ОГЮСТЪ КОНТЪ.

КУРСЪ
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ФИЛОСОФІИ.

Томъ I.

ь men qatar Qьjьr сьqьsta, Sol
k çana Oŋ tyştik Oral men Orta
arasьnda, Өkirajnada, Donbas
Dinepir kəmвьjnatь arasьnda elek
çelileri çyrgizilmek. Bul çumьs ar
ь Keŋester odaqьndaqь negizgi
diris avdandarь arasьnda elektii
alьnasь kycejmek.

Negizgi endiris avdandarь tolьq
elektir quvatь men qamtamasьz etil
mek. Çana avdandarda da elektir qu
rьlьsь kyn sanap ösip keledi.

Məskev elektir ... burьnqьsьnan
ana qurьlьm kycejedi, elektir quvatь
men tolьq qamtamasьz etiledi, kerek
ti elektir quvatьn tolьq aladь. Syjtip,
Məskev qalasь ... Keŋester odaqьn
da qana emes, ... men qatar çer
çyzindegi eŋ kycti elekti tyjini вar
qala boladь. Leningrat qalasьda elek

Çalqasь, Basь etken

Библіотека Положительныхъ Наукъ, издаваемая Э. К. Гартье и К°.

ОГЮСТЪ КОНТЪ.

КУРСЪ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ФИЛОСОФІИ

(Auguste Comte,—Cours de Philosophie Positive).

Полный переводъ съ послѣдняго 5-го французскаго изданія подъ редакціею, съ примѣчаніями и статьями Профессоровъ **С. Е. Савича, С. П. Глазенапа, О. Д. Хвольсона, Д. И. Менделѣева, К. А. Тимирязева, А. С Лаппо-Данилевскаго, И. М. Гревса** и **Н. О. Лосскаго**, съ приложеніемъ статьи Профессора **Н. И. Карѣева**.

въ 6 томахъ.

Томъ I.

Философія Математики

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Книжный Магазинъ Т-ва „ПОСРЕДНИКЪ"
В. О., 8 линія. № 9.
1900.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 27 Марта 1900 г.

Оглавленіе I-го тома.

ОТЪ РЕДАКТОРА ПЕРВАГО ТОМА.

Принимая на себя редакцію той части курса положительной философіи Огюста Конта, которая относится къ наукамъ математическимъ — анализу, геометріи и механикѣ, — я имѣлъ въ виду снабдить переводъ подстрочными примѣчаніями, чтобы пояснить и гдѣ нужно исправить и дополнить изложеніе Конта.

Но за три четверти вѣка, протекшихъ со времени появленія труда Конта, математическія науки сильно подвинулись впередъ: накопилось много новаго матеріала, и самые принципы, лежащіе въ основаніи высшей математики, получили новое освѣщеніе и толкованіе; даже на понятіяхъ, относящихся къ элементарной алгебрѣ и геометріи, ясно отразился прогрессъ математической мысли. При такихъ условіяхъ комментаріи къ Конту должны были бы принять слишкомъ широкіе размѣры. Съ другой стороны изложеніе Конта, не смотря на его удивительный талантъ популяризаціи наиболѣе отвлеченныхъ математическихъ понятій и самыхъ сложныхъ результатовъ, достигнутыхъ наукой, едва ли будетъ доступно для лицъ, совершенно незнакомыхъ съ высшей математикой: въ такомъ случаѣ дополненія и исправленія тѣмъ менѣе могли бы разсчитывать хотя бы на самый ограниченный кругъ читателей не-математиковъ; послѣдніе же и сами въ большинствѣ случаевъ легко замѣтятъ всѣ существенные пробѣлы Конта. По этимъ соображеніямъ я рѣшился не дѣлать частныхъ замѣчаній по отдѣльнымъ пунктамъ изложенія Конта и ограничиться лишь краткой характеристикой воззрѣній Конта на основные вопросы математики; такое рѣшеніе казалось мнѣ тѣмъ болѣе правильнымъ, что прямыя ошибки, вкравшіяся въ изложеніи Конта, были довольно подробно указаны знаменитымъ французскимъ математикомъ Ж. Бертраномъ въ статьѣ, помѣщенной въ Revue de deux Mondes.

