сабақтастық ұғымы табиғаттағы, қоғамдағы және танымдағы даму үдерісінде құбылыстардың арасындағы байланыстарда жаңаның ескіні ауыстыра отырып, оның кейбір элементтерін өзінде сақтап қалу жағдайы ретінде түсіндіріледі. Бұл анықтама педагогикалық үдерістің ерекшеліктеріне байланысты өзгешелігі бар педагогикалық сабақтастықтың мән-мағынасын түсінуге негіз болып саналады.

Сабақтастық:

– ол бірінші кезекте ғылымилық, жүйелік, бірізділік, түсініктілік сияқты ұстанымдардың жүзеге асырылуын қамтамасыз ететін білім берудің қағидасы болып табылады;

– біртұтас жүйенің элементтері ретінде жаңа және ескі білімдердің арасында байланыстар орнатады;

– әрбір сабақта және курстардың әртүрлі тақырыптарында берілетін білімдердің арасындағы байланыстарды анықтайды;

– білім берудің әрбір келесі кезеңінде білім алушыларды өткеннің деңгейінде кідіртудің қажеті жоқтығын көрсетеді: жаңа материалмен сабақтастықта жұмыс істеу үдерісінде ескіні еске түсіру пайдалырақ болады;

– бағдарламалар мен оқулықтарды сәйкестендіруді, материалды қайталау-қорытындылау сабақтарын өткізу сияқты тәсілдерді қолдану жолымен бірізді байланысты жүзеге асырады.

«Сабақтастық» ұғымын педагогика саласындағы зерттеушілер әр түрлі тұрғыда қарастырады. Мысалы, С.Смаилов сабақтастықты даму үдерісінің сатыларының, кезеңдерінің арасын байланыстырушы буын ретінде түсіндірсе, К.Т.Устемировтің пайымдауынша, сабақтастық – кәсінтік білім берудің тиімділігін қамтамасыз ететін білім беру мазмұнының, әдістерінің, құралдары мен дидактикалық материалдарының оңтайлы бірізділігі, білім берудің бір деңгейінен екінші деңгейіне өтуді қамтамасыз ететін олардың арасын байланыстырушы буындар. С.З.Қоқанбаев сабақтастықты білім берудің кешенінің әрбір сатысының оқу жоспарларындағы игерілетін әлеуметтік-ізгілендіру, базалық және арнайы кәсіби пәндер циклындағы оқу пәндері мазмұнының өзара әртүрлі байланыстарының негізіндегі білім алушылардың кәсіби білім, біліктілік, дағдыларының дамуы деп түсіндіреді.

Нысан мен құбылыстың дамуының түрліше сатыларының арасындағы байланыс пен қарым-қатынастарды белгілейтін сабақтастық категориясы әлі болса да лайықты дәрежеде зерттелмеген. Сабақтастық оқу-тәрбие үдерісінің заңдылығы болып табылады, себебі кейінгінің алдыңғымен байланысы белгілі бір үдерістің барысында пайда болатын және көрініс табатын ең берік, мәнді, жалпы, қажетті, қайталамалы, объективтік байланыстар мен қарым-қатынастардың көрінісі болып табылады.

Еліміздің жаңа даму бағытында білім беру жүйесін жалпыұлттық күйінде қалдыра отырып, оқу-тәрбие үдерісін жаңа инновациялық технологияларға сай жаңғырту қажет. Осыған орай жалпы білім беретін мектептің алдында тұрған басты міндет – оқуды өмірге жақындату. Осыған байланысты мектептегі сыбайлас пәндердің байланысын, пәнішілік байланысты орнықтыратын әдістемелік сұрақтардың мәні ерекше артады. Мектептегі оқу процесінде математика мен басқа пәндерді ұштастыра оқыту, сонымен қатар алгебра және анализ бастамалары мен геометрияның ішкі байланыстарын пайдалана оқыту әдістерін қолдану математикадан тиімді және терең білім берудің негізгі шарттарының бірі болып табылады.

Пәннің ішкі байланысын жүзеге асыру оқушылармен есеп шығару процесінде тиімді нәтижеге қол жеткізеді. Мұндай жаттығуларды таңдағанда олардың әрқайсысының шығармашылық мазмұнына, оқушылардың қажетті теориялық білім негіздерін түсінуіне және қарастырылып отырған мәселенің негізгі математикалық идеяны анықтауына басты талап қойылуы керек.

Пәнішілік мазмұнды жаттығуларды шығару математиканы оқыту процесінің тиімділігін арттырады. Бұл сонымен бірге математика курсындағы барлық тарауларды оқып-үйренудің табиғи бірлігін қамтамасыз етеді.

Ұсынылып отырған баяндамада, біз алгебра және анализ бастамалары курсындағы әр түрлі тақырыптардың өзара тығыз байланысын көрсетпекпіз. Осы байланыстар негізінде өтілетін тақырыпты кешенді түрде игеруге мүмкіндік туады. Себебі бір уақытта жаңа тақырыпты түсіндіру барысында өткен материалдар қайталанып, алдағы тақырыптарға дайындық жүргізіледі.

Математикадан жүйелі талапқа сай білім алуда пәнаралық және пәнішілік байланыстарды, қолданбалы бағыттағы есептерді қамтып отырудың маңызы зор.

Оқушыларға сапалы білім беруде, дүниеге дұрыс ғылыми көзқарасын қалыптастыруда пәндерді байланыстырып оқытудың маңызы зор.Оқу пәндері өзара байланысқан ғылымдардың негізінде құрылғандықтан, олардың арасында да ғылымдар арасындағы сияқты байланыс орнату қажет.

Пәнаралық байланыс дегеніміз – сабақта өтілетін материалдарға қосымша ұғымдарды, түсініктерді үстемелеп енгізу деген сөз.Мұғалім пәнаралық байланысты ойластырғанда, нені немен, қай мөлшерде, қай сәтте байланыстыратынын дәл анықтап, негізгі материал мазмұнына зиян келмеуін қатаң ескеруі қажет.

Пәнаралық байланыстылық жеке пәндердің өзіндік ерекшелігіне қарай жұмыс жүргізу тәсілдерін белгілейді.Мұндай методикалық тәсілдердің жалпы пәндерге ортақ түрлері бар.Олардың қатарына мыналар жатады:

1. Әр түрлі сипаттағы пәндердің мазмұнын игеру барысындағы оларға тән ортақ қандай да бір заңдылықтарын тауып,теориялық қорытынды шығарып отыру.
2. Бір пәннің материалын екінші бір пәннің мазмұнын ашуда иллюстрация ретінде пайдалану.
3. Өткен материалдарды қайталау арқылы жеке пәннің ішкі мазмұн бірлігін, сабақтастығын сақтау, сөйтін ортақ жалпы заңдылықтарын таныта отырып жеке мәселелерді түсіндіру.
4. Мазмұны ұқсас материалдарды байланыстырып және тақырыптас жеке материалдарды салыстыру түрінде ұғындыру.
5. Әр түрлі пәндерде физика, химия, биология т.б. сабақтарда оқып үйретілетін құбылыстардың байланысын ашу, материалдық дүниенің бірлігін көрсету.

Ғылым дамуының қазіргі кезеңі ғылымдар арасындағы барған сайын ұлғайып отырған байланыспен және ғылымдардың өзара сабақтасуымен, әсіресе математика мен физика білімінің басқа салалармен байланысымен сипатталады. Сондықтан физика мен математиканы пәнаралық негізде оқытуға ерекше тоқталайық.

Физика мен математиканы байланыстыра оқыту оқушылардың танымдық біліміне қызығушылығын дамытуға, ойлау қабілетін, ғылыми көзқарасын қалыптастыруға көмектеседі.

Математика мен физика байланысының маңызды формасы физикалық мазмұнды математикалық есептер шығару болып табылады. Бұл математика үшін теорияның практикамен байланысын күшейтетін құралдардың бірі болса, ал физика үшін физикалық ұғымдарды пысықтап, оны тереңірек ұғынудың қажетті шарты болып табылады. Ғалымдар математика мен физиканы байланыстыра оқытудың мынадай жолдарын ашты:

1. Математикалық ұғымдарды өндіруде, түсіндіруде физикалық процесстерді,
идеялар мен есептерді қолдану.
2. Физиканы оқытуда математиканы пайдалану.
3. Математика мен физика пәндері бойынша комплексті экскурсиялар.
4. Абстракты математикалық өрнекті физикалық заңның математикалық өрнегімен салыстыру.
5. Физикалық формулалардың математикалық анализі және физикалық түсіндірмесі.
6. Математика мен физика сабақтарында физикалық мазмұнды есептердің шығарылуына байланысты математика мен физика пәндерін бір уақытта қайталау.

Жалпы, математика мен физиканың өзара байланысы олардың әр түрлі көзқараста зерделенетін пәндік аймақтарының және идеяларын мен әдістерінің ортақтығымен анықталады. Оларды үш түрге бөлуге болады.

1. Физикалық мәселелерді шешу үшін қажетті идеялар мен әдістер математиканың теориялық дамуына негіз болады.

2. Дамыған математикалық теория өзінің идеяларымен, аппаратымен физикалық теорияны тудырады, ал ол дүниенің физикалық бөлінісін дамытып, жаңа физикалық мәселелердің туындауына әкеледі.

3. Физикалық теорияның дамуы белгілі математикалық аппаратқа сүйенеді, ал соңғысы физикада қолдану деңгейіне байланысты дамып, жетіледі.

Математика мен физиканың идеялары мен теорияларының өзара байланысының осы үш түрлі шартты сипатта, себебі олар «таза түрде» болмайды, олар бір-біріне өтіп отырады және диалектикалық бірлікте болады.

Енді алгебра және анализ бастамалары пәніндегі тақырыптарға сәйкес жоғарыдағы ұстанымдарға сәйкес келетін жаттығуларды қарастырайық.

1.1-мысал. $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ санының иррационал екенін дәлелде.

Шешуі. Кері жориық. Айталық, $x -$рационал сан болсын. Онда қысқаша көбейту формуласын пайдалансақ,

$$x^2 = 8 + 2\sqrt{15} \text{ және } \sqrt{15} = \frac{x^2 - 8}{2}$$

аламыз. Бұдан $\sqrt{15}$ - рационал сан болды. Біз қарама-қайшылыққа келдік. Ендеше біздің жоруымыз дұрыс емес, яғни $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ - иррационал сан.

1.2-мысал. $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$ санының иррационал сан екенін дәлелде.

Шешуі. Жоғарыдағыдай, $x -$рационал сан деп алайық. Онда

$$x^3 = 2 + 3 + 3\sqrt[3]{6}\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}\right)$$

$$x^3 - 5 = 3a\sqrt[3]{6} \text{ және } \sqrt[3]{6} = \frac{1}{3x}\left(x^3 - 8\right)$$

Бұдан $\sqrt[3]{6}$ - рационал сан. Тағы да қайшылыққа келдік, олай болса $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ - иррационал сан.

1.3-мысал. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 15x + 18}{x^3 + 5x^2 + 5x - 3}$ шешімін табайық.

Шешуі. Айталық, $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 18;\ f(-3) = 0$

$x^3 + 6x^2 + 15x + 18$ көпмүшелігін $x + 3$-ке бөлеміз.

$$\begin{array}{r|l}
-\ x^3 + 6x^2 + 15x + 18 & x + 3 \\
x^3 + 3x^2 \qquad\qquad & \overline{x^2 + 3x + 6} \\
\hline
-\ 3x^2 + 15x + 18 & \\
3x^2 + 9x \qquad & \\
\hline
-\ 6x + 18 & \\
6x + 18 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$f(x) = (x + 3)\left(x^2 + 3x + 6\right)$

Айталық $g(x) = x^3 + 5x^2 + 5x - 3,\ g(-3) = 0$ жоғарыдағыдай тәсілмен $g(x) = (x + 3)\left(x^2 + 2x - 1\right)$ екеніне көз жеткізуге болады. Ендеше

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+6x^2+15x+8}{x^3+5x^3+5x-3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2+3x+6)}{(x+3)(x^2+2x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+3x+6}{x^2+2x-1}=\frac{9-9+6}{9-6-1}=3$$

1.4-мысал. $y=\dfrac{x^3+4x^3+10x^2+12x+10}{x^2+2x+3}$ функциясының ең кіші мәнін табыңыз.

Шешуі. Туынды арқылы зерттеуге болар еді, бірақ ол техникалық тұрғыда қиындық туғызады. Есепті шешуді жеңілдету үшін көпмүшелікті көпмүшелікке бөлуді пайдаланып, сонан соң туындыны қолданамыз.

$$\begin{array}{r|l} x^4+4x^3+10x^2+12x+10 & x+3 \\ -\ x^4+2x^3+3x^2 & \overline{x^2+3x+6} \\ \hline 2x^3+7x^2+12x+10 & \\ -\ 2x^3+4x^2+6x & \\ \hline 3x^2+6x+10 & \\ -\ 3x^2+6x+9 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Сонымен $y=x^2+2x+3+\dfrac{1}{x^2+2x+3}$

Белгілеу енгіземіз. $x^2+2x+3=t$

$$t=(x+1)^2+2 \quad \text{және} \quad x^2+2x+3=t$$

онда

$$y=t+\frac{1}{t};\quad y'=1+\left(-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{t^2-1}{t^2}$$

	(0,1)	-1	(-1,0)	(0,1)	1	(1;+∞)
y'	+	0	-	-	0	+

Бірақ бізде $t\geq 2$ және $y(t)$ өспелі, ендеше $y=y_{\min}=2+\dfrac{1}{2}=2{,}5$

Алуымыз бойынша $x^2+2x+3=2$ тек $x=-1$ болғанда $y_{\min}=2{,}5$ мән алады. $y(x)$ функциясының үздіксіздігінен $y_{\min}$ - функцияның ең кіші мәніне сәйкес келеді. Сонымен берілген функцияның ең кіші мәні 2,5-ке $x=-1$ нүктесінде тең болады екен.

1.5-мысал. $y=\dfrac{x^3+4x+1}{x^2+2x+2}$ функциясының көлбеу ассимптотасын табыңыз.

Шешуі. Көпмүшеліктерді бөлуді орындап, мынаны аламыз.

$$x^3+4x+1=x-2+\frac{2x-3}{x^2+2x+2}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{x^2+2x+2}=0$ болғандықтан көлбеу ассимптота $y=x-2$ түзуі болады.

1.6-мысал. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$ интегралын есептеңіз.

Шешуі. Интеграл таңбасы астындағы рационал бөлшекті жай бөлшектерге жіктейміз.

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-4}$$

Соңғы теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтірін, бөлімдерінің теңдігінен олардың алымдарының теңдігі шығатынын және көпмүшеліктердің теңдігінен олардың сәйкес дәрежелерінің коэфициенттерінің теңдігі орындалатынын ескере отырып A,B,C-ларды табамыз.

Сонда $A=4,\ B=-7,\ C=5$ екендігін табамыз.

Бұдан

$$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx = \int\left(\frac{4}{x-1} - \frac{7}{x+3} + \frac{5}{x-4}\right)dx =$$

$$= 4\ln|x-1| - 7\ln|x+3| + 5\ln|x-4| + C$$

1.7-мысал. $\int \frac{7x^5+6x^3+x^2-136x+6}{x^2+4}dx$ интегралын есептеңіз.

Шешуі.

$$\int \frac{7x^5-6x^3+x^2-136x+6}{x^2+4}dx = \int\left(7x^3-34x+1+\frac{2}{x^2+4}\right)dx =$$

$$= \int\left(7x^3-34x+1\right)dx + 2\int\frac{dx}{x^2+4} = \frac{7}{4}x^4 - 17x^2 + x + arctg\,\frac{x}{2} + C$$

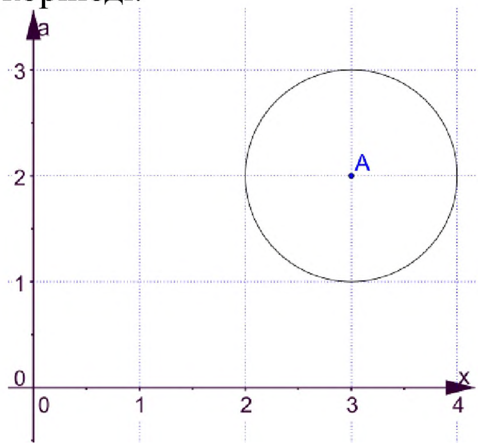
1.1. Алгебраның есептерін геометрияның көмегімен шешу

1.1.1-мысал

a-ның қандай мәндерінде теңдеу түбірлерінің айырымының модулі ең үлкен мән қабылдайды:

$$x^2-6x+12+a^2-4a=0$$

Шешуі: Берілген теңдеуді толық квадратын бөліп алу арқылы мына түрде жазамыз: $(x-3)^2+(a-2)^2=1$ және xa координата жүйесінде графигін саламыз. Сонда шешімі көзге айқын көрінеді.



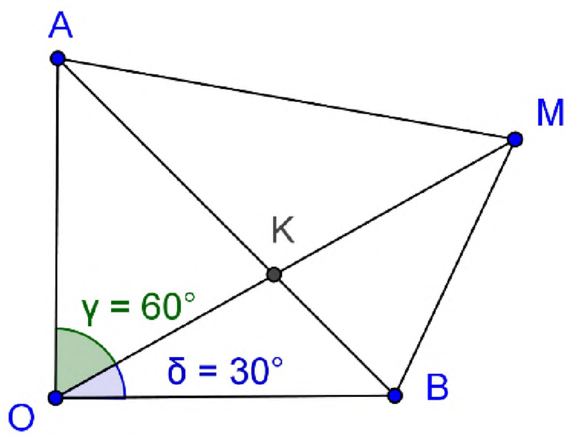
Айырым модулінің ең үлкен мәні шеңбердің центріне келетіні белгілі. Олай болса, жауабы $a=2$.

1.1.2-мысал.

$\sqrt{1+x^2-x}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$ өрнегінің ең кіші мәнін табыңыз.

Шешуі: $f(x)=\sqrt{1+x^2-x}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$ функциясы деп қарастырып, аргументке мәндер береміз. Барлық $x<0$ үшін $f(x)>f(0)$ қабылдайтынын байқауға болады. Демек функцияның ең кіші мәні болатын ізделінді нүктені айнымалының теріс емес мәндерінен іздеу керек.

$x>0$ жағдайын қарастырайық. Геометриялық түрлендіру жасауға болады. OA=OB=1 болатындай OA және OB перпендикуляр кесінділерін, және $\angle MOB=30°, \angle MOA=60°$ болатын OM=x кесіндісін тұрғызайық.

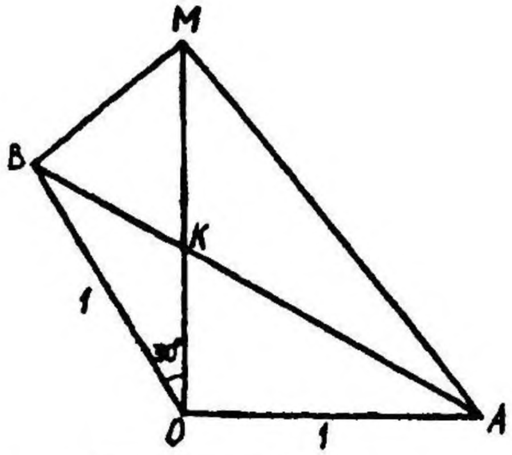


OMB және OMA үшбұрыштарынан косинустар теоремасы бойынша $MB=\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$ және $MA=\sqrt{1+x^2-x}$ теңдіктерін алуға болады.

1.1.3-мысал

$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі: Алдыңғы есептің шешу идеясын пайдаланамыз. $f(x)=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$ функциясында $x<0$ үшін $f(x)>f(0)=2$ теңсіздігі орындалатыны белгілі. Демек, $f(0)=2$ сияқты теңдеудің шешімдерін айнымалының оң мәндерінің ішінен іздейміз. $OA=OB=1,\ OM=x,\ \angle AOB=120°, \angle AOM=90°, \angle MOB=30°$ болатындай кесінділер тұрғызамыз.