Отведя математикѣ обширное мѣсто въ своемъ курсѣ положительной философіи, Контъ самую философію математики понималъ совершенно иначе, чѣмъ понимается это обыкновенно современными учеными. Философское изложеніе математики состоитъ нынѣ главнымъ образомъ въ критикѣ основныхъ опредѣленій, положеній и аксіомъ, на которыхъ построена наука, и въ анализѣ методовъ дедукціи, ею примѣняемыхъ. Обобщеніе понятія о числѣ, начиная съ цѣлаго положительнаго числа и кончая, съ одной стороны, комплексными числами и кватерніонами, а съ другой — идеальными числами, строгое установленіе понятія о функціи, о предѣлѣ и т. д. составляютъ главные пункты, на которыхъ сосредоточивается въ настоящее время вниманіе философіи математики. Въ подтвержденіе такого взгляда можно указать на цѣлый рядъ сочиненій, посвященныхъ именно изложенію самыхъ первоначальныхъ понятій анализа, напр., Таннери „Введеніе въ теорію функцій отъ одной перемѣнной“ (1886 г.), Штольцъ „Лекціи по общей ариѳметикѣ“. Бирманъ „Теорія аналитическихъ функцій“ и т. д. Съ другой стороны критика геометрическихъ аксіомъ и разъясненіе смысла самыхъ первоначальныхъ элементовъ геометріи и составляетъ главный предметъ трудовъ знаменитаго соотечественника нашего Лобачевскаго и его многочисленныхъ комментаторовъ и толкователей.

Всѣ эти изслѣдованія вполнѣ входили бы въ составъ „положительной“ философіи, какъ ее понималъ Контъ, но во времена Конта указанные вопросы мало останавливали вниманіе математиковъ; отдѣльныя же попытки такого характера, сдѣланныя до Конта, или остались ему неизвѣстными, или не обратили на себя его вниманія. Контъ по этому принималъ всѣ бывшія въ то время ходячія опредѣленія и аксіомы и не искалъ строгаго ихъ обоснованія,—я имѣю здѣсь въ виду главнымъ образомъ разсужденія Конта по поводу мнимыхъ или комплексныхъ чиселъ (лекція V. стр. 88 и сл.).

Еще менѣе, чѣмъ догматически строгое изложеніе основныхъ понятій математики интересовалъ Конта генезисъ этихъ понятій; въ этомъ отношеніи онъ ограничивается только указаніемъ на происхожденіе понятія о пространствѣ и основныхъ геометрическихъ представленій о различныхъ геометрическихъ протяженностяхъ, т. е. о тѣлѣ, поверхности, линіи и точкѣ (лекція X, стр. 144 и сл.); онъ приписывалъ имъ исключительно эмпирическій характеръ и совершенно отрицалъ самую возможность представленія иныхъ протяженностей, кромѣ тѣла; точки, линіи и поверхностей суть для Конта тѣла, имѣющія три, два или одно изъ измѣреній на столько малыхъ, что вниманіе лица, мыслящаго о протяженности, не можетъ сосредоточиться на этихъ малыхъ измѣреніяхъ.

Не останавливаясь здѣсь на разборѣ этихъ взглядовъ Конта, позволяю себѣ указать читателю на замѣчанія, сдѣланныя по этому предмету профессоромъ Каринскимъ въ статьѣ его „Объ истинахъ самоочевидныхъ“.

Оставляя въ сторонѣ и догматическое установленіе основныхъ математическихъ понятій, и тѣмъ болѣе генезисъ ихъ, Контъ все свое вниманіе сосредоточиваетъ на ознакомленіи читателя съ главными фактами математическихъ наукъ, съ результатами, достигнутыми этими науками къ его времени. Болѣе всего его интересуетъ правильное ограниченіе предѣловъ различныхъ частей математики, установленіе цѣли и мѣста каждаго ея отдѣла, вообще систематизація накопившагося матеріала, а затѣмъ—краткое описаніе, если можно такъ сказать, пріемовъ рѣшенія главнѣйшихъ вопросовъ анализа, геометріи и механики.