Онда $MA=\sqrt{1+x^2},\ \ MB=\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$ және

$$MA+MB=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}\geq AB=\sqrt{3},$$

Бұдан $x=OM=OK=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Жауабы: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

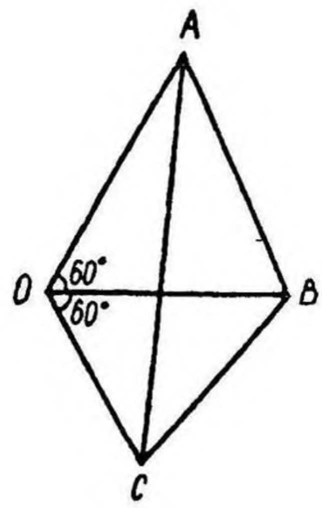
1.1.4-мысал.

a,b,c оң сандары үшін мына теңсіздіктің

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+ac+c^2}$$

орындалатынын дәлелеудеу керек.

Шешуі. $OA=a, OB=b, OC=c$ және $\angle AOB=60°, \angle BOC=60°$ болатындай OA, OB және OC кесінділерін қарастырамыз.



Мұнда

$$AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2},$$

$$BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2},$$

$$AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

болатынын көруге болады. Онда кез келген үшбұрыш үшін $AC \le AB + BC$ орындалатынын ескерсек, онда берілген

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \ge \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

теңсіздігінің орындалатынын аңғару қиын емес.

1.1.5-мысал.

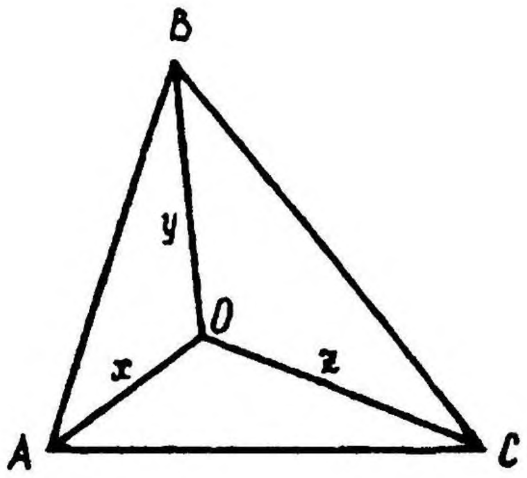
$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^2 + xz + z^2 = 9 \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases}$ теңдеулер жүйесінің оң шешімдері бар ма?

Шешуі. Бастапқы төрт есеп сияқты, үшбұрыштар теңсіздігін пайдаланамыз.

Жүйені қанағаттандыратын оң x, y, z табылады деп болжайық.

$$OA = x,\ OB = y,\ OC = z,\ \angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$$

болатындай OA,OB,OC кесінділерін тұрғызайық.



Онда AB, AC және BC кесінділері үшін мына теңсіздік орындалады: $AB + BC > BC$. Бірақ, теңдеулер жүйесінен $AB = 2, AC = 3, BC = 6$ теңдіктерін ескереміз.

Жауабы: оң шешімдері жоқ.

1.1. 6-мысал.

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \geq \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі. xy координата жазықтығында $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ нүктелерін қарастырайық. Онда

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$AC = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

теңдіктері орындалады. Кез келген үшбұрыш үшін $AB + BC \geq AC$ теңсіздігі орындалатынын ескерсек, онда берілген теңсіздіктің орындалатынын аңғару қиын емес.

1.1.7-мысал.

Кез келген x, y, z үшін

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

теңіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі. Координаталық жазықтықта $A(x,0), B\left(-\frac{y}{2}, \frac{y\sqrt{3}}{2}\right), C\left(-\frac{z}{2}, -\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)$ нүктелерін қарастырамыз. Онда

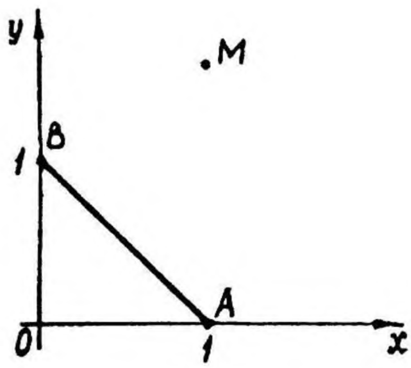
$$AB = \sqrt{x^2 + xy + y^2},$$
$$AC = \sqrt{x^2 + xz + z^2},$$
$$BC = \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

Олай болса, бұрынғыша үшбұрыштар теңсіздігін пайдаланамыз.

1.1.8-мысал.

$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ өрнегінің ең кіші мәнін табу керек.

Шешуі. xy координаталық жазықтықта $A(1;0), B(0;1)$ және кез келген $M(x;y)$ жүйесін қарастырайық.



Онда мұндай түрлендіру есептің шешімін айқын көрсетеді. Расында да MB мен MA кесінділері ұзындықтарының қосындысы

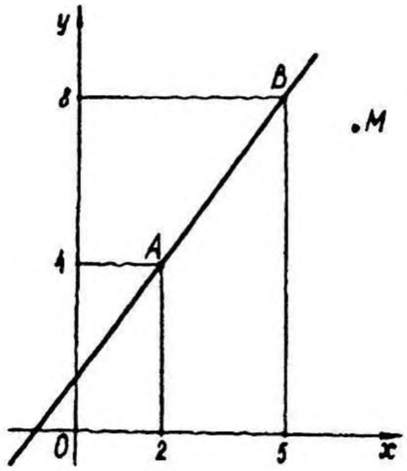
$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

M нүктесі AB кесіндісінің бойында жатқанда ғана, яғни $MA + MB = AB = \sqrt{2}$ болғанда ғана ең кіші мән қабылдайды. AB кесіндісінің кез келген нүктесінде берілген өрнек ең кіші мәнге ұмтылатынын атап өткен жөн. Жауабы: $\sqrt{2}$.

1.1.9-мысал.

$\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2} = 5 \\ 3xy - 10y = 3 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешу керек.

Шешуі. Алдыңғы есептегідей координаталық жазықтықта $A(2;4), B(5;8)$ және $M(x,y)$ нүктелерін қарастырайық.



Онда $MA + MB \geq AB$ үшбұрыштар теңсіздігі

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2} \geq 5$$

түріне келеді. Теңдік тек М нүктесі АВ-ның бойында жатқанда ғана орындалатыны белгілі. АВ түзуінің теңдеуі $4x - 3y + 4 = 0$ түрінде болады. Бұдан бастапқы жүйеге мәндес жүйе аламыз:

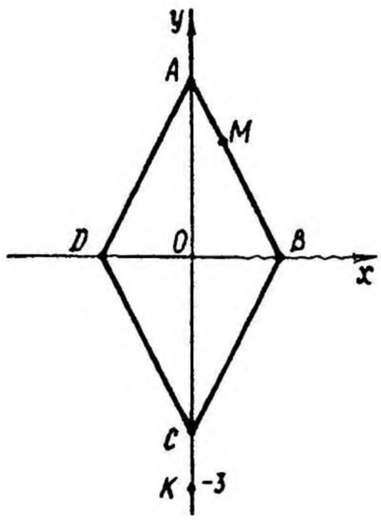
$$\begin{cases} 4x - 3y + 4 = 0 \\ 3xy - 10y = 3 \\ 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Жүйенің шешімдері, яғни есептің жауабы: $x = 3{,}5 \quad y = 6$.

1.1.10-мысал.

x, y сандары үшін $2|x| + |y| = 2$ орындалатын болса, $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$ өрнегінің ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

Шешуі. $2|x| + |y| = 2$ теңдеуінің графигі ромб болатынын көрсету қиын емес.



Онда геометриялық тілмен айтқанда МО және МК кесінділерінің ұзындықтары қосындысының ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтау керек. Мұндағы $O(0;0)$, $K(0;-3)$ал М нүктесі ABCD ромбысына тиісті. МОК үшбұрышын қарастырайық. $MO+MK>OK=3$(М нүктесі С мен беттескенде ғана теңсіздік тура теңдікке айналады) Әрі қарай $MO \le AO$ және $MK \le AK$ теңсіздіктерін дәлелдеу қиын емес. Соңғы екі теңсіздікті ескеріп,

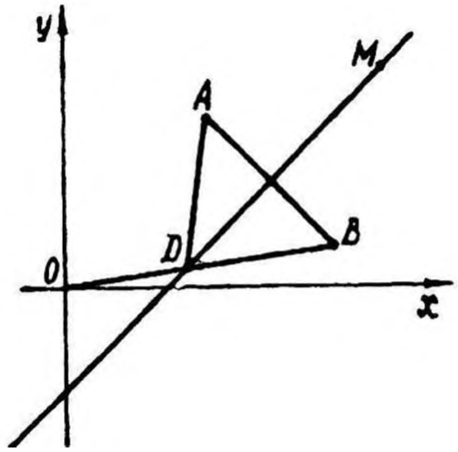
$MO+MK \le AO+AK=7$ (М нүктесі А-мен беттескенде теңдік тура теңдікке айналады) теңсіздігін аламыз.

Жауабы: ең үлкен мәні 7, ең кіші мәні -3.

1.1.11-мысал.

Егер $x-y-3=0$ шарты орындалса, $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$ өрнегінің ең кіші мәнін табу керек.

Шешуі. xy координата жазықтығында $y=x-3$ түзуінде жатқан $O(0;0)$, $A(4;3)$ және $M(x,y)$ нүктелерін қарастырамыз.

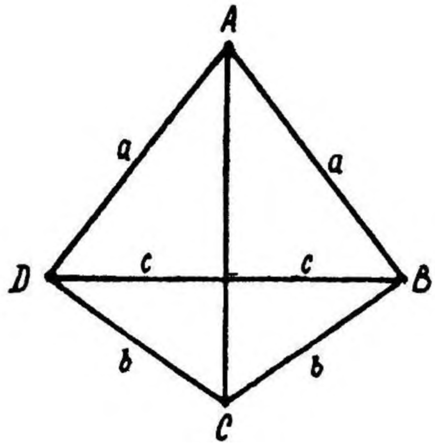


$MA+MO$ қосындысы ең кіші мән қабылдайтындай М нүктесінің орнын табу керек. А нүктесіне осы түзуге қарағанда симметриялы болатын $B(6;1)$ нүктесін қарастырамыз. Онда М-нің орны ОВ мен $y=x-3$ түзулерінің қиылысында жатады. Түзуге тиісті кез келген М үшін $OM+AM=OM+MB \ge \sqrt{37}$. Теңсіздік М нүктесі $D\left(\frac{18}{5};\frac{3}{5}\right)$ нүктесімен беттескенде теңсіздік тура теңдікке айналады. Жауабы: $\sqrt{37}$.

1.1.12-мысал.

$\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2} \le \frac{ab}{c}(a>0, b>0, c>0)$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі. Егер $a=c$ немесе $b=c$ болса, онда теңсіздік орындалатыны айқын. $a>c$ және $b>c$ жағдайларын қарастырайық. Мұндай a,b,c-лар үшін $AB=AD=a$, $CB=CD=b$, $DB=2c$ болатын ABCD дельтоидын құруға болады.



Онда

$$c\sqrt{a^2 - c^2} = S_{DAB}$$

$$c\sqrt{b^2 - c^2} = S_{BCD}$$

$$c\sqrt{a^2 - c^2} + c\sqrt{b^2 - c^2} = S_{DAB} + S_{BCD} = S_{ABCD} = ab\sin\angle ABC \le ab$$

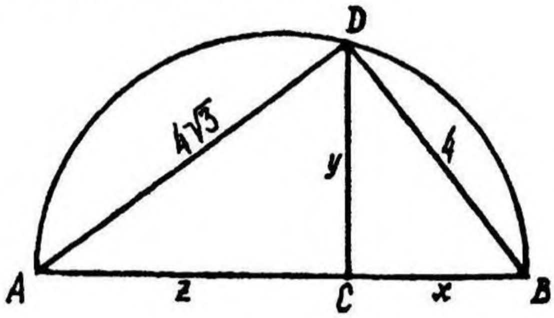
1.1.13-мысал.

$x > 0, y > 0, z > 0$ үшін

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y^2 + z^2 = 48 \\ y^2 = xz \end{cases}$$

орындалса, $S = xy + yz$ өрнегінің мәнін табу керек.

Шешуі. Жарты шеңбердің AB диаметрі бойынан $AB = AC + CB$(мұндағы $AC = z, CB = x$) болатындай C нүктесін алып, осы жарты шеңберді D нүктесінде қиятындай перпендикуляр тұрғызамыз.



Олай болса, жүйенің 3-ші теңдеуінен $CD = y$ болатынын көреміз.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y^2 + z^2 = 48 \end{cases}$$

Теңдеулерінен $BD = 4, AD = 4\sqrt{3}$ теңдіктері шығады, олай болса, $S = xy + yz = 2S_{BCD} + 2S_{ACD} = 16\sqrt{3}$

Жауабы: $16\sqrt{3}$.

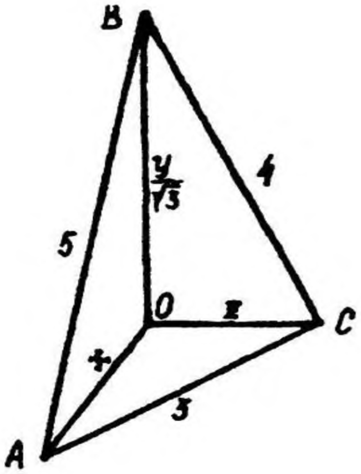
1.1.14-мысал.

Егер $x>0, y>0, z>0$ үшін

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25 \\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=16 \\ z^2+zx+x^2=9 \end{cases}$$

теңдіктері орындалса, $M=xy+2yz+3xz$ өрнегінің мәнін табу керек.

Шешуі. $\angle BOC=90°$, $\angle COA=120°$, $\angle BOA=150°$ болатын $OB=\dfrac{y}{\sqrt{3}}, OC=z$ және $OA=x$ кесінділерін саламыз.



Онда есеп шартынан $AB=5,\ BC=4,\ AC=3$ және $S_{ABC}=\dfrac{BC\cdot AC}{2}=6$ теңдіктерін алуға болады. Онда

$$S_{ABC}=S_{BDC}+S_{COA}+S_{BOA}=\frac{yz}{2\sqrt{3}}+\frac{xz\sqrt{3}}{4}+\frac{xy}{4\sqrt{3}}=6.$$

Енді теңдіктің екі жағын $4\sqrt{3}$-ке көбейтіп, $M=24\sqrt{3}$ теңдігін аламыз.

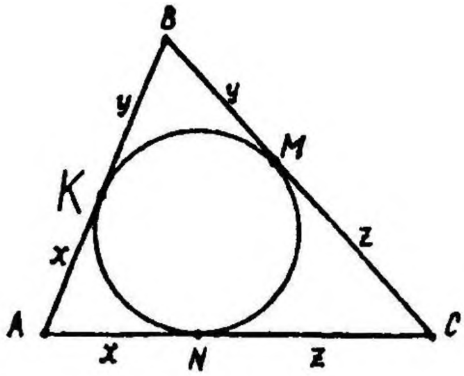
1.1.15-мысал.

Егер $x>0, y>0, z>0$ үшін $xyz(x+y+z)=1$ болса, онда $(x+y)(x+z)\geq 2$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі. $x>0, y>0, z>0$ үшін ABC үшбұрышында

$$AB=c=x+y,\ BC=a=y+z,\ AC=b=x+z$$

болатындай үшбұрыш қабырғалары бойынан K, M, N нүктелері табылатыны белгілі.



Онда $K, M, N -$ ΔABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің AB, BC, AC қабырғаларымен жанасу нүктесі болады. $p = x + y + z$ теңдігін аламыз. Мұндағы $p -$ жарты периметр.

Бұдан басқа

$$AK = AN = p - a = x$$

$$BK = BM = p - b = y$$

$$CM = CN = p - c = z$$

Бірақ есеп шартына сәйкес

$$xyz(x + y + z) = p(p - a)(p - b)(p - c) = S^2 = 1 \text{ және } S = 1$$

Мұндағы $S -$ ABC үшбұрышының ауданы. Бір жағынан алып қарағанда

$$2S = AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \leq AB \cdot AC = (x + y)(x + z)$$

Олай болса, $(x + y)(x + z) \geq 2S = 2$

1.1.16-мысал

$\sqrt{99 \cdot 101} + \sqrt{98 \cdot 102} + ... + \sqrt{2 \cdot 198} + \sqrt{1 \cdot 199} < \frac{100^2 \pi}{4}$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі. Радиусы 1-ге тең болатын дөңгелектің бір ширегін қарастырамыз. Осы бөліктің ішіне ені $\frac{1}{100}$-ге тең болатын 99 тіктөртбұрыштан тұратын баспалдақты фигура саламыз. Бірінші тіктөртбұрыштың ауданы

$$S_1 = OB \cdot AB = OB \cdot \sqrt{1 - OB^2} = \frac{1}{100}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{100}\right)^2} = \sqrt{\frac{99 \cdot 101}{100^2}}$$

Екінші тіктөртбұрыш үшін

$$S_2 = \frac{1}{100}\sqrt{1 - \left(\frac{2}{100}\right)^2} = \sqrt{\frac{98 \cdot 102}{100^2}} \text{ т.с.с.}$$

$$S_{99} = \frac{1}{100}\sqrt{1 - \left(\frac{99}{100}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 \cdot 199}{100^2}}$$

Баспалдақты фигураның ауданы дөңгелек ширегінің ауданынан кіші. Олай болса:

$$\frac{\sqrt{99 \cdot 101}}{100^2} + \frac{\sqrt{98 \cdot 102}}{100^2} + ... + \frac{\sqrt{2 \cdot 198}}{100^2} + \frac{\sqrt{1 \cdot 199}}{100^2} < \frac{\pi}{4}$$

Дәлелдеу керегі де осы еді.

1.1.17-мысал

Егер $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge x_4 \ge x_5 > 0$ болса, онда $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 \ge (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі. Дәлелдеу керек теңсіздіктің сол жағы – *а* суреттегі боялған бөліктердің аудандарының қосындысы. Ал оң жағы – қабырғасы $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5$-ке тең болатын квадраттың ауданы. Алынған фигуралардың әрқайсысы 1 квадраттан және төрт трапециядан тұрады, квадраттар тең, сәйкес трапециялардың биіктіктері тең, бірақ *а* суретте трапециялардың орта сызықтары *б* суреттегі трапециялардың орта сызықтарына қарағанда көп. Сондықтан бірінші фигураның ауданы екіншісінен кем емес ($x_2 = x_3$ және $x_4 = x_5$ болғанда теңсіздік теңдікке айналады).

1.2. Алгебраның есептерін тригонометрияның көмегімен шешу

1.2.1-мысал

a, b, c, d сандары $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$ шарттарын қанағаттандырса, $|ac - bd| \le 1$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі.

$a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$ орындалатын болса, $a = \sin\alpha, b = \cos\alpha, c = \sin\beta, d = \cos\beta$ болатын α, β бұрыштары табылады. Бұдан

$$ac - bd = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta = -\cos(\alpha + \beta)$$

Бұдан $|ac - bd| \le 1$ екендігі шығады.

1.2.2-мысал.

$m^2 + n^2 = 1, p^2 + q^2 = 1, mp + nq = 0$ екендігі белгілі болса, $mn + pq$-ды табу керек.

Шешуі. $m = \sin\alpha, n = \cos\alpha, p = \sin\beta, q = \cos\beta$ деп аламыз. Бұдан $mp + nq = \cos(a - b)$. Есеп шартынан $\cos(\alpha - \beta) = 0$ екендігі шығады. Әрі қарай $mn + pq = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta = \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 0$. Жауабы: 0

1.2.3-мысал

$n \in N$ үшін, $n \ge 2$ және $|x| < 1$ шарты орындалса, $(1 + x)^n + (1 - x)^n < 2^n$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі.

$|x| < 1$ екенін ескеріп, $x = \cos\alpha, \alpha \in (0;\pi)$ деп алуымызға болады. Онда $2^n \cos^{2n}\frac{\alpha}{2} + 2^{2n}\sin^{2n}\frac{\alpha}{2} < 2^n$, яғни $\cos^{2n}\frac{\alpha}{2} + \sin^{2n}\frac{\alpha}{2} < 1$. Сол сияқты $n > 2$ және $\frac{\alpha}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ үшін $\cos^{2n}\frac{\alpha}{2} < \cos^2\frac{\alpha}{2}$ және $\sin^{2n}\frac{\alpha}{2} < \sin^2\frac{\alpha}{2}$. Бұдан $\cos^{2n}\frac{\alpha}{2} + \sin^{2n}\frac{\alpha}{2} < \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$.

1.2.4-мысал

$\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

Бұл теңдеуде $|x| \le 1$, $x = \cos\alpha, \alpha \in [0;\pi]$ деп алып мына

$\sqrt{1-\cos^2\alpha}=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ немесе $|\sin\alpha|=\cos 3\alpha$. Мұнда $\sin\alpha\geq 0$ болғандықтан, $\sin\alpha=\cos 3\alpha$ немесе $\cos 3\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=0$ орындалады. Бұл теңдеу мына жиынтықпен мәндес

$$\left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{3\pi}{4}+\pi n\\ \alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\end{array}\right.$$, мұндағы $n,k-$бүтін сандар.

Алынған екі түбірлер сериясынан $0\leq\alpha\leq\pi$ шартын қанағаттандыратындарын ғана таңдап аламыз:

$$\alpha_1=\frac{\pi}{8},\alpha_2=\frac{5\pi}{8},\alpha_3=\frac{3\pi}{4}$$

Жауабы: $x=\cos\frac{\pi}{8},x=\cos\frac{5\pi}{8}$ немесе $x=\cos\frac{3\pi}{4}$

1.2.5-мысал

$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

$x=\cos\alpha,\ \alpha\in[0;\pi]$ болсын. Алмастыру жасау арқылы $\sqrt{2}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\cos 2\alpha+2\cos|\sin\alpha|$ теңдеуін аламыз. Сол сияқты $\sin\frac{\alpha}{2}\geq 0$ және $\sin\alpha\geq 0$ деп $\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\cos 2a+\sin 2\alpha$ аламыз.

Бұдан $\sin\left(\frac{3\alpha}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{5\alpha}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha=-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi k}{3}\\ \alpha=\frac{3\pi}{10}+\frac{4\pi n}{5}\end{array}\right.$$, мұндағы $n,k-$бүтін сандар.

$[0;\pi]$ аралығында тек бір шешім ғана сәйкес келеді: $\alpha=\frac{3\pi}{10}$

Жауабы: $x=\cos\frac{3\pi}{10}$

1.2.6-мысал

$\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|=\sqrt{2}(2x^2-1)$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

Алдыңғы екі мысалдағыдай, $x=\cos\alpha,\alpha\in[0;\pi]$ алмастыру жасаймыз. Сонда $|\cos\alpha+\sin\alpha|=\sqrt{2}\cos 2\alpha,\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|=\sqrt{2}\cos 2\alpha$ теңдеуін аламыз. Бұл теңдеу мына жүйемен мәндес:

$$\begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos^2 2\alpha \\ \cos 2\alpha \geq 0 \end{cases}$$

Бұдан

$$\begin{cases} \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{2}=\frac{1+\cos 4\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha=-1 \\ \sin 2\alpha=\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ \cos 2\alpha \geq 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi k \\ \alpha=\frac{\pi}{12}+\pi n, \end{array}\right.$$ мұндағы $n,k-$бүтін сандар.

α үшін шектеуді ескере отырып,

$\alpha_1=\frac{3\pi}{4}, \alpha_2=\frac{\pi}{12}$ теңдіктерін аламыз.

Жауабы: $s=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \; x=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

1.2.7-мысал

$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

Бұл теңдеуде де $x=\cos\alpha, \alpha\in[0;\pi]$ деп аламыз. Онда бастапқы теңдеу мына түрге келеді: $\sqrt{\frac{1+\sin 2\alpha}{2}}=-\cos 2\alpha$. Бұған мәндес мынадай жүйеге келеміз

$$\begin{cases} 1+\sin 2\alpha=2-2\sin^2 2\alpha \\ \cos 2\alpha \leq 0 \end{cases}$$

Бұдан

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha=-1 \\ \sin 2\alpha=\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ \cos 2\alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi k \\ \alpha=\frac{5\pi}{12}+\pi n, \end{array}\right.$$ мұндағы $n,k-$бүтін сандар.

$\alpha_1=\frac{3\pi}{4}, \alpha_2=\frac{5\pi}{12}$ шешімдері ғана сәйкес келеді.

Жауабы: $x=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ немесе $x=\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1.2.8-мысал

$x_1, x_2, ..., x_n$ нақты сандары $[-1;1]$ аралығында жатыр. Осы сандардың кубтарының қосындысы 0-ге тең екені белгілі болса, мына теңсіздікті

$x_1+x_2+\ldots+x_n\le\frac{n}{3}$ дәлелдеу керек.

Шешуі.

$x_1=\cos\alpha_1,\ x_2=\cos\alpha_2,\ldots,x_n=\cos\alpha_n,\ \alpha\in[0;\pi],\ i\in 1,2,\ldots,n$ болсын. Онда

$$\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\ldots+\cos\alpha_n=\frac{4\cos^3\alpha_1-\cos3\alpha_1}{3}+\frac{4\cos^3\alpha_2-\cos3\alpha_2}{3}+\ldots+$$

$$+\frac{4\cos^3\alpha_n-\cos3\alpha_n}{3}=-\frac{1}{3}\left(\cos3\alpha_1+\cos3\alpha_2+\ldots+\cos3\alpha_n\right)\le\frac{n}{3}$$

($n=9k,k\in Z$ жағдайында теңсіздік тура теңдікке айналатынын ескерткен жөн).

1.2.9-мысал

$8x\left(1-2x^2\right)\left(8x^4-8x^2+1\right)$ теңдеуінің $[0;1]$ аралығында жататын қанша түбірі бар?

Шешуі.

$x=0,x=1$ нүктелері бұл теңдеудің түбірлері бола алмайды, бірақ $(0;1)$ ашық аралығын қарастыру жеткілікті.

$x=\cos\alpha,\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ болсын. Онда бастапқы теңдеу мына түрге келеді:

$$8\cos\alpha\left(1-2\cos^2\alpha\right)\left(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1\right)=1$$

Бізге тек $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ аралығында қанша түбірі бар екенін анықтау жеткілікті.

Соңғы теңдеуді түрлендіру арқылы

$$-8\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha=1$$

теңдеуін аламыз. $\sin\alpha\ne0$ болғандықтан,

$$-\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha=\sin\alpha$$

Бұдан $-\sin8\alpha=\sin\alpha;2\sin\frac{9\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha}{2}=0,\alpha=\frac{2}{9}\pi k,k\in Z$ немесе $\alpha=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi n}{7},n\in Z$. Бірінші және екінші шешімдер жиынын $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ аралығында тек 2 нүктеден ғана сәйкес келеді.

Жауабы: Берілген теңдеудің $[0;1]$ аралығында 4 түбірі бар.

1.2.10-мысал

$4\sqrt{2}|x|\left(x^2-1\right)\left(2x^4-4x^2+1\right)=1$ теңдеуінің $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ аралығында қанша түбірі бар?

Шешуі.

Теңдеудің сол жағы тақ функция болғандықтан $\left[0;\sqrt{2}\right]$ аралығындағы түбірлерінің санын анықтасақ жеткілікті.

$x=\sqrt{2}\cos\alpha, \alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ ($x=0$ және $x=\sqrt{2}$ бұл теңдеудің шешімдері бола алмайды). Алмастыру жасау арқылы

$$8\cos\alpha\left(2\cos^2\alpha-1\right)\left(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1\right)=1$$

теңдеуіне келеміз. Теңдеудің сол жағын ықшамдап, $8\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha=1$ теңдеуін аламыз. Бұл теңдеу $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ аралығында мына теңдеумен мәндес: $\sin8\alpha-\sin\alpha=0$. Бұдан $\alpha=\dfrac{2\pi k}{7}, k\in Z$ немесе $\alpha=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2\pi n}{9}, n\in Z$

Бірінші шешімдер жиынынан тек бір түбір, ал екінші шешімдер жиынынан 2 түбір сәйкес келеді. Сонымен $\left[0;\sqrt{2}\right]$ аралығында 3 түбір бар. Демек, $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ аралығында 6 түбір бар.

1.2.11-мысал

$\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ c^2+d^2=16 \\ ad+bc\geq 12 \end{cases}$ жүйесінің (a,b,c,d) барлық шешімдері арасынан $b+d$ өрнегі ең кіші мән қабылдайтындай шешімін таңдап алу керек.

Шешуі.

Алғашқы екі теңдеуге мынадай түрлендіру жасауға болады:

$a=3\cos\alpha,\ b=3\sin\alpha,\ c=4\cos\beta, d=4\sin\beta,$ мұндағы $\alpha\in(0;2\pi], \beta\in(0;2\pi]$.

Онда жүйедегі теңсіздік мына түрге келеді:

$$12\cos\alpha\sin\beta+12\cos\beta\sin\alpha\geq 12, \text{ яғни } \sin(\alpha+\beta)\geq 1$$

α мен β-ның жататын облыстарын ескере отырып

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ немесе $\alpha+\beta=\dfrac{5\pi}{2}$. Бұдан

$$b+d=3\sin\alpha+4\sin\beta=3\cos\beta+4\sin\beta=$$

$$5\left(\frac{3}{5}\cos\beta+\frac{4}{5}\sin\beta\right)=5\sin(\varphi+\beta)$$

Мұндағы $\sin\varphi=\dfrac{3}{5},\ \cos\varphi=\dfrac{4}{5}$.

Олай болса, $b+d\geq-5$. Бұған қарап, $b+d$-ның ең кіші мәні -5-ке тең деп бірден қорытынды жасауға болмайды. Міндетті түрде $b+d=-5$ орындалатындай b мен d мәндері табылатынын көрсету керек.

Расында да $\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$ және $\sin\beta=-\dfrac{4}{5}$ болғанда

$b+d=3\cos\beta+4\sin\beta=-5$ теңдігін аламыз.

Демек, $\sin\alpha=\cos\beta=-\dfrac{3}{5},\ \cos\alpha=\sin\beta=-\dfrac{4}{5}$

Жауабы: (a,b,c,d): $\left(\frac{12}{5};-\frac{9}{5};-\frac{12}{5};-\frac{16}{5}\right)$.

1.2.12-мысал

x, y кез келген нақты сандары үшін $-\frac{1}{2} \le \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \le \frac{1}{2}$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдеу керек.

Шешуі.

Есептің шартында x пен y-ке ешқандай шектеу берілмеген. Мұндай жағдайда мынадай алмастыру жасаған тиімдірек:

$x = tg\alpha, y = tg\beta$, мұндағы $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(tg\alpha + tg\beta)(1-tg\alpha\, tg\beta)}{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)} =$$

$$= \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\sin 2(a+\beta)$$

Осыдан барып дәлелдеу керек теңсіздігіміздің орынды екені көрінеді.

1.2.13-мысал

$1 \le x^2 + y^2 \le 2$ екені белгілі болса, $z = x^2 + xy + y^2$ өрнегінің ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтау керек.

Шешуі.

Кез келген $x \in R, y \in R$ үшін $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$ теңдігі орындалатындай $r \in R, \alpha \in (0;2\pi]$ сандары табылады. Есептің шартынан $1 \le r^2 \le 2,\ z = r^2\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$ теңдіктерін алуға болады. Бірақ $\frac{1}{2} \le 1 + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \le \frac{3}{2}$. Демек, $\frac{1}{2} \le z \le 3$. Егер $x = y = 1$ болса, онда $z = 3$, ал егер $x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ болса, онда $z = \frac{1}{2}$.

Жауабы: $\min z = \frac{1}{2}, \max z = 3$.

1.2.14-мысал

$\frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2}$ өрнегінің ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтау керек.

Шешуі.

$x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha; r \in R, r \ne 0, \alpha \in (0;2\pi]$ болсын. Онда

$$A=\frac{3xy-4x^2}{x^2+y^2}=\frac{3r^2\sin\alpha\cos\alpha-4r^2\cos^2\alpha}{r^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}=\frac{3}{2}\sin 2\alpha-4\cos^2\alpha=$$
$$=\frac{3}{2}\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha-2=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\sin 2\alpha-\frac{4}{5}\cos 2\alpha\right)-2=\frac{5}{2}\sin(2\alpha-\varphi)-2$$

теңдігін аламыз, мұндағы $\cos\varphi=\frac{3}{5},\sin\varphi=\frac{4}{5}$. Демек $-\frac{9}{2}\le A\le\frac{1}{2}$. $A=-\frac{9}{2}$ және $A=\frac{1}{2}$ болатындай α-ның мәндері табылатынын оңай көрсетуге болады. Ол үшін $\frac{3}{2}\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha=-\frac{5}{2}$ және $\frac{3}{2}\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha=\frac{5}{2}$ теңдеулерінің шешімі болатынын көрсету жеткілікті.

Жауабы: $\min A=-\frac{9}{2}$, $\max A=\frac{1}{2}$.

1.2.15-мысал

$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ac}=\frac{a-b}{1+ab}\cdot\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ac}$ теңбе-теңдігін дәлелдеу керек.

Шешуі.

α,β,γ - $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аралығында жатады деп алып $a=tg\alpha, b=tg\beta, c=tg\gamma$ алмастыруын жүргіземіз. Дәлелдеу керек теңбе-теңдігіміз мына түрге келеді:

$$tg(\alpha-\beta)+tg(\beta-\gamma)+tg(\gamma-\alpha)=tg(\alpha-\beta)\cdot tg(\beta-\gamma)\cdot tg(\gamma-\alpha)$$
$$tg(\alpha-\beta)+tg(\beta-\gamma)+tg(\gamma-\alpha)=tg(\alpha-\gamma)(1-tg(\alpha-\beta)tg(\beta-\gamma))+$$
$$+tg(\gamma-\alpha)=tg(\alpha-\beta)tg(\beta-\gamma)tg(\gamma-\alpha)$$

1.2.16-мысал

$f(t)=\sqrt{1+t^2}-t$ болсын. x,y,z оң сандары үшін $xy+yz+zx=1$ теңдігі орындалса, $f(x)f(y)+f(y)f(z)+f(z)f(x)$ өрнегінің мәнін табу керек.

Шешуі.

α,β,γ - сүйір бұрыштар деп қарастырып мынадай алмастыру жасау керек: $x=ctg\alpha, y=ctg\beta, z=ctg\gamma$. Есептің шартынан $ctg\alpha\, ctg\beta+ctg\beta\, ctg\gamma+ctg\gamma\, ctg\alpha=1$ немесе $tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma$ теңдігін алуға болады.

α,β,γ – үшбұрыштың ішкі бұрыштары болатынын көрсетейік.

Расында да

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma=0,$$
$$tg\alpha+tg\beta+tg(1-tg\alpha\, tg\beta)=0$$

α,β,γ – бұрыштары сүйір болғандықтан

$$(tg\alpha+tg\beta)tg\gamma\neq 0$$

Бұдан

$$\frac{1}{tg\gamma}+\frac{1-tg\alpha\, tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}=0$$
$$ctg(\alpha+\beta)+ctg\gamma=0$$
$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma}=0,$$
$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

Олай болса, бұрыштардың сүйір екенін ескере отырып $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ теңдігін алуға болады.

$f(x)=\sqrt{1+ctg^2\alpha}-ctg\alpha=\frac{1}{|\sin\alpha|}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \sin\alpha>0$ болғандықтан

$f(x)=tg\frac{\alpha}{2}$. Сол сияқты $f(y)=tg\frac{\beta}{2}, f(z)=tg\frac{\gamma}{2}$

$$f(x)f(y)+f(y)f(z)+f(z)f(x)=tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\alpha}{2}=$$
$$tg\frac{\alpha}{2}\left(tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\right)+tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\alpha}{2}=tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\left(1-tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}\right)+$$
$$+tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\alpha}{2}=tg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1-tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}\right)+tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\beta}{2}=1$$

Жауабы: 1.

1.2.17-мысал

a,b,c оң сандары үшін $abc=a+b+c$ теңдігі орындалатын болса, $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}=1$ теңбе-теңдігін дәлелдеу керек.

Шешуі.

α,β,γ сүйір бұрыштар деп алып $a=tg\alpha, b=tg\beta, c=tg\gamma$ алмастыруларын енгізейік. Онда $tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma$ теңдігін аламыз. Алдыңғы есептегідей $\alpha,\beta,\gamma-$ бұрыштары үшбұрыштың ішкі бұрыштары болады. Олай болса, дәлелдеу керек теңбе-теңдігіміз мына түрге келеді:

$$\frac{1}{1+tg^2\alpha}+\frac{1}{tg^2\beta}+\frac{1}{tg^2\gamma}+2\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}=1 \text{ немесе}$$
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1=\frac{1+\cos2\alpha}{2}+\frac{1+\cos2\beta}{2}+\cos^2\gamma-1=$$
$$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))=$$
$$2\cos(\pi-\gamma)\cos\alpha\cos\beta=-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

1.2.18-мысал

Кез келген 13 санның ішінен

$0<\dfrac{x-y}{1+xy}<\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ теңсіздігі орындалатындай 2 сан табылатынын дәлелдеу керек.

Шешуі.

$a_1, a_2, \ldots, a_{13}-$ есептің шартында берілген сандар. $a_i = tg\alpha_i, \alpha_i \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right), i=1,2,\ldots,13$ болсын. $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$аралығын теңдей 12 бөлікке бөлеміз. Онда 13 бұрыштың ішінен $0<\alpha_m-\alpha_n<\dfrac{\pi}{2}$ орындалатындай α_m және α_n сандары табылатынын көрсету жеткілікті. Бұдан $0<tg(\alpha_m-\alpha_n)<tg\dfrac{\pi}{2}$. $tg\alpha_m = x, tg\alpha_n = y$ деп белгілеп

$0<\dfrac{x-y}{1+xy}<tg\dfrac{\pi}{12}$. Мұнда $tg\dfrac{\pi}{12}=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$.

1.3. Алгебраның есептерін векторлардың көмегімен шешу

1.3.1-мысал

a,b,c,d сандары мына шарттарды $a^2+b^2=1, c^2+d^2=1$ қанағаттандыратын болса, $|ac-bd|\le 1$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі.

$\vec{m}=\left(\overline{x_1,y_1,z_1}\right)$ және $\vec{n}=\left(\overline{x_2,y_2,z_2}\right)$ екі векторды қарастырайық. Бұл векторлар үшін $|\vec{m}\cdot\vec{n}|\le|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|$ немесе координаталық түрде

$|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|\le\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$ теңсіздіктері орындалатыны айқын. $\vec{m}$ мен $\vec{n}$ коллинеарлы болғанда теңсіздік теңдікке айналады.

$\vec{m}=\left(\overline{a,b}\right)$ және $\vec{n}=\left(\overline{c,-d}\right)$ болсын. Онда есептің шартына сәйкес

$$|\vec{m}|=\sqrt{a^2+b^2}=1, |\vec{n}|=\sqrt{c^2+d^2}=1$$

Бұдан басқа $\vec{m}\cdot\vec{n}=ac-b$. Олай болса,

$$|ac-bd|=|\vec{m}\cdot\vec{n}|\le|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|=1$$

1.3.2-мысал

a,b,c оң сандары үшін

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ac}}$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі.

$$\vec{m}=\left(\overline{\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{c}}}\right) \text{ және } \vec{n}=\left(\overline{\frac{1}{\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{c}},\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)$$

Онда $\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$ және $\vec{m}\cdot\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ac}}$ екенін көру қиын емес.

Соңғы теңдікті ескере отырып, $\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ теңсіздігін алуға болады.

1.3.3-мысал

a,b,c оң сандары үшін $\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\left(a+b+c\right)^2$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі.

Берілген есепте $\vec{m}$ мен $\vec{n}$ векторлары үшін координаталық орын тағайындау қиынға түседі.

$\vec{m}=\left(\overline{a\sqrt{a},b\sqrt{b},c\sqrt{c}}\right)$, $\vec{n}=\left(\overline{\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{c}}}\right)$ болсын.