Для характеристики объема математическихъ свѣдѣній, которыми обладалъ Контъ, или, по крайней мѣрѣ, которыми онъ подѣлился съ своими читателями, прежде всего слѣдуетъ указать, что Контъ, увлеченный своими философскими работами, хотя и занимался преподаваніемъ математики и, повидимому, останавливался на нѣкоторыхъ чисто математическихъ вопросахъ, по вообще не имѣлъ возможности внимательно слѣдить за дальнѣйшими успѣхами этой науки; такъ, напр., въ его изложеніи не встрѣчается указаній на труды Гаусса и Абеля, появившіеся въ печати до изданія курса положительной философіи.

Сравнивая объемъ излагаемыхъ Контомъ свѣдѣній по анализу и геометріи со 2-мъ изданіемъ (1814 года) весьма извѣстнаго курса Лакруа „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral", можно легко провѣрить, что почти всѣ вопросы, разсмотрѣнные Контомъ, входили въ курсъ Лакруа, который въ свое время составлялъ почти энциклопедію математическихъ знаній, заключавшихся въ программахъ высшихъ учебныхъ заведеній. Исключеніе представляютъ части собственно аналитической геометріи, касающіяся системъ координатъ, уравненій геометрическихъ мѣстъ, и т д.; надо при этомъ отмѣтить, что теорія кривыхъ и поверхностей втораго порядка, составляющая нынѣ главный предметъ этой геометріи, совсѣмъ не изложены въ курсѣ Конта. Подобнымъ же образомъ „Аналитическая механика" Лагранжа послужила основаніемъ для послѣдней части перваго тома.

Указанія на классическіе труды по математикѣ, давшіе главный матеріалъ для философскихъ размышленій Конта, въ достаточной мѣрѣ выяснятъ читателю съ внѣшней стороны содержаніе части курса Конта, посвященной изложенію основаній математики. Разсмотримъ теперь схему, въ которой Контъ расположилъ весь указанный матеріалъ.

Контъ всю математику дѣлилъ сперва на два отдѣла: на абстрактную и на конкретную; къ первой онъ относилъ собственно анализъ (исчисленіе), а ко второй—геометрію, механику и термологію; послѣднюю часть онъ излагалъ вмѣстѣ съ физикой только изъ опасенія, чтобы сильное отступленіе отъ принятаго порядка не повредило въ общемъ мнѣніи его курсу.

Предметъ абстрактной математики, по мысли Конта, заключается въ измѣреніи однихъ величинъ, неизвѣстныхъ, съ помощью другихъ, извѣстныхъ, на основаніи точныхъ соотношеній, существующихъ между ними. Эти точныя соотношенія между величинами измѣренными (извѣстными) и подлежащими измѣренію (неизвѣстными) должны быть непремѣнно выражены черезъ опредѣленныя простыя операціи (сложеніе, вычитаніе, умноженіе и т. д.), число которыхъ Контъ ограничиваетъ десятью. Установленіе зависимостей между неизвѣстными и извѣстными величинами, или, другими словами, составленіе уравненій между ними есть задача конкретной математики, рѣшеніе же уравненій—задача абстракной математики. Теоретически, говоритъ Контъ, конкретная математика распадается на столько частей, сколько можно представить себѣ группъ естественныхъ явленій; въ дѣйствительности, по мнѣнію Конта, въ его время она состояла только изъ трехъ частей—геометріи, механики и термологіи; можно надѣяться, говоритъ Контъ, что неорганическая физика войдетъ современемъ въ составъ конкретной математики, но нѣтъ никакого положительнаго основанія расчитывать на распространеніе приложеній анализа за означенные предѣлы.