Онда $|\vec{m}|=\sqrt{a^3+b^3+c^3}$, $|\vec{n}|=\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ және $\vec{m}\cdot\vec{n}=a+b+c$

Енді теңсіздікті жазайық: $a+b+c\le\sqrt{a^3+b^3+c^3}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. Теңсіздіктің екі жағын квадраттасақ дәлелдеу керек теңсіздігіміз шығады.

1.3.4-мысал

Кез келген x,y,z үшін $\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\le 1$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі.

$\vec{n}=\left(\overline{\sin x,\cos x}\right)$, $\vec{m}=\left(\overline{\sin y\sin z,\cos y\cos z}\right)$ векторларын алайық. Онда теңсіздіктің сол жағы $\vec{m}$ мен $\vec{n}$-нің көбейтіндісін береді.

$\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\le\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}\sqrt{\sin^2 y\sin^2 z+\cos^2 y\cos^2 z}=$

$\sqrt{\sin^2 y\sin^2 z+\cos^2 y\cos^2 z}$

Енді $\sin^2 y\sin^2 z\le\sin^2 z$ және $\cos^2 y\cos^2 z\le\cos^2 z$ теңсіздігі орындалатыны белгілі болды. Осы теңсіздіктердің сәйкес жақтарын қоссақ, дәлелдеу керек теңсіздігіміз шығады.

1.3.5-мысал

$2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x+24\right)}$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

$\vec{m}=\left(\overline{2,x}\right)$ және $\vec{n}=\left(\overline{\sqrt{x-1},5}\right)$ векторларын енгіземіз. Сонда теңдіктің сол және оң жақтары $\vec{m}\cdot\vec{n}=2\sqrt{x-1}+5x\le|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|=\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x+24\right)}$ түріне келеді.

$\vec{m}$ мен $\vec{n}$ векторлары коллинеарлы болғанда ғана теңсіздік теңдікке айналатынын ескере отырып, теңдеудің түбірлерін $\frac{\sqrt{x-1}}{2}=\frac{5}{x}$ теңдеуінің түбірлерінің ішінен іздеу керек. Бұл теңдеудің түбірі $x = 5$. Берілген теңдеуге қойып тексегенде теңдік орындалады. Демек, жауабы: $x = 5$.

1.3.6-мысал

x, y, z сандары үшін мына шарт $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$ орындалса, $2x + y - z$ өрнегінің ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтау керек.

Шешуі.

$2x + y - z$ өрнегі үшін вектордың координаталарының модулі $\sqrt{x^2 + 3y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ болатындай нүктелермен берілуі тиіс.

$\vec{m} = \left(\overline{x, y\sqrt{3}, z}\right)$ және $\vec{n} = \left(\overline{2; \frac{1}{\sqrt{3}}; -1}\right)$ векторларын қарастырайық. Онда

$$|2x + y - z| \le \sqrt{x^2 + 3y^2 + z^2}$$

$$\sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + (-1)^2} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Демек, $2x + y - z \le 4\sqrt{\frac{2}{3}}$ және $2x + y - z \ge -4\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Өрнектің ең үлкен және ең кіші мәнге ұмтылдыратын айнымалыларының мәндерін табу үшін $\vec{m}$ мен $\vec{n}$ векторларының коллинеарлығын және $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$ шартын пайдалану керек, яғни мына жүйені шешу керек:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = 3y = -z \\ x^2 + 3y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

Жауабы: $\min(2x + y - z) = -4\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\max(2x + y - z) = 4\sqrt{\frac{2}{3}}$.

1.3.7-мысал

$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

Теңдеудің сол жағы мен оң жағын бағалайық:

$x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \ge 2$

$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 1\sqrt{x-2} + 1\sqrt{4-x} \le \sqrt{1^2 + 1^2}\sqrt{x-2+4-x} = 2$

Мұнда: $\vec{n} = (\overline{1;1})$, $\vec{m} = \left(\sqrt{x-2}, \sqrt{4-x}\right)$ векторларын қарастыру керек. Сонда бастапқы теңдеу

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 11 = 2 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2 \end{cases}$$

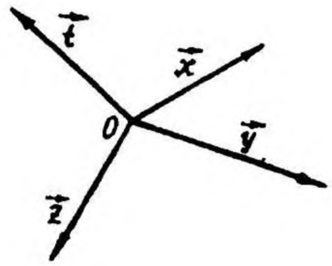
теңдеулер жүйесімен мәндес болады.

Жауабы: $x = 3$.

1.3.8-мысал

a, b, c, d, e, f, g, h сегіз нақты сан берілген. Мына $ac + bd, ae + bf, ag + bh, ce + df, cg + dh, cg + fh$ алты санның кемінде біреуі теріс емес болатынын дәлелдеу керек.

Шешуі.



Бастары ортақ болатын $\vec{x} = (\overline{a,b}), \vec{y} = (\overline{c,d}), \vec{z} = (\overline{e,f})$ және $\vec{t} = (\overline{g,h})$ векторларын қарастырайық. Берілген алты санның да теріс болуы дегенді: мына алты бұрыштың да $\angle(\vec{x}\vec{y}), \angle(\vec{x}\vec{z}), \angle(\vec{x}\vec{t}), \angle(\vec{y}\vec{z}), \angle(\vec{y}\vec{t}), \angle(\vec{z}\vec{t})$ доғал болуымен түсіндіруге болады. Ондай болуы мүмкін емес.

1.3.9-мысал

Кез келген $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ үшін

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}$$

теңсіздігі орындалатынын дәлелдеу керек.

Шешуі.

$\vec{x}_1 = (\overline{a_1, b_1}), \vec{x}_2 = (\overline{a_2, b_2}), \ldots, \vec{x}_n = (\overline{a_n, b_n})$ болатындай $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ векторлары табылсын. Онда дәлелдеу керек теңсіздікті мына түрде жазуға болады:

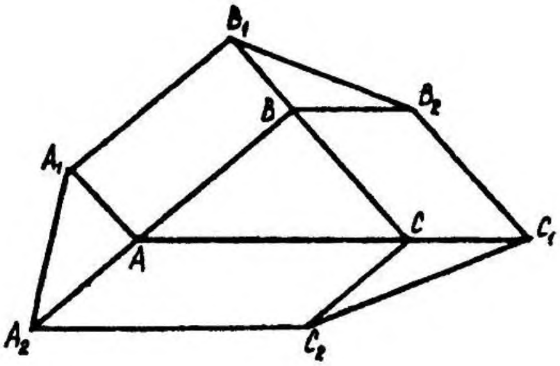
$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq \left| \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i \right|$. Яғни n векторлардың модульдерінің қосындысы осы векторлардың қосындыларының модулімен кем болмайды. Теңсіздік векторлар қарама-қарсы орналасқан жағдайда теңдікке айналатынын айта кеткен жөн.

1.3.10-мысал

ABC үшбұрышының сыртына қабырғалары ортақ болатын $AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A$ параллелограмдары салынған. A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 кесінділері бір үшбұрыштың қабырғалары болуы мүмкін бе?

Шешуі.

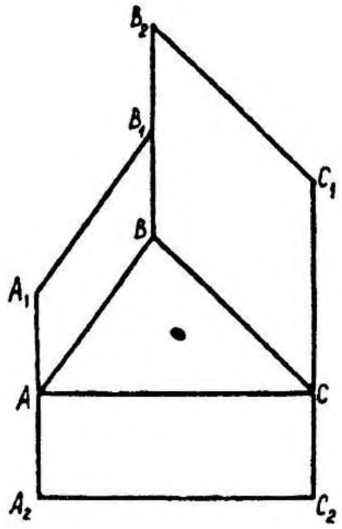
$\overline{A_2A_1} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = \vec{0}$ болатынын көрсетейік.



Расында да $\overline{A_2A_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1B_2} + \overline{B_2C_1} + \overline{C_1C_2} + \overline{C_2A_2} = \vec{0}$. Бұдан басқа

$$\overline{A_1B_1} + \overline{B_2C_1} + \overline{C_2A_2} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}$$

Демек, берілген кесінділер үшбұрыштың қабырғалары бола алмайды. Есептің шешімі осымен бітті деуге болмайды, егер A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 векторлары коллинеарлы болуы мүмкін:



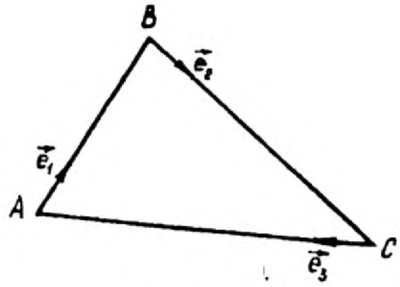
Бұл жағдайда қарастырылып отырған екі кесіндінің ұзындықтарының қосындысы үшіншісіне тең болады. Ал ондай үшбұрыш болуы мүмкін емес.

1.3.11-мысал

A,B,C – үшбұрыштың ішкі бұрыштары болса, $\cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі.

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – AB,BC және CA қабырғаларына коллинеарлы бірлік векторлар болсын.



Мына теңсіздікті қарастырайық: $(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)^2 \geq 0$ немесе

$$\vec{e}_1^{\,2}+\vec{e}_2^{\,2}+\vec{e}_3^{\,2}+2(\vec{e}_1\vec{e}_2+\vec{e}_1\vec{e}_3+\vec{e}_2\vec{e}_3)\geq 0$$

$$3-2(\cos B+\cos C+\cos A)\geq 0$$

Бұдан дәлелдеу керек теңсіздік шығады.

1.3.12-мысал

A,B,C – үшбұрыштың ішкі бұрыштары болса,

$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C \geq -\frac{3}{2}$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі.

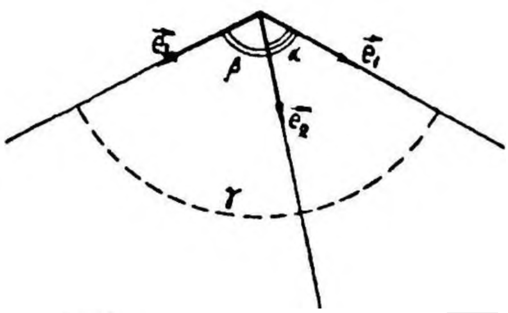
O – ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі болсын. Онда $\angle AOB = 2\angle C, \angle BOC = 2\angle A, \angle AOC = 2\angle B$(егер ABC –доғал бұрышты, мысалы A бұрышы доғал болса, онда $\angle BOC = 360-2\angle A$. Мына теңсіздікті қарастырайық: $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2 \geq 0$. Бұдан $2R^2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\geq 0$, мұндағы R– сырттай сызылған шеңбердің радиусы. Әрі қарай $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C \geq -\frac{3}{2}$ теңсіздігін аламыз.

1.3.13-мысал

α,β,γ – қандайда бір үшжақты бұрыштың бұрыштары болсын. Онда $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \geq -\frac{3}{2}$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі.

Үшжақты бұрыштың қырларынан $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ векторларын аламыз.



Мынадай айқын төрт теңдікті жазайық: $2\cos\alpha = 2\overline{e_1e_2}$, $2\cos\beta = 2\overline{e_2e_3}$, $2\cos\gamma = 2\overline{e_3e_1}$, $3=\vec{e}_1^{\,2}+\vec{e}_2^{\,2}+\vec{e}_3^{\,2}$. Соңғы теңдіктерді біріктіре отырып

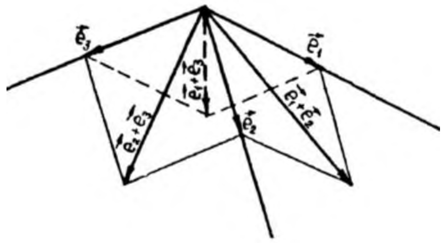
$3 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 > 0$. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлары компланар емес болғандықтан $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geq -\frac{3}{2}$.

1.3.14-мысал

Үшжақты бұрыштың екіжақты бұрыштарының биссектрисаларының арасындағы бұрыштар не бірыңғай сүйір,не бірыңғай тік, не бірыңғай доғал болатынын дәлелдеу керек.

Шешуі.

Үшжақты бұрыштың қырларына $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторларын енгізейік



Онда $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_3 + \vec{e}_1$ векторлары α, β, γ екіжақты бұрыштарының биссектрисаларына сәйкесінше коллинеарлы болады.

Аталған векторлардың қос-қостан көбейтіндісін қарастырайық:

$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_1\vec{e}_3 + 1,$$

$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)(\vec{e}_3 + \vec{e}_1) = \vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_2\vec{e}_1 + 1,$$

$$(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = \vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1 + 1$$

Үш скаляр көбейтіндінің де таңбалары бірдей болғандықтан,

$$\angle((\vec{e}_1 + \vec{e}_2)(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)),$$

$$\angle((\vec{e}_1 + \vec{e}_2)(\vec{e}_3 + \vec{e}_1)),$$

$$\angle((\vec{e}_2 + \vec{e}_3)(\vec{e}_1 + \vec{e}_3))$$

бұрыштары бірыңғай сүйір, не бірыңғай тік, не бірыңғай доғал бола алады.

1.4. Алгебралық есептерді квадрат үшмүшелердің қасиетін пайдаланып шешу

1.4.1-мысал

$4\cos^4\frac{x}{4} = \cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{4}\cos 2x$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

Берілген теңдеуді мына түрге келтіреміз:

$$4\cos^4\frac{x}{4} = 2\cos^2\frac{x}{4} - 1 + 2\cos^2\frac{x}{4}\cos 2x,$$

$$4\cos^4\frac{x}{4} - 2\cos^2\frac{x}{4}(1 + \cos 2x) + 1 = 0$$

Енді берілген теңдеу $\cos^2 \frac{x}{2}$-ге тәуелді екені белгілі болды, $\frac{1}{4}D = (1+\cos 2x)^2 - 4$. Демек, $(1+\cos 2x)^2 \le 4$ болғандықтан $\cos 2x = 1$ болғанда ғана теңдеудің шешімі бар. Сондықтан берілген теңдеу мына теңдеулер жүйесімен мәндес:

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ 4\cos^4 \frac{x}{4} - 4\cos^2 \frac{x}{4} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ 2\cos^2 \frac{x}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos \frac{x}{2} = 0. \end{cases}$$

Жауабы: $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

1.4.2-мысал

$z \ge 0$ шартын қанағаттандыратындай теңдеулер жүйесінің барлық шешімін табу керек:

$$\begin{cases} (x+3)^3 = 3 - 2y \\ z^2 + 4y^2 = 8y \\ (2z - x)(x+3) = 5x + 16 \end{cases}$$

Шешуі.

Егер жүйенің екінші теңдеуін y айнымалысына тәуелді деп қарастырсақ, онда оның дискриминанты $64 - 16z^2$ болады. $64 - 16z^2 \ge 0$ болсын деп $|z| \le 2$ теңсіздігін аламыз. $z \ge 0$ екенін ескеріп, $0 \le z \le 2$ деп жазайық.

Жүйенің үшінші теңдеуін х-тен тәуелді деп алайық. Сонда

$$x^2 - 2x(z-4) - 6z - 16 = 0, \frac{1}{4}D = (z-4)^2 + 6z - 16 \ge 0$$

Бұдан $z \ge 0$ екенін ескерін, $z = 0$ немесе $z \ge 0$ аламыз. Нәтижелерді салыстыра отырып, мынадай қорытынды жасаймыз: $z = 0$ немесе $z = 0$. Табылған мәндерді жүйеге қоя отырып, жауабын оңай табуға болады.

Жауабы: $(-4;2;0), (-2;1;2)$.

1.4.3-мысал

xy жазықтығында $y = x^2 - 4px + 2p^2 - 3$ қисықтар шоғырынан өтпейтін барлық нүктелерді көрсету керек, мұндағы $p -$параметр.

Шешуі.

Егер (x_0, y_0)- берілген қисықтар шоғырынан өтпейтін нүкте болса, онда оның координатасы берілген теңдеуді қанағаттандырмауы керек. Олай болса, теңдеудің шешімі болмайтындай x пен y-тің мәндерін анықтау керек. Бұл теңдеуді x пен y-тен емес, p-дан тәуелді деп алу керек. Сонда берілген теңдеу мына түрге келеді: $2p^2 - 4px + x^2 - y - 3 = 0$. Дискриминант $D = 8x^2 + 8y + 24$ теріс болу керек. Бұдан $y < -x^2 - 3$ аламыз. Демек, берілген қисықтар шоғырынан өтпейтін нүктелер $y = -x^2 - 3$ параболасының төменгі жағында жатады.

1.4.4-мысал.

Координаталық жазықтықтың қандай бөлігі $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 2 + a^2$ түріндегі барлық мүмкін болатын шеңберлермен жабылған?

Шешуі.

$$x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2ay + a^2 \le 2 + a^2,$$

$$a^2 - 2a(x+y) + x^2 + y^2 - 2 \le 0$$

a-ға тәуелді соңғы теңсіздіктің ең болмағанда бір шешімі болу керек. Мұндай шарт дискриминант теріс болағанда орындалады. $\frac{1}{4}D = (x+y)^2 - (x^2 + y^2 - 2) \ge 0$ деп жазайық. Бұдан $xy \ge -1$. Демек, шеңберлер шоғыры $y = -\frac{1}{x}$ гиперболасы тармағының бойын толтырады.

1.4.5-мысал.

$x^{12} - abx + a^2 = 0$ теңдеуі түбірлерінің біреуі 2-ден үлкен. $|b| > 64$ екенін дәлелдеу керек.

Шешуі.

x_0 - есеп шартында айтылған түбір болсын, яғни $x_0 > 2$.

$$a^2 - abx_0 + x_0^{12} = 0,$$

$$D(a) = b^2 x_0^2 - 4x_0^{12} \ge 0$$

Бұдан $b^2 \ge 4x_0^{10}, |b| \ge 2x_0^5 > 64$.

1.4.6-мысал.

$\sqrt{5-x} = x^2 - 5$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

Берілген теңдеу мына жүйемен мәндес:

$$\begin{cases} 5 - x = (x^2 - 5)^2 \\ x^2 \ge 5 \end{cases}$$

Берілген теңдеуді 5-тен тәуелді квадрат үшмүшелік түрінде көрсетейік:

$$5^2-5\left(1+2x^2\right)+x+x^4=0$$

Бұдан

$$\left[\begin{array}{l} 5=\dfrac{\left(1+2x^2\right)+\left(1-2x\right)}{2} \\ 5=\dfrac{\left(1+2x^2\right)-\left(1-2x\right)}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x-4=0 \\ x^2+x-5=0 \end{array}\right.$$

Барлық түбірлердің ішінен жауабын қанағаттандыратындары мыналар: $x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$ және $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

1.4.7-мысал

$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

Берілген теңдеуді $\sqrt{2}$-ден тәуелді теп қарастырамыз. Сонда

$$\left(\sqrt{2}\right)^2-x^2\sqrt{2}+x^3-x^2=0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2}=\dfrac{x^2+\left(x^2-2x\right)}{2} \\ \sqrt{2}=\dfrac{x^2-\left(x^2-2x\right)}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x-\sqrt{2}=0 \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Жауабы: $x=\sqrt{2}$ немесе $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$.

1.4.8-мысал

$x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

Берілген теңдеуді $\sqrt{3}$-тен тәуелді деп қарастырамыз. Сонда

$$\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(2x^2+1\right)\sqrt{3}+x^4+x=0.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}=\dfrac{2x^2+1+(2x-1)}{2}\\ \sqrt{3}=\dfrac{2x^2+1-(2x-1)}{2}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x^2+x-\sqrt{3}=0\\ x^2-x+1-\sqrt{2}=0\end{array}\right.$$

Жауабы: $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$ немесе $x=\dfrac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$.

1.4.9-мысал.

$(a+b+c)c<0$ болатындай a,b,c сандары берілген. $b^2>4ac$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі.

a мен b бір уақытта нөлге тең бола алмайды. Егер $a=0$ болса, онда теңсіздік орындалатыны айқын. $a\neq 0$ жағдайына тоқталып өтейік. Ол үшін $f(x)=ax^2+bx+c$ функциясын қарастырайық. Есептің шартынан $f(1)f(0)<0$ екені шығады. Ол үшін f параболасы абцисса осін екі нүктеде қиып өтуі жеткілікті. Олай болса, берілген үшмүшенің дискриминанты нөлден үлкен болуы керек, яғни $b^2>4ac$.

1.4.10-мысал

a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 оң сандары $b_1^2\le 4a_1c_1, b_2^2\le 4a_2c_2$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын болса, $4(a_1+a_2+7)(c_1+c_2+2)>(b_1+b_2+1)^2$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

Шешуі.

$a_1x^2+b_1x+c_1$ және $a_2x^2+b_2x+c_2$ үшмүшелерін қарастырамыз. Бұл үшмүшеліктердің дискриминанттары теріс, ал коэффициенттері оң, олай болса, кез келген x үшін $a_1x^2+b_1x+c_1\ge 0$, $a_2x^2+b_2x+c_2\ge 0$. Сол сияқты барлық x-тер үшін $7x^2+x+2>0$. Соңғы үш теңсіздікті біріктіре отырып, $(a_1+a_2+7)x^2+(b_1+b_2+1)x+c_1+c_2+2>0$ теңсіздігін аламыз. Бұл теңсіздік кез келген x үшін квадрат үшмүшенің дискриминанты теріс болғанда орындалады, яғни $4(a_1+a_2+7)(c_1+c_2+2)>(b_1+b_2+1)^2$.

1.5. Алгебралық есептерді функцияның қасиетін пайдаланып шешу

1.5.1-мысал

$5^x - 3^x = 16$ теңдеуін шешуі керек.

Шешуі.

$x = 2$ $-$теңдеудің түбірі екенін бірден аңғаруға болады. Бұл түбірдің жалғыз болатынын көрсетейік. Берілген теңдеуді мына түрде жазамыз: $\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1 = \frac{16}{3^x}$

Теңдеудің сол жағы өспелі функцияны, ал оң жағы кемімелі функцияны береді. Мұндай теңдеулердің бірден артық түбірі болмайды. A

Жауабы: $x = 2.$

1.5.2-мысал

$4 \cdot 3^{3x+1} + 4 = 5 \cdot 2^{9x}$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

Теңдеуді түрлендіре отырып, осыған мәндес теңдеуге келеміз: $12 \cdot 3^{3x} + 4 = 5 \cdot 8^{3x}$, $12 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{3x} + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{3x} = 5.$ $x = \frac{1}{3} -$ теңдеудің түбірі екені айқын. Соңғы теңдеудің сол жағы кемімелі функция, ал сол жағы константа, олай болса, теңдеудің жалғыз ғана түбірі бар.

Жауабы: $x = \frac{1}{3}.$

1.5.3-мысал

$\left(\sqrt{3}\right)^x - 2^{x-1} = 1$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

$f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x - 2^{x-1} - 1$ функциясын қарастырамыз. Оның туындысы $f'(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x \ln\sqrt{3} - 2^{x-1}\ln 2.$ f функциясының кризистік нүктелерін анықтаймыз: $f'(x) = 0,$ яғни $\left(\sqrt{3}\right)^x \ln 3 = 2^x \ln 2,$ $x = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\log_3 2\right).$

$x_0 = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\log_3 2\right)$ болғанда $(-\infty;\, x_0]$ аралығында өседі, $[x_0;\, \infty)$ аралығында кемиді , Демек, берілген теңдеудің екіден артық түбірлері жоқ, $x = 2$ және $x = 4$ екенін бірден айтуға болады. **Жауабы:** $x = 2$ және $x = 4.$

1.5.4-мысал

$\begin{cases} x + \sqrt[6]{x} = y + \sqrt[6]{y}, \\ x^2 + xy + y^2 = 27. \end{cases}$ жүйесін шешу керек.

Шешуі.

$f(t) = t + \sqrt[6]{t}$ $-$ функциясы өспелі. Онда бірінші теңдеуден $x = y$ екендігі шығады. Бұдан $3x^2 = 27.$ $x \geq 0$ болғандықтан $x = 3$ аламыз.. **Жауабы:** $(3;\, 3).$

1.5.5-мысал

$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=\log_3\dfrac{y}{x}, \\ 2^{x+2}+8^x=5\cdot 4^y. \end{cases}$ жүйесін шешу керек.

Шешуі.

Жүйенің бірінші теңдеуін мына түрде жазайық: $\sqrt{x}+\log_3 x=\sqrt{y}+\log_3 y.$ $f(t)=\sqrt{t}+\log_3 t$ $-$функциясы өспелі, сондықтан $x=y$ теңдігі орындалады. Ал екінші теңдеуді мына түрде жазайық: $2^{x+2}+2^{3x}=5\cdot 2^{2x}.$ Бұдан $2^{2x}-5\cdot 2^x+4=0,$ $2^x=1$ немесе $2^x=4,$ $x=0$ немесе $x=2.$ $x>0$ болғандықтан $x=2$ түбірі ғана сәйкес келеді.

Жауабы: $(2;\,2).$

1.5.6-мысал

$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)-3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

$f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$ функциясын қарастырайық. $f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0$ - функция өспелі. Берілген теңдеуді мына түрде жазайық:

$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)=3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)$ Онда теңдеудің сол жағы - $t=2x+1$ нүктесіндегі, ал оң жағы $t=3x$ нүктесіндегі f $-$функциясының мәндері. f $-$монотонды функция болғандықтан $2x+1=3x$ теңдігі орындалады. Бұдан $x=1$. Жауабы: $x=1$.

1.5.7-мысал

$\begin{cases} \sin y-\sin x=x-y, \\ \sin y-\sin z=z-y, \\ x-y+z=\pi. \end{cases}$ жүйесін шешу керек.

Шешуі.

$f(t)=t+\sin t$ функциясы өспелі, себебі $t=\pi+2\pi k,\ k\in Z$ -ден басқа t-лар үшін өспелі, себебі: $f'(t)=1+\cos t>0$. Онда осы нүктелердің ішінен туындысы оң болатындарын сызып тастасақ, жүйенің бірінші теңдеуінен $x=y=z$ теңдігі шығады. Ал үшінші теңдеуден $-$ $x=y=z=\pi.$

Жауабы: $x=y=z=\pi.$

1.5.8-мысал

$\log_2(5+3\cos 4x)=\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

$5+3\cos 4x \geq 2$ болғандықтан $\log_2(5+3\cos 4x) \geq 1$. бірақ теңдеудің оң жағы 1-ден ауытқымайды.. Олай болса, берілген теңдеу мына жүйемен мәндес:

$$\begin{cases} \log_2(5+3\cos 4x) = 1, \\ \sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \end{cases}$$ мұндағы n және k – нақты сандар.

Жауабы: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

1.5.9-мысал

$2^{|x|} - \cos y + \lg\left(1 + x^2 + |y|\right) = 0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

Мына түрде жазайық: $2^{|x|} + \lg\left(1 + x^2 + |y|\right) = \cos y.$ $x^2 + |y| \geq 0$ екені айқын. Демек, $\lg\left(1 + x^2 + |y|\right) \geq 0$, бірақ $2^{|x|} \geq 1.$Олай болса, теңдеудің сол жағы 1-ден кем емес, ал оң жағы 1-ден артық емес. Сондықтан теңдік мына жағдайда орындалады:

$$\begin{cases} \cos y = 1, \\ |x| = 0, \\ x^2 + |y| = 0. \end{cases}.$$

Жауабы: $x = y = 0.$

1.5.10-мысал

$(x+y)\left(\lg\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right) - \lg 2\right) + \left(x^2+y^2-1\right)^2 = 0.$ теңдігін қанағаттандыратын барлық x пен y -тің мәндерін табу керек.

Шешуі.

$x+y>0$ екені анық. Онда $x+y+\dfrac{1}{x+y} \geq 2,$ демек $\lg\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right) \geq \lg 2.$

Теңдеудің сол жағы екі теріс емес сандардың қосындысынан тұрады, осыны ескеріп, берілген теңдеу мына жүйемен мәндес деп айта аламыз:

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x+y} = 2, \\ x^2+y^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 1, \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

Жауабы: $(0;1),\ (1;0).$

1.5.11-мысал

$\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2=5+\cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

$\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2=\left(2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\right)^2=4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 4.$ Бірақ, $5+\cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)\ge 4.$ Демек, берілген теңдеудің түбірлері мына жүйенің шешімдерімен бірдей:

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)=-1,\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\\ x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\end{cases}$$

мұндағы n және k – нақты сандар.

Жауабы: $x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

1.5.12-мысал

$\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^4 x=2$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

$\cos^5 x+\sin^5 x=2-\sin^4 x$ аламыз. $\cos^5 x\le\cos^2 x,\ \sin^5 x\le\sin^2 x$ болғандықтан $\cos^5 x+\sin^5 x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1.$ Бір жағынан $2-\sin^4 x\ge 1$, сондықтан берілген теңдеу мына жүйемен мәндес:

$$\begin{cases}\sin^5 x+\cos^5 x=1,\\ 2-\sin^4 x=1,\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=-1,\\ \sin^5 x+\cos^5 x=1,\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=1,\\ \sin^5 x+\cos^5 x=1,\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=-1,\\ \cos^5 x=2,\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=1,\\ \cos^5 x=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Жауабы: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.$

1.5.13-мысал

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}\ge 2+x^2,\\ 2^{x+y-4}\le\dfrac{1-(z-x)^2}{1+(4-y)^2}\end{cases}$$ жүйесін шешу керек.

Шешуі.

Бірінші теңсіздіктен $\sqrt{x+y} \geq 2$ екені анық. Яғни, $x+y \geq 4$. Бұлармен қатар теңсіздіктің оң жағы 1-ден асып кетпейді. Демек, $2^{x+y-4} \leq 1$. Бұдан $x+y \leq 4$. Демек, $x+y=4$. Онда жүйенің бірінші теңсіздігі мына түрге келеді: $2 \geq 2+x^2$. Бұдан $x=0,\ y=4,\ z=0$ аламыз.

Жауабы: $x=0,\ y=4,\ z=0$.

1.5.14-мысал

$\begin{cases} 3-(y+1)^2 = \sqrt{x-y}, \\ x+8y = \sqrt{x-y-9}. \end{cases}$ жүйесін шешу керек.

Шешуі.

Жүйенің бірінші теңдеуін мына түрде жазған дұрыс: $-(y+1)^2 = \sqrt{x-y}-3$. Бұдан $\sqrt{x-y}-3 \leq 0$, яғни $0 \leq x-y \leq 9$. Екінші теңдеуден $x-y \geq 9$ екендігі шығады. Олай болса, $x-y=9$. Демек, $9+y+8y=0,\ y=-1$.

Жауабы: $(8;\ -1)$.

1.5.15-мысал

$2x\sin\dfrac{\pi x^2}{x^4+4} + \dfrac{x^2}{2} + 1 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

Берілген теңдеуді x-тен тәуелді квадрат теңдеу деп қарастырамыз. Дискриминанты $D = 4\sin^2\dfrac{\pi x^2}{x^4+4} - 2 \geq 0$. Бұдан $\left|\sin\dfrac{\pi x^2}{x^4+4}\right| \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Бір жағынан

$\left|\sin\dfrac{\pi x^2}{x^4+4}\right| = \left|\sin\dfrac{\pi}{x^2+\dfrac{4}{x^2}}\right| \leq \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Демек, $\left|\sin\dfrac{\pi}{x^2+\dfrac{4}{x^2}}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ал бұл теңдік

$x^2 = \dfrac{4}{x^2}$, болғанда ғана орынды, яғни $x = \pm\sqrt{2}$. $x = -\sqrt{2}$.

Жауабы: $x = -\sqrt{2}$.

1.5.16-мысал

$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі.

Берілген теңдеуді мына түрге келтірейік: $\dfrac{x^3+1}{2} = \sqrt[3]{2x-1}$.

$f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^3+1\right)$ функциясын қарастырайық. Бұл $D(f)$-те монотонды. $g(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ функциясы $f-$ке кері функци екенін көрсету қиын емес. f және $g-$функциялары өспелі болғандықтан ортақ нүктелері $y=x$ түзуінде

жатады.
Сонымен берілген теңдеу мына теңдеумен мәндес:
$\dfrac{x^3+1}{2}=x,\quad x^3-2x+1=0,\quad (x-1)(x^2+x-1)=0.$ **Жауабы:** $x=1,$ немесе $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, немесе $x=\dfrac{-1-+\sqrt{5}}{2}.$

1.5.17-мысал
$\sqrt[3]{x+22}=x^3-6x^2+12x-32$ теңдеуін шешу керек.
Шешуі.
$\sqrt[3]{x+22}=(x-2)^3-24,\quad \sqrt[3]{(x-2)+24}=(x-2)^3-24$ аламыз. $y=\sqrt[3]{t+24}$ және $y=t^3-24$ функциялары өспелі және өзара кері функциялар. Онда берілген теңдеу мына теңдеумен мәндес $(x-2)^3-24=x-2,\quad (x-5)(x^2-x+6)=0.$
Жауабы: $x=5.$

1.5.18-мысал
$\sqrt[3]{3x+9}=27(x+1)^3-6$ теңдеуін шешу керек.
Шешуі.
Жоғарыдағы мысалдағыдай теңдеуді мына түрде жазған дұрыс: $\sqrt[3]{(3x+3)+6}=(3x+3)^3-6.$ теңдеудің оң және сол жақтарындағы функциялардың қасиетін пайдаланып, оған мәндес теңдеуді алуға болады: $(3x+3)^3-6=3x+3,\ (3x+3-2)((3x+3)^2+2(3x+3)+3)=0.$
Жауабы: $x=-\dfrac{1}{3}.$

1.5.19-мысал

$e^x-1=\ln(x+1).$ теңдеуін шешу керек.
Шешуі.
$f(x)=\ln(x+1)$ функциясы анықталған және $D(f)=(-1;\infty)$ аралығында өспелі. Бұл аралықта $g(x)=e^x-1$ функциясы f функциясына кері функция. Олай болса, берілген теңдеу мына жүйемен мәндес: $\begin{cases} e^x-1=x, \\ x>-1. \end{cases}$
$h(x)=e^x-x-1$ функциясын қарастырайық. Ол анықталған және R-де дифференциалданады: $h'(x)=e^x-1.$ туындысына қарап, $h(x)$ $(-\infty;0]$ аралығында өспелі, $[0;\infty)$ аралығында кемімелі екенін көруге болады, $x=0$ – минимум нүктесі. Онда кез келген x үшін $f(x)\geq f(0)=0.$ $x=0.$ Функция бір ғана нүктеде 0-ге тең болып тұр, теңдеудің жалғыз түбірі бар.
Жауабы: $x=0.$

1.6. Пәнішілік байланыста туындының көмегімен шешілетін есептердің тақырыптары мен мысалдары

Орта мектептегі математика пәнінің бағдарламасына туынды, интеграл ұғымдары енгізілгеннен бері математиктер, әдіскерлер мен тікелей сабақ беретін мұғалімдер арасында кең көлемді ұсыныстар, ұстанымдар үнемі талқыланып келеді. Себебі, математикалық анализ элементтерін тиімді құрылымы мен мазмұнын қалыптастыру, оны оқушыларға үйретудің әдістемесін айқындау, практикалық және қолданбалы тұстарын жетілдіру күн тәртібінен түскен емес. Дифференциалдық және интегралдық есептеулердің алғашқы ұғымы болғандықтан туынды математикалық анализ элементтерінің негізгісі болып табылады. Қазіргі қолданыстағы бағдарлама бойынша, барлық бағыттағы орта білім беруде, оқушылар 10-сыныпта «Функция шегі және туынды» тарауында туынды ұғымымен танысады.

Туынды ұғымы жоғары сыныптардағы математиканың «Алгебра және анализ бастамалары» тарауындағы басты тақырыптардың бірі болғандықтан, оның пәнішілік байланысы, қолданбалылығы мен практикалық мазмұны ерекше орын алады.

Төменде туындының көмегімен шешілетін мектеп математика курсындағы негізгі есептердің тақырыптарын келтірейік:

- Функцияның графигіне жүргізілген жанаманың теңдеуін құру;
- Қиылысқан түзулер арасындағы және функциялардың графиктері арасындағы бұрышты табу;
- Функцияны зерттеу және графигін салу;
- Алгебралық өрнектерді түрлендіру;
- Көпмүшеліктерді көбейткіштерге жіктеу;
- Теңбе-теңдіктерді дәлелдеу;
- Қосындыны табу;
- Теңдеулерді шешу;
- Жуықтап есептеу және қателіктерді бағалау;
- Теңсіздіктерді дәлелдеу;
- Теңдеулер жүйесін шешу;
- Параметрлі есептерді шешу;
- Теңдеудің еселі түбірлері мен санын табу;
- Шамаларды салыстыру;
- Функцияның периодын табу;
- Лопиталь ережесі арқылы функцияның шегін табу;
- Функцияның ең үлкен және ең кіші мәнін табу;

Енді бірнеше мысалдарды қарастырайық.

1.6.1-мысал. Функцияның дифференциалы ұғымын пайдаланып, $y = x^3 - 7x^2 + 80$ функциясының $x = 5$-тен $x = 5{,}01$-ге дейін өзгергендегі өзгерісінің жуық шамасын табыңдар.

Шешуі:

$$\Delta y \approx dy = y'\Delta x$$
$$x = 5, \quad \Delta x = 0{,}01$$
$$\Delta y \approx \left(3x^2 - 14x\right)\Delta x = \left(3 \cdot 5^2 - 14 \cdot 5\right) \cdot 0{,}01 = 0{,}05$$

1.6.2-мысал. $4tg5° \cdot tg9°$ және $3tg6° \cdot tg10°$ шамаларын салыстырыңдар.

Шешуі:

$f(x) = \dfrac{tgx}{x}$ функциясын $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ аралығында қарастырайық.

$f'(x) = \dfrac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$ және $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ аралығында $x - \sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\left(2x - \sin 2x\right) > 0$

Бұдан $f(x)$ функциясының $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ аралығында өспелі екендігін көреміз.

Олай болса, $\dfrac{tg5°}{5°} < \dfrac{tg6°}{6°}$ және $\dfrac{tg9°}{9°} < \dfrac{tg10°}{10°}$, бұдан теңсіздіктерді өзара көбейтіп, шыққан көбейтіндіні $180°$-қа көбейтсек, $4tg5° \cdot tg9° < 3tg6° \cdot tg10°$ екендігі шығады.

1.6.3-мысал. $2x + \dfrac{3}{8} \geq \sqrt[4]{x}$ $(x \geq 0)$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

Шешуі: $x = 0$ болғанда теңсіздік орынды. Енді $f(x) < 2x - x^{\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{8}$ функциясын қарастырайық және оның туындысын табайық.

$f'(x) = 2x - \dfrac{1}{4}x^{\frac{3}{4}} = 2 - \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$. $\quad f'(x) = 0$ болады егер $x = \dfrac{1}{16}$.

$x = \dfrac{1}{16}$ нүктесінде функция минимум мән алады, себебі $0 < x < \dfrac{1}{16}$, $f'(x) < 0$ және $x > \dfrac{1}{16}$, $f'(x) > 0$.

Бұдан $x \geq 0, f(x) \geq 0$ қорытынды аламыз, яғни $2x - x^{\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{8} \geq 0$ немесе $2x + \dfrac{3}{8} \geq \sqrt{x}$. Дәлелдеу керегі де осы еді.

1.6.4-мысал. $e^x - e^{-x} = 2\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ теңдеуін шешіңдер.

Шешуі: Берілген теңдеуді $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ түріне келтірейік: $y = f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ функциясы үздіксіз және өспелі функция, сондықтан оның кері функциясы бар болады $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; $e^{2x}-2ye^x-1=0$; $e^x=y+\sqrt{1+y^2}$.

Бұдан f функциясына кері функция $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ екенін көреміз.

Ендеше $\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=x$. Олай болса берілген теңдеудің түбірі $x=0$ болады. Теңдеудің басқа түбірлері болмайтындығын көрсетейік.

Шынында да $h(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)-x$ болсын. Онда $h'(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)-1$ – екі оң таңбалы e^x және e^{-x} функцияларының арифметикалық және геометриялық орталарының айырымы ретінде үнемі оң таңбалы болады. Бұдан h-функциясының бүкіл сан осінде өспелі екендігін көреміз. $f(x)=0$, онда $h(x)>0$ егер $x>0$ және $f(x)<0$ егер $x<0$, ал бұл $x=0$ берілген теңдеудің жалғыз ғана түбірі екендігін көрсетеді.