Рѣшить уравненіе—значитъ указать явнымъ образомъ, какъ искомая величина выражается черезъ данныя. Найти численное значеніе искомой величины съ помощью явнаго выраженія ея черезъ данныя,—значеніе, соотвѣтствующее опредѣленнымъ численнымъ значеніямъ данныхъ величинъ—составляетъ задачу ариѳметики; самое же рѣшеніе уравненій есть дѣло алгебры въ обширномъ смыслѣ этого слова; предметъ алгебры, по опредѣленію Конта, состоитъ въ обращеніи неявныхъ зависимостей неизвѣстныхъ величинъ отъ извѣстныхъ въ явныя.

Ариѳметика и алгебра исчерпывали бы все содержаніе абстрактной математики, если бы составленіе уравненій для различныхъ классовъ естественныхъ явленій,—такихъ уравненій, которыя заключали бы только данныя и искомыя величины,—не встрѣчало никакихъ затрудненій на практикѣ.

Но сложность нѣкоторыхъ естественныхъ явленій и сложность тѣхъ зависимостей между измѣренными и подлежащими измѣренію величинами, которыя соотвѣтствуютъ этимъ явленіямъ, съ одной стороны, и ограниченность числа операцій, съ помощью которыхъ указанныя зависимости должны выразиться, создаетъ большія затрудненія для составленія уравненій и заставляетъ математиковъ прибѣгнуть къ введенію въ уравненія, выражающія законы естественныхъ явленій, особыхъ вспомогательныхъ величинъ. Абстрактной математикѣ приходится имѣть дѣло такимъ образомъ съ двумя категоріями уравненій — въ однихъ заключаются только неизвѣстныя и данныя, въ другихъ же, сверхъ того, еще и вспомогательныя величины. Рѣшеніе уравненій перваго класса составляетъ, какъ указано выше, предметъ алгебры или прямаго исчисленія функцій. Рѣшеніе же втораго класса уравненій распадается на двѣ части—исключеніе вспомогательныхъ величинъ, т. е. приведеніе данныхъ зависимостей къ другимъ, заключающимъ только искомыя и данныя величины, и затѣмъ—рѣшеніе преобразованныхъ такимъ образомъ уравненій по обычнымъ пріемамъ алгебры. Первая часть рѣшенія уравненій, заключающихъ вспомогательныя величины, составляетъ предметъ особой отрасли математики—косвеннаго исчисленія функцій. Составъ косвеннаго исчисленія опредѣляется характеромъ тѣхъ вспомогательныхъ величинъ, которыя вводятся при составленіи уравненій, т. е. такъ называемыхъ безконечно малыхъ приращеній и предѣловъ отношеній этихъ приращеній или производныхъ.

Въ современномъ своемъ видѣ исчисленіе косвенное распадается на три части: дифференціальное, интегральное и варьяціонное исчисленіе; задача перваго есть установленіе зависимости между вспомогательными величинами, соотвѣтственно существующей зависимости между самыми величинами; интегральное исчисленіе представляетъ главную часть исчисленія косвенныхъ функцій; его непосредственной задачей и является переходъ отъ уравненій, заключающихъ вспомогательныя величины, къ уравненіямъ между подлежащими непосредственному изслѣдованію величинами. Варьяціонное исчисленіе преслѣдуетъ еще болѣе высокую и болѣе трудную задачу—сдѣлать предметомъ исчисленій самое составленіе уравненій — насколько, конечно, эта задача можетъ быть рѣшаема независимо отъ изученія законовъ естественныхъ явленій.

Не останавливаясь на описаніи дальнѣйшихъ подраздѣленій, которыя Контъ вводитъ при изложеніи анализа, считаю необходимымъ отмѣтить, что двѣ крупныя отрасли математическаго анализа не нашли себѣ мѣста въ схемѣ Конта — теорія чиселъ и теорія вѣроятностей. О теоріи чиселъ Контъ упоминаетъ мелькомъ, говоря о численномъ рѣшеніи алгебраическихъ уравненій; свойства чиселъ, независящія отъ системы счисленія составляютъ, по опредѣленію Конта, предметъ этой науки, являющейся только дополненіемъ къ обыкновенной ариѳметикѣ, вспомогательнымъ орудіемъ для численнаго рѣшенія уравненій.