1.6.5-мысал. Абциссаның оң бағытында $f(x)=\sqrt{2x}$ және $\varphi(x)=\frac{x^2}{2}$ функцияларының графиктері арасындағы бұрышты табыңдар.

Шешуі: Бізге белгілі $y=f(x)$ және $y=\varphi(x)$ функцияларының арасындағы бұрыш деп олардың қиылысу нүктесінде осы функцияларға жүргізілген жанамалардың арасындағы бұрышты айтамыз.

Алдымен екі функцияның қиылысу нүктелерінің абциссаларын табайық:

$$\sqrt{2x}=\frac{x^2}{2}$$

Бұдан функциялар екі нүктеде қиылысатынын көреміз және олардың абциссалары 0 мен 2. екі функцияның да $x=2$ нүктесіндегі жанамасының көлбеулік бұрышының тангенстерін табайық. Ол үшін $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}$, $\varphi'(x)=x$ туындылары бойынша $f'(2)=\frac{1}{2}, \varphi'(2)=2$ екенін табамыз. $f(2)=\varphi(2)=2$ болғандықтан $(2;2)$ нүктесіндегі $y=f(x)$ және $y=\varphi(x)$ функцияларына жүргізілген жанаманың теңдеулері $y=\frac{1}{2}x+1$ және $y=2x-2$ болады.

Екі түзудің арасындағы бұрыштың тенгенсі бойынша, жанамалардың арасындағы бұрыш мына теңдеуді қанағаттандырады.

$tg\alpha=\left|\frac{\frac{1}{2}-2}{1+\frac{1}{2}\cdot 2}\right|=\frac{3}{4}$, олай болса екі функция $(2;2)$ нүктесінде $arctg\frac{3}{4}$ шамасындағы бұрышпен қиылысады.

2. Алгебра және анализ бастамалары пәнін оқытуда компьютерлік технологияны пайдаланудың тиімді жолдары

Қазіргі кездегі республикамыздың білім беру жүйесінде жасалынып жатқан барлық жаңалықтар мен өзгерістердің басты мақсаты, бағыты, сипаты Қазақстан Республикасының тәуелсіз егеменді мемлекет болып қалыптасуы, елде тұрақты дамыған әлеуметтік-экономикалық шарттардың орындалуы, елдің қорғаныс қабілетін нығайту, ғылым мен техниканың өз дәрежесінде дамуы, ұлттық білім беру ісінің әлемдік жүйесіне кірігуі және т.б. сияқты, мемлекеттік стратегиялық маңызы бар көптеген міндеттердің орындалуына үлес қосу болып табылады. Қоғамның даму көрсеткіші ретінде ақпараттық қоғамға өту ісі алынатын, осы заманда, ақпараттық қоғамның негізін ақпарат түсінігі анықтайды. Мұндай қоғамда басты байлық, стратегиялық қор ретінде ақпарат бірінші орынға шығып отыр. Қазіргі заманғы ғылым мен техниканың да басты назарда ұстап отырғаны осы ақпаратты басқару, жинау, сақтау, өңдеу және тарату тәсілдері мен құралдарын жетілдіру болып отыр.

Жоғарыда айтылғандай қазіргі замандағы ақпараттық технологиялардың бар болуы мен оның жылдам өзгерістерге ұшырап, жетілдіріп отыруы білім беру саласына да көптеген жаңалықтар мен өзгерістер әкелін отыр. Оның басты бағыттары ретінде компьютердің оқыту құралы ретінде қолданылуын айтуға болады, мұны кейбір ғалымдар білім беру саласындағы үшінші төңкеріс деп те айтып жүргені белгілі. Сондай-ақ, қазіргі телекоммуникациялық желілік технологиялардың дамуына байланысты қашықтықтан оқыту бұрыннан қолданылып келе жатқан, дәстүрлі күндізгі, кешкі, сырттай, экстернат секілді оқыту түрлерімен қатар қолданылып жүр.

Оқу процесінде жаңа ақпараттық технологиялардың қолданылуы дербес пәндерді оқыту әдістемелеріне де жаңалық әкеле бастағаны қазір анық байқалып келе жатыр. Әсіресе, компьютерді оқыту процесінде алғашқылардың бірі бірі болып қолдана бастаған математика пәнінің мұғалімдері, қазір, жаңа ақпараттық технологияларды меңгеріп қана қоймай, оны өз пәндерінде кеңінен қолданатын болды.

Осы мәселеге қатысты математиканы оқытудағы көп жылғы тәжірибелерге сүйене отырып келесі тұжырымдамаларды жасауға болады:

– Математиканы оқыту әдістемесі – көп жылдық тарихы бар, қалыптасқан педагогикалық ғылымдар жүйесінің бір бөлігі болып табылады. Пән ерекшелігіне қарай математика курсын толығымен компьютерлік негізге ауыстыруға болмайды. Мысалы, аксиома, теорема, оларды дәлелдеулер жолымен оқушылардың абстрактілік ойлау қабілетін дамыту істері бұрынғы тәсілдермен жүргізілуі тиіс. Тек кейбір тақырыптар мен тарауларды оқып-үйренуді ғана компьютерлік технологияға жүктеуге болады;

– Ақпараттық технологияларды оқыту процесінде қолданудың ең маңызды дидактикалық ерекшеліктері оның білім алушыны ақпаратпен жоғары дәрежеде қамтамасыз ету мүмкіндігінде. Бұл өз кезегінде оқыту үрдісінде уақытты тиімді пайдалануға, оқыту сапасын арттыруға септігін тигізеді. Ақпараттық технологиялар көмегімен оқушыларға колледж жағдайында көрсетілуі қиын немесе мүмкін емес құбылыстарды көрсетуге болады, жалпы айтқанда оқу материалдарын экрандық-дыбыстық құралдар көмегімен жоғары ғылыми-танымдық деңгейде беруге болады;

– Математиканы оқытуда ақпараттық технологияларды қолданудың тағы бір тиімді жағы – бұл компьютерді эксперимент құралы ретінде пайдалану. Алгебра және анализ бастамаларының оқу бағдарламасына байланысты қарастырылатын қолданбалы бағыттағы математикалық есептерді шығару бірнеше математикалық модельдерді қарастырып, оқушының модельдер бойынша есептеу эксперименттерін жасауына мүмкіндік беретін ақпараттық технологиялар өте көп, тіпті болмаса кең тараған офистік бағдарлама Excel арқылы да эксперименттер жасауға болады;

– Ақпараттық технологияларды оқыту процесінде қолданудағы тағы бір жақсы жағы ол оқушының білім үрдісінде шығармашылық қабілетін дамытуға айқын мүмкіндік береді. Сондай-ақ, оқушының өз бетінше танымдық іс-әрекеттерді күшейтіп, өзіндік жұмыстарды тез орындау мүмкіндіктері артады. Оқушылармен әр түрлі деңгейдегі және жекелеген жұмыстарды ұйымдастыруға мүмкіндік туады.

Математика пәнін оқытудағы ақпараттық технологияларды қолданудың өз мақсаты, мазмұны, формасы және ерекше өткізу тәсілі бар екеиі белгілі, осыған байланысты басшылыққа алынатын негізгі қағидалар ретінде мыналарды алуға болады: тақырыпты оқыту мақсаттары мен міндеттерін нақты және дұрыс анықтау; өтілетін тақырыптың, бөлімнің материалдарын талдау, керектілерін таңдап алу және оның тиісті құрылымын жасау; сценариін құрастыру; сабақты жүргізудің бағдарламасын жасау (программалау); оқыту процесінде компьютерлік сүйемелдеудің орнын анықтау; тақырыптың өтілуіне талдау жасап, қорытынды жасау.

10-11 сыныптарда оқытылатын алгебра және анализ бастамалары пәнінің бағдарламасына сәйкес қарастырылатын «Тригонометриялық функциялардың графиктерін тұрғызу және зерттеу», «Логарифмдік функциялардың графиктерін тұрғызу және зерттеу», «Жанама туралы есеп», «Туындының көмегімен функцияны зерттеу» және т.б. тақырыптарды оқытуды ақпараттық-компьютерлік технологияларды қолданудың жақсы нәтиже берін жүргенін айтуға болады. Мысалы, функцияның графигін зерттеуде, оқушылардың қабылдауына қиындау соғатын функцияның өсу әне кему аралықтарын анықтау, функцияның таңбасы өзгеретін аралықты, максимум және минимум мәндерін анықтау, паралель көшірулерді орындау және т.б. секілді нәрселерді оқушыларға информатика курсынан белгілі өздері білетін Excel бағдарламасы арқылы көрсете отырып түсіндіру жақсы нәтижелер берер еді. Сол сияқты қазіргі заманғы ақпараттық технологиялар, математиканы оқытуда қолданылып келген көптеген техникалық приборларды да алмастыруға жағдай жасайды.

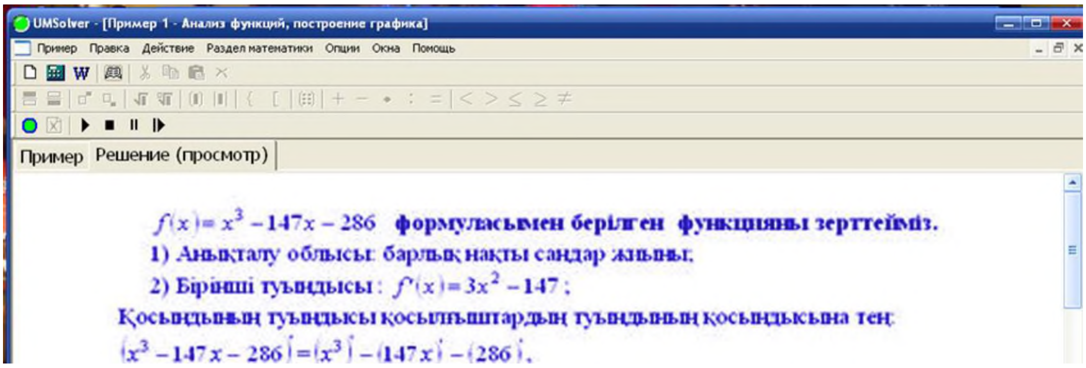
Жалпы математиканы және оның жекелеген тарауларын оқытуда ақпараттық технологияларды қолдану туралы әдістемелік ұсыныстарға, ғылыми-әдістемелік зерттеулерге және көп жылғы тәжірибеге сүйене отырып, компьютерге негізделген ақпараттық технологияларды математика пәнін оқытудағы, оқулықтан кейінгі негізгі оқыту құралы деп айтуға да болады, себебі, компьютердің мүмкіндіктері:

- оқушыларға оқылатын тақырып туралы дәл ақпаратты бере отырып, оқу сапасын арттырады;
- оқытудың көрнекілігін арттырады, яғни оқушыларға қиын да күрделі материалдарды көрнекі түрде түсіндіруге қол жеткізеді;
- оқытудың тиімділігін жоғарылатады және оқыту материалын түсіндіру мүмкіндігін арттырады;
- оқушылардың білімге құштарлығын, қызығушылығын, сұранысын қанағаттандырады;
- мұғалімдерді бірсарынды, техникалық жұмыстан босата отырып, үнемделген уақытта олардың шығармашылықпен жұмыс істеуіне жағдай жасайды және т.б.

Сонымен оқыту үрдісінде оқушылардың оқу-танымдық іс-әрекетін белсендіруде дәстүрлі әдістер мен жаңа әдіс-тәсілдерді, технологияларды өзара сабақтастықта пайдалану, дәстүрлі сипаттағы жұмыс түрлерін жаңаша тұрғыда өзара ықпалдастықта пайдалану, математикалық білім беруді ақпараттандыруда оң нәтие береді деп қорытынды жасауға болады.

Осы жағдайда ғана бүгінгі жаңа ақпараттық технологияның математикалық білімдендіруге оң ықпалын тигізеді деп айтуға болады. Енді айтылып отырған тұжырымдар мен сұрақтар бойынша нақты мысалдар қарастырайық.

2.1-мысал.



$f(x)=x^3-147x-286$ **формуласымен берілген функцияны зерттейміз.**

1) Анықталу облысы: барлық нақты сандар жиыны;

2) Бірінші туындысы : $f'(x)=3x^2-147$;

Қосындының туындысы қосылғыштардың туындының қосындысына тең:

$(x^3-147x-286)'=(x^3)'-(147x)'-(286)'$,

Константаның туындысы 0-ге тең:

$(x^3)'-(147x)'-(286)'=(x^3)'-(147x)'-0=(x^3)'-(147x)'$

Туынды дәрежесінің ережесін пайдаланамыз

Константа мен функция туындысының көбейтіндісі функция туындысының константа көбейтіндісіне тең:

$\left(x^3\right)' - \left(147x\right)' = 3x^2 - 147x' = 3x^2 - 147\cdot 1 = 3x^2 - 147$

3) Екінші туындысы : $f''(x) = 6x$

Екінші туындысы – бұл бірінші туындының туындысы

Қосындының туындысы қосылғыштардың туындысының қосындысына тең:

$\left(3x^2 - 147\right)' = \left(3x^2\right)' - \left(147\right)'$

Константа мен функция туындысының көбейтіндісі функция туындысының константа көбейтіндісіне тең

Константаның туындысы 0-ге тең: $3\left(x^2\right)' - 0 = 3\left(x^2\right)'$

Туынды дәрежесінің ережесін пайдаланамыз: $3\left(x^2\right)' = 3(2x)$

Жақшаларды ашамыз: $3(2x) = 3\cdot 2x$

Топтау жүргіземіз: $3\cdot 2x = (3\cdot 2)x = 6x$

4) x осімен қиылысу нүктелері : $x = -11; x = -2; x = 13$

Абцисса осімен қиылысқан нүктелерді табу үшін функцияны нольге теңестіреміз: $x^3 - 147x - 286 = 0$

Теңдеуді көбейткіштерге жіктеу тәсілімен есептейміз

Бірмүшені бірнеше қосындыларға жіктейміз

Бірдей қосылғыштарды қосамыз және азайтамыз:

$x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x - 143x - 286 = 0$

Топтау жүргіземіз: $\left(x^3 + 2x^2\right) - \left(2x^2 + 4x\right) - \left(143x + 286\right) = 0$

$(x+2)x^2 - (x+2)(2x) - (x+2)143 = 0$

Ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарамыз:

$\left(x + 2\right)\left(x^2 - 2x - 143\right) = 0$

Шыққан шешімді бірнеше жағдайларға бөлеміз:

1-жағдай: $x+2=0$

Белгілі шамаларды теңдіктің оң жағына ауыстырамыз: $x=-2$

Сонымен, бұл жағдайдың жауабы: $x=-2$

2-жағдай: $x^2 - 2x - 143 = 0$

Дискриминантты табамыз: $D = b^2 - 4ac = \left(-2\right)^2 - 4\cdot 1\left(-143\right) = 576$

Дискриминант оң, сондықтан теңдеудің екі түбірі бар

Квадрат теңдеудің түбірін табудың формуласына қоямыз:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{2 - 24}{2\cdot 1} = -11; x_2 = \frac{2 + 24}{2\cdot 1} = 13$$

Сонымен, бұл жағдайдың жауабы: `Error!`.

Жауабы: `Error!`.

5) y осімен қиылысу нүктелері: y=-286

x=0 деп аламыз

$$f(0)=0^3-147\cdot 0-286=-286$$

6) Вертикаль асимптотасы: жоқ

7) Горизонталь асимптотасы: жоқ

8) Көлбеу асимптотасы: жоқ

9) $f(x)$ шексіздікке ұмтылса, x шексіздікке ұмтылады, $\frac{f(x)}{x}$ шексіздікке ұмтылса, x шексіздікке ұмтылады

10) Кризисті нүктелер: **Error!**

Кризисті нүктелерді анықтау үшін бірінші туындыны 0-ге теңестіріп, табылған теңдеуді шешеміз: $3x^2-147=0$

Белгілі шамаларды теңдіктің оң жағына ауыстырамыз: $3x^2=147$

Теңдеудің екі жағын белгісіздің коэффициентіне бөлеміз:

$x^2=147:3 \qquad x^2=49$

Жауабы: **Error!**.

11) Үзілісті нүктелер: x=0

12) Ордината осіне қатысты симметрия : жоқ

f(x) функциясы жұп деп аталады, егер f(-x)=f(x) болса.

$$f(-x)=\left((-x)^3-147(-x)-286\right)=-x^3+147x-286\neq f(x)$$

$$f(-x)\neq f(x)$$

Функция жұп емес

13) Координата бас нүктесіне қатысты симметрия: жоқ

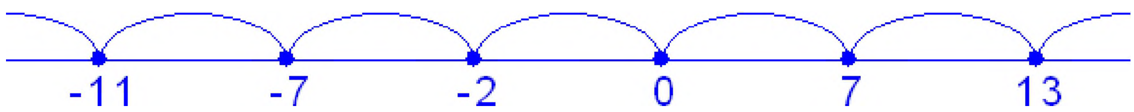
f(x) функциясы тақ деп аталады, егер f(-x)=-f(x) болса.

$$f(-x)=(-x)^3-147(-x)-286=-x^3+147x-286=-\left(x^3-147x+286\right)\neq -f(x)$$

$$f(x)\neq -f(x)$$

Функция тақ емес

14) Тесттік интервалдар:



15) Зерттелген функцияның нәтижесін кестеге енгіземіз:

Тесттік интервалдар:	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Графикалық сипаттамасы
x<-11	-	+	-	Өседі, жоғары қарай дөңес

x=-11	0	+	-	
-11<x<-7	+	+	-	Өседі, жоғары қарай дөңес
x=-7	400	0	-	Салыстырмалы максимум
-7<x<-2	+	-	-	Кемиді, жоғары қарай дөңес
x=-2	0	-	-	
-2<x<0	-	-	-	Кемиді, жоғары қарай дөңес
x=0	-286	-	0	Иілу нүктесі
0<x<7	-	-	+	Кемиді, төмен қарай дөңес
x=7	-972	0	+	салыстырмалы минимум
7<x<13	-	+	+	Өседі, төмен қарай дөңес
x=13	0	+	+	
x>13	+	+	+	Өседі, төмен қарай дөңес

16) Салыстырмалы экстремум:

Минимум нүктеден өткен кезде функцияның туындысы «-» таңбасынан «+» таңбасына ауысады.

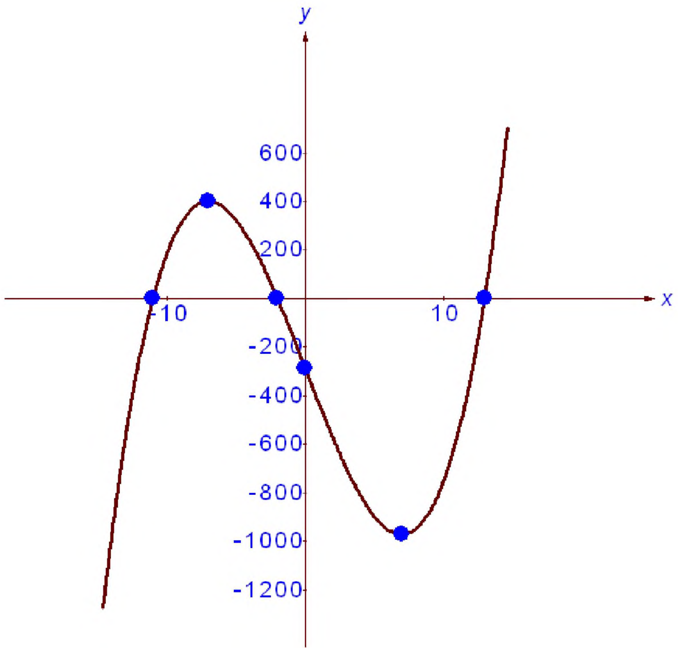
Салыстырмалы минимум: $(7;-972)$

Максимум нүктеден өткен кезде функцияның туындысы «+» таңбасынан «-» таңбасына ауысады.

Салыстырмалы максимум $(-7;400)$

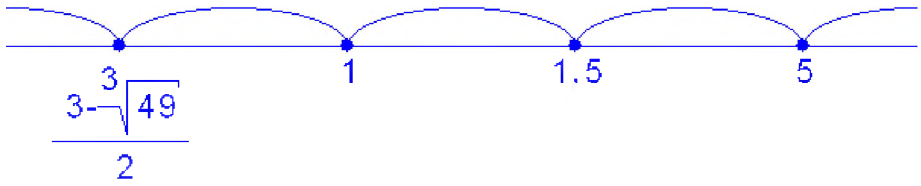
17) Кестедегі берілгендерді координата жазықтығына енгіземіз.

Зерттеген нәтижелерді қолдана отырып, оның графигін салайық:



18) Функцияның мәндер облысы: барлық нақты сандар жиыны.
19) Ең үлкен мәні: жоқ
20) Ең кіші мәні: жоқ.

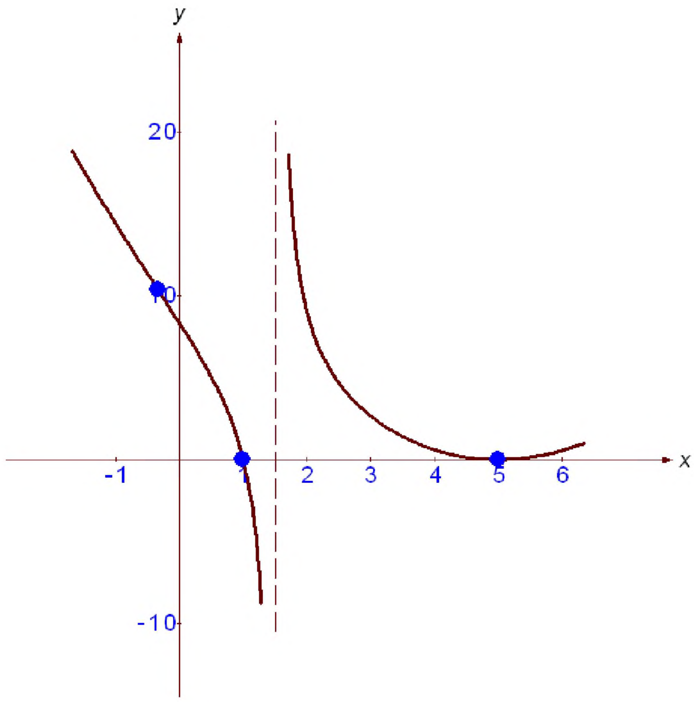
Келесі мысалды шығару жолдарынсыз көрсетейік.
2.2-мысал.
$f(x)=\dfrac{x^3-11x^2+35x-25}{2x-3}$ **формуласымен берілген функцияны зерттейміз.**
1) Анықталу облысы: $x<1{,}5; x>1{,}5$
2) Бірінші туындысы : $f'(x)=\dfrac{4x^3-31x^2+66x-55}{(2x-3)^2}$
3) Екінші туындысы : $f''(x)=\dfrac{8x^3-36x^2+54x+22}{(2x-3)^3}$
4) x осімен қиылысу нүктелері : $x=1; x=5$
5) y осімен қиылысу нүктелері: $y=\dfrac{25}{3}$
6) Вертикаль асимптотасы: $x=1{,}5$
7) Горизонталь асимптотасы: жоқ
8) Көлбеу асимптотасы: жоқ
9)$f(x)$ шексіздікке ұмтылса, x шексіздікке ұмтылады, $\dfrac{f(x)}{x}$ шексіздікке ұмтылса, x шексіздікке ұмтылады
10) Кризисті нүктелер: $x=5$
11) Үзілісті нүктелер: $x=1{,}5$
12) Ордината осіне қатысты симметрия : жоқ
13) Координата бас нүктесіне қатысты симметрия: жоқ
14) Тесттік интервалдар:



15) Зерттелген функцияның нәтижесін кестеге енгіземіз:

Тесттік интервалдар:	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Графикалық сипаттамасы
$x<\frac{3-\sqrt[3]{49}}{2}$	+	-	+	Кемиді, төмен қарай дөңес
$x=\frac{3-\sqrt[3]{49}}{2}$	$x<\frac{3-\sqrt[3]{49}}{2}$	-	0	Иілу нүктесі
$\frac{3-\sqrt[3]{49}}{2}<x<1$	+	-	-	Кемиді, жоғары қарай дөңес
$x=1$	0	-	-	
$1<x<1{,}5$	-	-	-	Кемиді, жоғары қарай дөңес
$x=1{,}5$	Анықт алмайды	Анық талмайды	Анық талмайды	Вертикаль ассимптота
$1{,}5<x<5$	+	-	+	Кемиді, төмен қарай дөңес
$x=5$	0	0	+	Салыстырмал ы минимум
$x>5$	+	+	+	Өседі, төмен қарай дөңес

16) Салыстырмалы экстремум:
Салыстырмалы минимум: $(5;0)$
17) Кестедегі берілгендерді координата жазықтығына енгіземіз.



18) Функцияның мәндер облысы: барлық нақты сандар жиыны.
19) Ең үлкен мәні: жоқ
20) Ең кіші мәні: жоқ

2.3-мысал

$y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ функцияны туынды көмегімен зерттеудің жалпы схемасын қарастырамыз.

Шешуі:

1) анықталу облысы $x\neq\pm1$мәндерінің барлығы, яғни $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.

2) $\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty$. Ендеше $x\neq\pm1$ тік асимптоталар.

3) $y'=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$.

4) $y'=0$. Осыдан $x_1=0;\ x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$. Сонымен $x_1=-\sqrt{3};\ x_2=-1;\ x_3=0; x_4=\sqrt{4}$ күдікті нүктелер.

5) Кесте құрамыз:

4-кесте. Функцияның өсу, кему аралықтары.

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};1)$	-1	(-1;0)	0	(0;1)	1	$(1;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};\infty)$
y'	+	0	-	∞	-	0	-	∞	-	0	+
y	өседі	max -2,6	кемиді	үзіліс	кемиді	y=0	кемиді	үзіліс	кемиді	min 2,6	өседі

6) Осыдан $x=0$

7) Енді екінші туындыны таңбасын анықтап, функция графигінің қайсы

аралықта дөңес, қайсы аралықта ойыс және иілу нүктелерін табу үшін тағы да кесте құрамыз.
5-кесте. Функция графигінің дөңес, ойыс және иілу нүктелері.

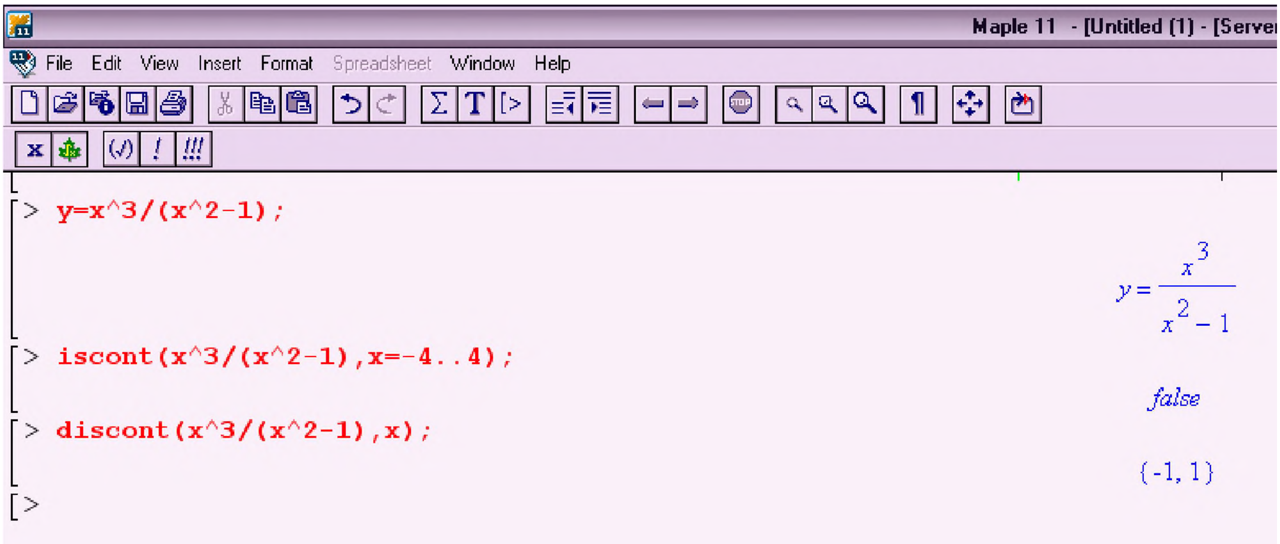
x	$(-\infty;-1)$	-1	(-1;0)	0	(0;1)	1	(1; ∞)
y'	-	∞	+	0	-	∞	+
y	дөңес	үзіліс	ойыс	Иілу y=0	дөңес	үзіліс	ойыс

8) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} = 1;$

$b = \lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{x^3}{x^2-1} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0;$

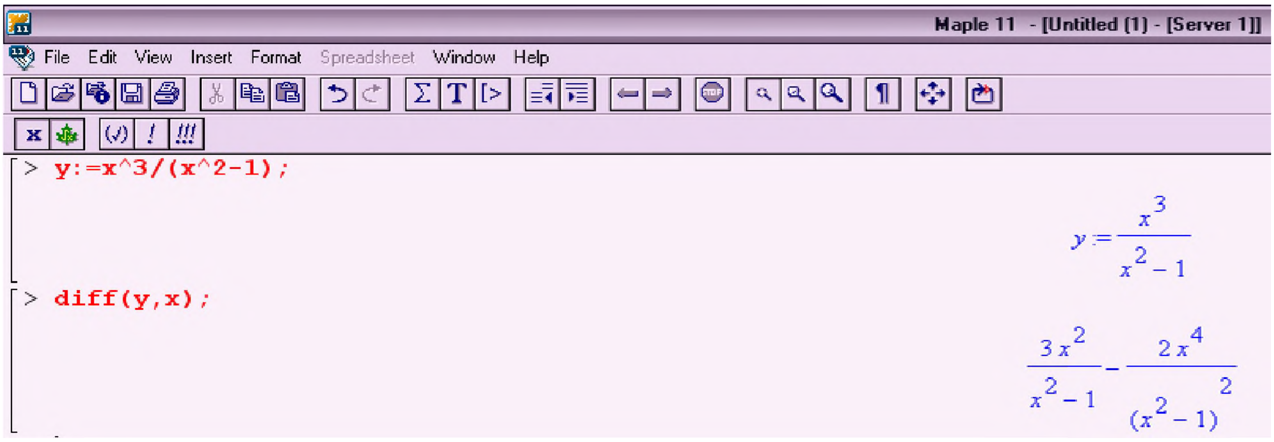
Олай болса $y=x$ көлбеу асимптота.
9) Графиктің осьтерімен қиылысу нүктесі 0(0;0).
10) Функция тақ. Функция периодсыз. Графигі.
Енді функцияны туынды көмегімен зерттеудің жалпы схемасын *Maple* пакетінде карастырамыз.

1) *Maple* пакетінде анықталу облысын табамыз (25-сурет).



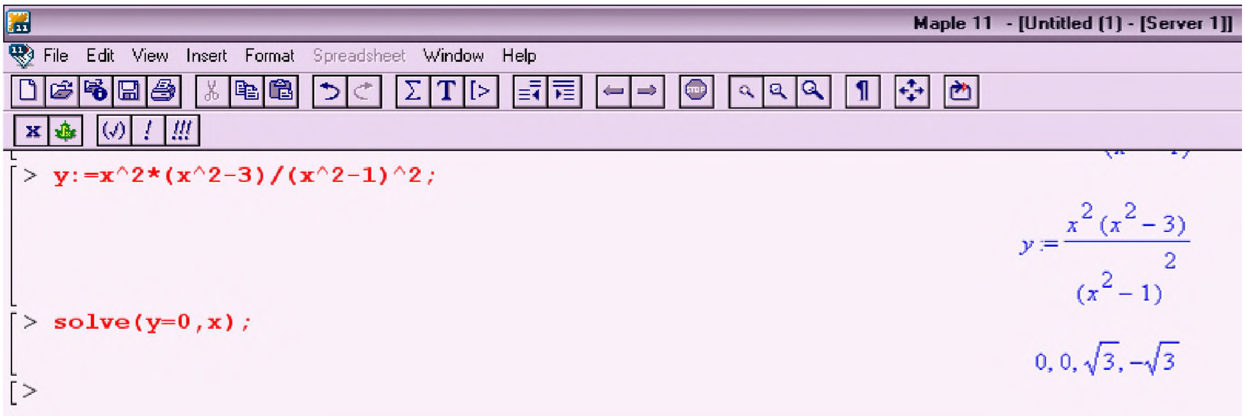
25-сурет

2) *Maple* пакетінде функцияның туындысын табамыз (26-сурет).



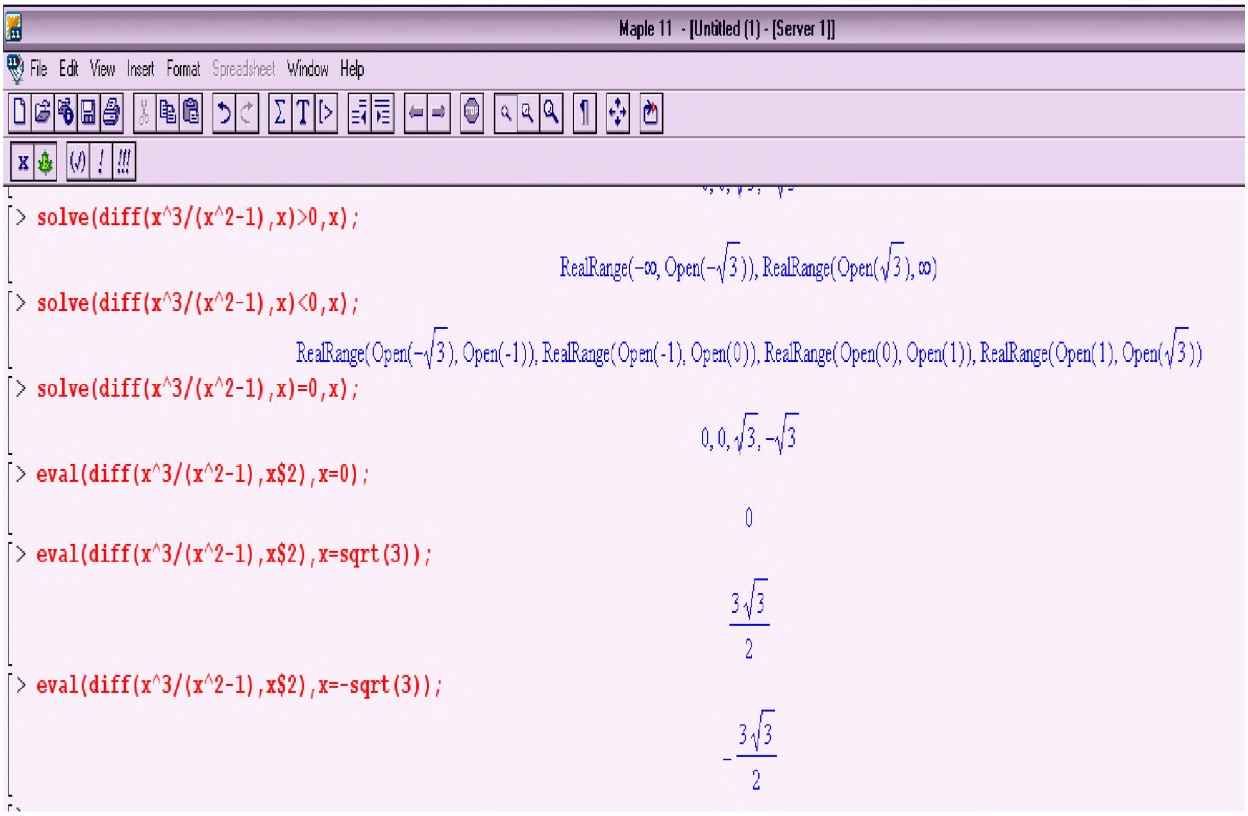
26-сурет

3) *Maple* пакетінде берілген функцияның күдікті нүктелерін табамыз (27-сурет).



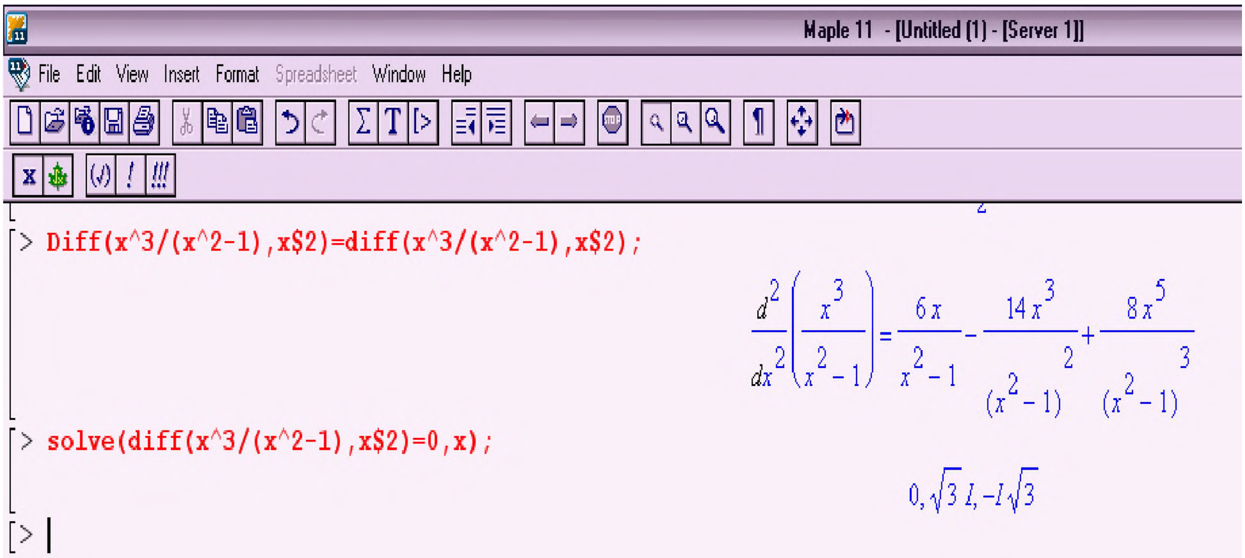
27-сурет

4) *Maple* пакетінде функциясының экстремумдарын және өсу, кему аралықтарын табамыз (28-сурет).



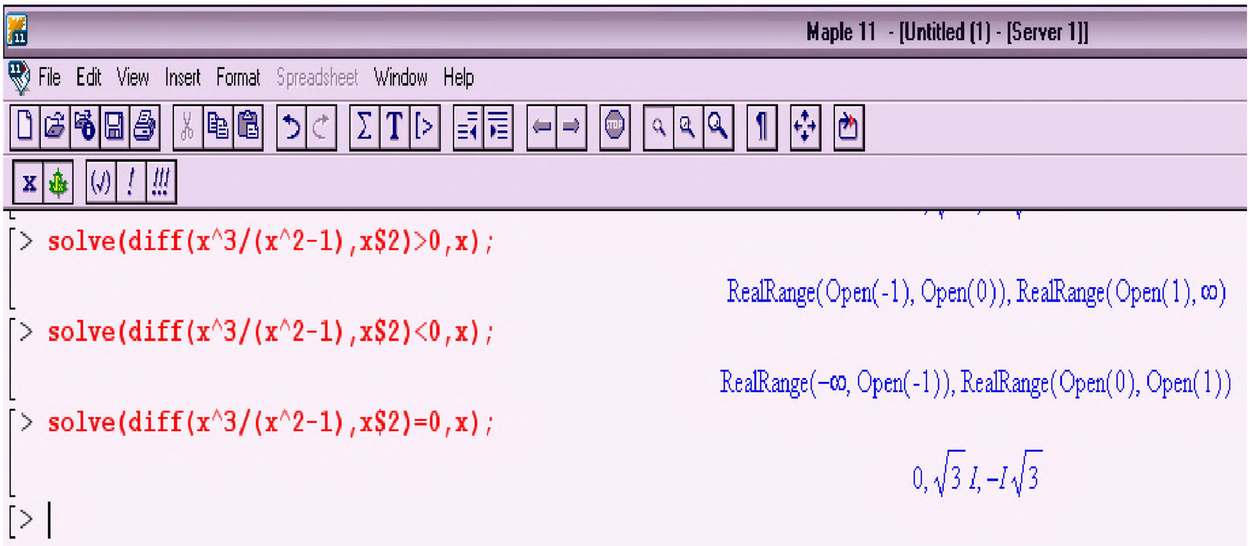
28-сурет

5) *Maple* пакетінде функцияның екінші туындысын және оны нөлге тең деп алып *x*–тің мәнін табамыз (29-сурет).



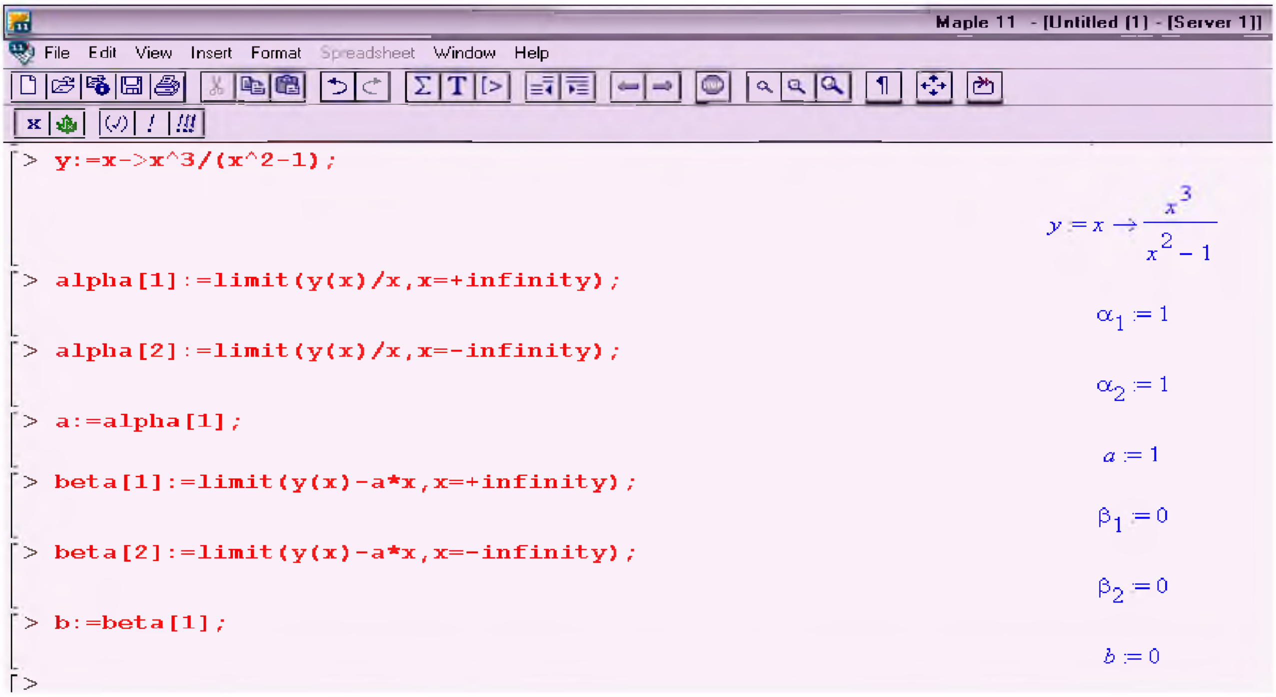
29-сурет

6) *Maple* пакетінде екінші ретті туындыны пайдаланып функцияның дөңес, ойыс және иілу нүктелерін қарастырамыз (30-сурет).



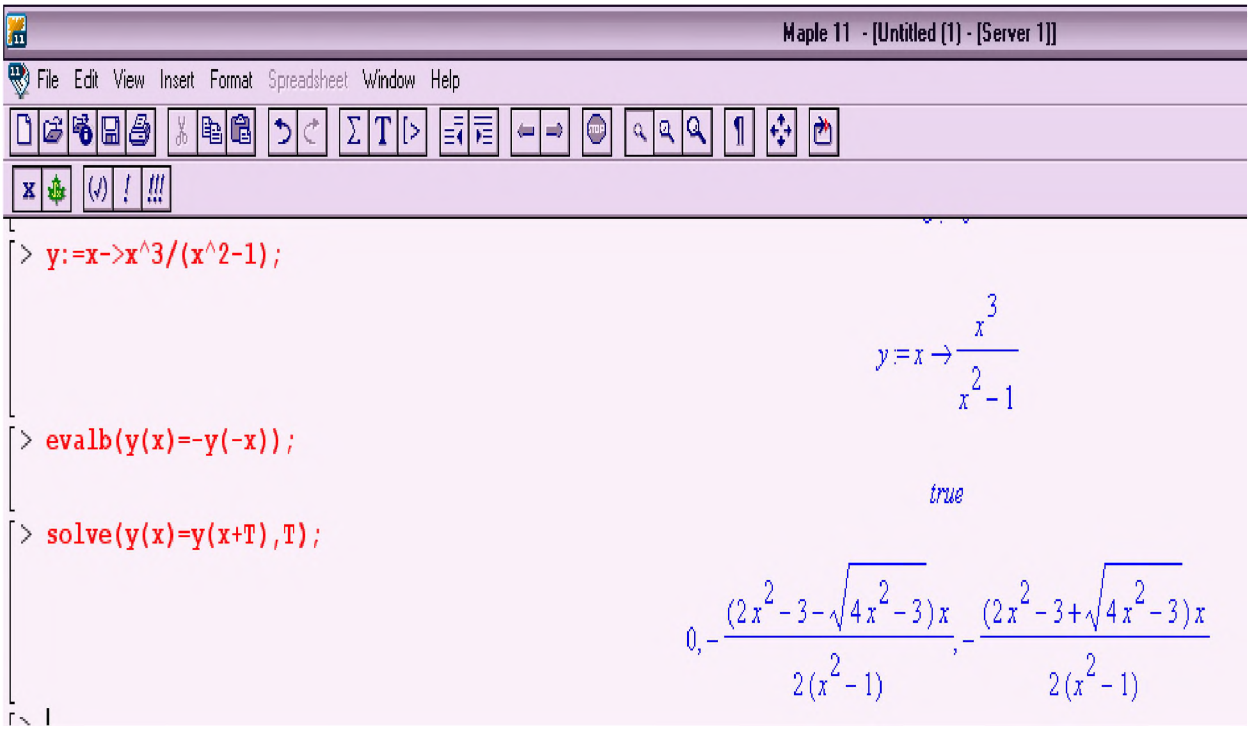
30-сурет

7) *Maple* пакетінде функцияның көлбеу асимптоталарын қарастырамыз (31-сурет).



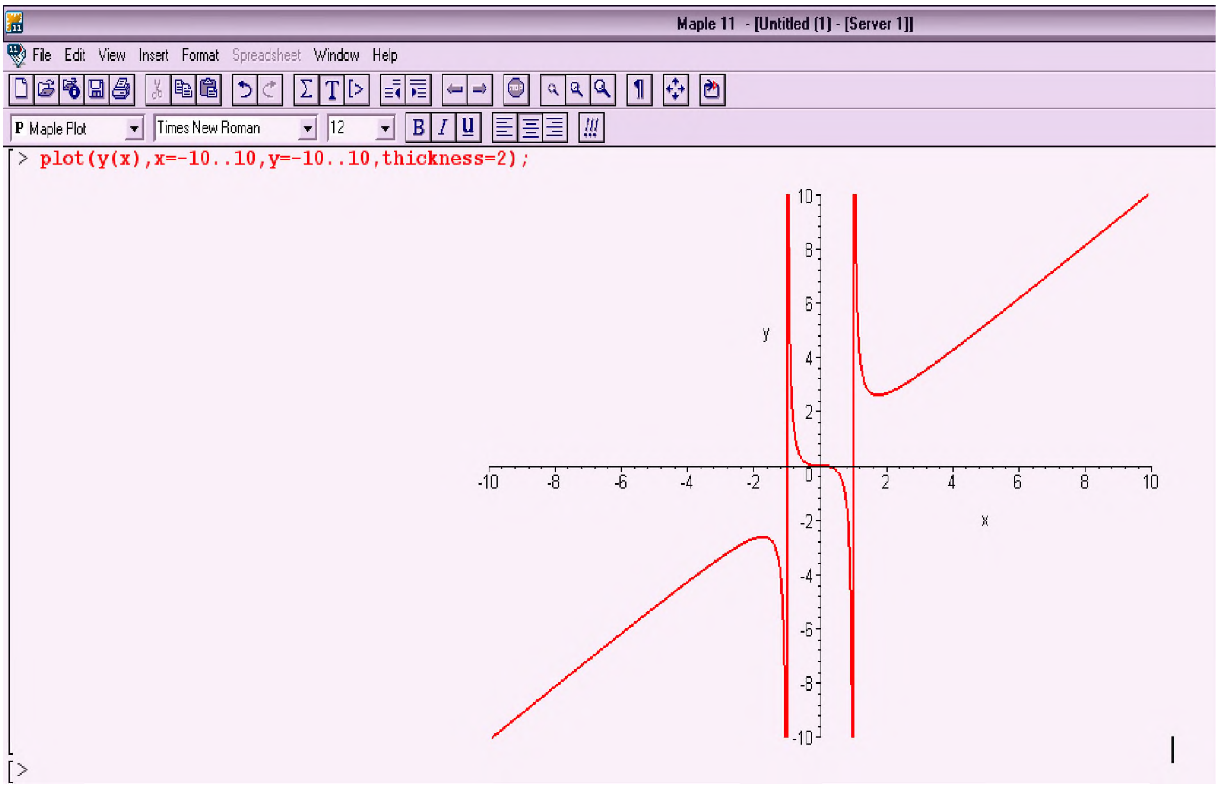
31-сурет

8) *Maple* пакетінде функцияның тақ немесе жұп екенін және периодтылығын қарастырамыз (32-сурет).



32-сурет

Функцияны зерттеу нәтижесі бойынша *Maple* пакетінде функцияның графигін саламыз (33-сурет).



Ақпараттық технологиялардың үнемі жылдам өзгерістерге ұшырауы, жетілуі білім беру саласында тың көзқарастар мен жаңалықтар өзгерістер алып келуде. Білім берудің жаңа технологиясының негізгі бағыты ақпараттандыру болса, компьютерлік технология математика пәнінің мұғалімдерінің жұмыс үрдісінде берік орын алды, яғни оны кеңінен қолданатын болды. Алайда бүкіл еліміздегі білім жүйесі заман талабына сай жұмыс жасауда - деп айтуға әлі болмайды. Көптеген орта және кәсіптік білім, жоғарғы білім мекемелеріндегі инновациялық процестер анықтамалық-ақпараттық сипатта қалып отыр. Осыдан оқыту үрдісінде оқушының жеке-дара ерекшеліктеріне бағытталған көзқарас қалыптаспай, білім жүйесі оқушының өз өмір жолы мен болашағын таңдау мүддесін толық айқындай алмауда.

Ең қолданбалы, өмірге, яғни оқушыны қоршаған ортаға сәйкес мүмкін болатын барлық нақты сұрақтардың көрінісінің модельдік жауабы болып табылатын математка пәні, өз ерекшелігіне қарай, толығымен компьютерлік негізге ауыса алмайды. Оқушылардың логикалық ой өрісін, ойлау қабілетін дамыту, жетілдіру үшін дәстүрлі технологиялар қолданылуы керек.

Оқыту – бұл білім берудің негізгі жолы және ол екі жақты үзіліссіз біртекті процесс. Оның біріншісі оқушыға қажетті деңгейде білім берін, іскерлікке, дағдыға үйретеді. Ал осы мақсатқа жетудің ең негізгі басты шарты мұғалімнің сабаққа деген қызығушылығын туғызуы болып табылады. Жаңа технологиялардың қай бағыты болмасын, ол мұғалімнің мүмкіндігін ашатын, кеңейтетін, тіпті күшейтетін де құрал, бірақ ол еш уақытта оны сабақты компютермен сүйемелдеу белгілі бір қажеттілікке және тақырып мазмұнына қарай ұйымдастырылуы керек.

Компьютерлік технологияны оқыту процесін қолданудың ең маңызды ерекшелігі – оның білім алушыға ақпаратты жоғары деңгейде, тез қамтамасыз ету мүмкіндігінде.

Қорыта айтқанда, ақпараттық технологияны оқыту процесінде қолдану, білім беру және оқыту құралы ретінде, білім беру үрдісін жетілдіріп, білім сапасы мен нәтижелілігін көтеруге мүмкіндік туғызады.

Қорытынды

Қазіргі кезде мектептің алдына қойып отырған талабы – жас жеткіншек ұрпақтарды негізгі пәндермен терең де берік сапалы біліммен қаруландыру, алған, меңгерген білімдерін күнделікті сабақта өз деңгейлеріндегі өздерінің іскерліктерін шеберлікпен қолдана білу. Осы жетістіктерге ету үшін мұғалім алдындағы оқушылардың мінез-құлқын, сана-сезімінің жетілу дәрежелерін танып, оқушылардың қабылдауын, зейінін, қиял, ес, ойлауын, дұрыс қадағалау танымдық процестерді қалыптастыруда негізгі тұлға болып табылады.

Сондықтан қоғамды ақпараттандыру жағдайында үздіксіз білім беру жүйесі мыналарға сүйенеді:

- білім берудің сапасын арттыру, даму қарқынын күшейту және дербестендіруесебінен қоғам мүшелерінің ой-өрісінің даму деңгейін көтеру;
- өз бетінше білім алу мүмкіндіктерін кеңейту және міндетті емес білім беру жүйесіне қоғам мүшелерінің өз мамандықтарын қайта өзгерта алатындай жағдай туғызу.

Білім беруді ақпараттандырудың негізі бағыттары:

– методологиясын жетілдіру мен стратегиялық мазмұнын таңдау;

– әдістері мен формаларын ұйымдастыру;

– қоғамды ақпараттандырудың қазіргі жағдайында тұлғаны тәрбиелеу мен дамыту;

– оқытудың әдістемелік үйесін жасау;

– білім алушының интеллектуалдық потенциалын дамытуға бағыттау;

– өз бетімен білім алу біліктілігін қалыптастыру;

– информациялық-оқу, эксперименттік-зерттеу қызметінің өз бетімен түрлі іс-әрекеттерін жүзеге асыру;

– тестілік, диагностикалық бақылау әдістері мен білім алушылардың деңгейін бағалау.

Білімді ақпараттандыруды ақпараттық қоғам жағдайында жоғары деңгейдегі өмірге адамды дайындау процесі ретінде сипаттауға болады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. «Қазақстан-2050» Стратегиялық бағдарламасы. http://www.inform.kz/kaz/article/2518877
2. Назарбаев Н.Ә. Инновациялар мен оқу – білімді жетілдіру арқылы экономикасына. // Егемен Қазақстан, 27 мамыр, 2006 ж. 1б.
3. ҚР Білім туралы заңы. «Егемен Қазақстан» 15 тамыз, 2007ж. №245-246.
4. Қазақстан Республикасында білім беруді дамытудың 2011 – 2020 жылдарға арналған мемлекеттік бағдарламасы.
5. Алгебра және анализ бастамалары: Орта мектептің 10-11 сыныптарына арналған оқулық./А.Н. Колмогоров және т.б.–Алматы, Рауан, 1992 – 352б.
6. Алгебра: /Ю.Н.Макарычев., В.М. Монахов и др. Под. ред. С.А. Теляковского-6-е изд. перераб-М: Просвещение, 1986.-255с.
7. Александров Д.А. и Швайченко И.М.Методика решения задач пофизике в средней школе: Пособие для учителей.- Л.: Учпедгиз, 1948. 240 с.
8. Ахметов М. Математиканы оқытуда оқушылардың ғылыми-диалектикалық ойлауын қалыптастыру / Әдістемелік оқу құралы/ -Алматы: Респ. баспа каб. 1993.-214б.
9. Әбілқасымова А.Е., К.Д. Шойынбеков, М.И. Есенова, З.А. Жұмағұлова. – Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану – математика бағытындағы 10 – сыныбына арналған оқулық. – Алматы: Мектеп,2006.-184б.
10. Әбілқасымова А.Е., т.б. Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағытындағы 11-сыныбына арналған оқулық. – Алматы: «Мектеп» баспасы, 2007.-208б.
11. Әбілқасымова А.Е.,Кудукова Р., т.б. Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану –математика бағытындағы 11-сыныбына арналған оқулық. – Алматы: «Мектеп» баспасы, 2007.-208б.
12. Б. Жұмағұлов. Қазақстанның ғылымы мен өмірі //Халықаралық ғылыми-көпшілік журнал №6 (17), 2011ж.
13. Б.Е.Тұрбаев., М.Т.Бегайдаров, Н.Салқынбаева. «Ақпараттық технология құралдарын математикалық білім беруде пайдалану». Қазіргі заманғы заманғы математика: проблемалары және қолданыстары, А.Д.Таймановтың ғылыми-педагогикалық қызметіне арналған халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференцияның еңбектер жинағы, Қызылорда, 2013.
14. Б.Е.Тұрбаев., М.Т.Бегайдаров, Н.Салқынбаева. «Векторлық теңсіздіктің кейбір қолданулары». Қазіргі заманғы заманғы математика: проблемалары және қолданыстары, А.Д.Таймановтың ғылыми-педагогикалық қызметіне арналған халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференцияның еңбектер жинағы, Қызылорда, 2013.
15. Бабанский Ю.К. Избранные педагогические труды/ Сост. М.Ю. Бабанский. -М.: Педагогика, 1989.- 560с.
16. Бабанский Ю.К., Поташник М.М. Оптимизация педагогического процесса: (В вопросах и ответах) К.: Рад. Школа, 1983. - 287с.
17. Баймұханов Б. Математикадан есеп шығартып үйрету [Мәтін] / Баймұханов Б.-Алматы: Мектеп, 1983.-144б.

18. Баймұханов Б., Е. Медеуов. Методические основы обучения математике. //Вестник высшей школы Казахстана.-1995. №4, 102с.
19. Бохан К.А. и др. Курс математического анализа. Учеб. пос. для студ. физ-мат. фак. Под. ред. Б.З.Вулиха изд. 2-е, Т.1.-М: Просвещение, 1972.-592с. (256-284с.)
20. Ветров В.В.Основы устройства и функционирования противотанковых управляемых ракет: учебное пособие для вузов / В. В. Ветров, М.В.Грязев, Д.А.Дехтяр, Л.Г.Захаров, А.В.Игнатов и др; под редакцией А. Г. Шипунова. - Тула : Изд-во ТулГУ, 2006. - 182 с.
21. Виноградова И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: учебное пособие. Кн2. / Виноградова И.А., С.Н. Олехник., В.А. Садовничий, 2-е изд. М: «Высший школа»,-2002.-728с.
22. Выготский Л.С. Педагогическая психология /Под ред. В.В. Давыдова. – М.: Педагогика-Пресс, 1999. – 536 с.
23. Высш. математика для начинающих и ее приложения к физике / Зельдович Я.Б., Под. общ. ред. акад. С.С. Герштейна.-6-е изд. , испр. и доп.- М: Физматлит, 2007.-520с.
24. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра. Челябинск: Взгляд, 2004.— 448 с.
25. Есмұхан М. Анықталмаған интегралдар және оларды оқыту методикасы. Алматы; Респ. оқу метод. каб., 1975.-108б.
26. Есмұхан М. Функцияны зерттеу. / Пед. инс. физ-мат. фак. студ. арн. оқу құралы/ Алматы Мектеп, 1988.-190б.
27. Жаутіков О. А. Математикалық анализ курсы. Алматы, 1958.-786б.
28. Колмогоров А.Н. Алгебра және анализ бастамалары: Орта мектептің 10-11 кластарына арналған оқулық. Алматы: «Рауан», 1992.-352б.
29. Колмогоров А.Н. О профессии математика. М: Издат. МГУ. 1959.-265с.
30. Математикалық анализ элементтерін физикалық есептер шешуде қолдану / Тұрбаев Б.Е., Қанибайқызы Қ. // математика және физика ғылыми-әдістемелік журнал 2011.-№2. 14-15б.