Въ *численномъ* рѣшеніи алгебраическихъ уравненій теоріи чиселъ, какъ извѣстно, не играетъ никакой роли и не имѣетъ съ ними даже внѣшней связи. Незнакомство Конта съ этой теоріей, не входившей въ программу политехнической школы, и является конечно главной причиной такой существенной ошибки. Этимъ же обстоятельствомъ отчасти объясняется и то обстоятельство, почему Контъ такъ мало обратилъ вниманія на критику понятія о числѣ вообще.

Отсутствіе въ общей системѣ математическаго анализа теоріи вѣроятностей Контъ объясняетъ во второмъ томѣ своего труда незначительностью практическихъ примѣненій теоріи; вообще же этотъ пропускъ приписывается чисто личнымъ соображеніямъ — именно извѣстному нерасположенію Конта къ Лапласу, автору трактата о теоріи вѣроятностей, который по справедливости до настоящаго времени является главнымъ сочиненіемъ по этому предмету.

Но нельзя не отмѣтить здѣсь и того обстоятельства, что теорія вѣроятностей не находитъ себѣ мѣста въ схемѣ, построенной Контомъ для систематизаціи математическаго анализа. Контъ не рѣшался отнести теорію вѣроятностей ни къ конкретной математикѣ, потому что основныя понятія теоріи вѣроятностей носятъ чисто спекулятивный, а не конкретный, эмпирическій характеръ, ни къ абстрактной, ибо теорія вѣроятностей совсѣмъ не занимается разрѣшеніемъ уравненій, составленныхъ прочими отдѣлами конкретной математики, т. е. геометріей, механикой и термологіей.

Пропускъ теоріи вѣроятностей самъ Контъ во II томѣ своего курса оправдываетъ, какъ я уже сказалъ, главнымъ образомъ малымъ числомъ приложеній, которыя эта теорія можетъ имѣть. По этому поводу онъ высказывается совершенно скептически о возможности приложенія математическаго анализа къ наукамъ соціальнымъ и вообще къ органической физикѣ. Огромное значеніе, пріобрѣтенное статистическимъ методомъ изслѣдованія, построеннымъ на теоріи вѣроятностей, и колоссальное развитіе операцій по страхованію жизни, основанныхъ исключительно на той же теоріи, представляетъ полное опроверженіе чрезмѣрному въ этомъ отношеніи скептицизму Конта и еще болѣе усиливаетъ значеніе пропуска, допущеннаго имъ, можетъ быть, дѣйствительно по причинамъ совершенно ненаучнаго характера.

Чтобы хотя въ самыхъ общихъ чертахъ характеризовать воззрѣнія Конта на основные вопросы математики, я остановлюсь на двухъ-трехъ пунктахъ, имѣющихъ болѣе общее значеніе,

Въ этомъ отношеніи на первомъ мѣстѣ слѣдуетъ поставить разсужденіе Конта о мнимыхъ и отрицательныхъ числахъ.—Духъ математическаго анализа заключается, говоритъ Контъ, именно въ томъ, чтобы разсматривать величины исключительно съ точки зрѣнія ихъ взаимныхъ отношеній и независимо отъ всякой мысли объ опредѣленномъ численномъ значеніи ихъ (valeur déterminée). На этомъ основаніи математикъ обязанъ допускать безразлично всякія выраженія, которыя могутъ встрѣтиться при алгебраическихъ преобразованіяхъ, иначе, говоритъ Контъ, пострадала бы общность его разсужденій; всѣ затрудненія при введеніи мнимыхъ величинъ возникаютъ исключительно отъ смѣшенія понятій о зависимости между величинами съ понятіемъ о ихъ численномъ значеніи или алгебраической точки зрѣнія съ ариѳметической. Тоже разсужденіе, по словамъ Конта, вполнѣ разрѣшаетъ, по крайней мѣрѣ, съ чисто умозрительной точки зрѣнія, и всѣ вопросы, возникающіе относительно отрицательныхъ чиселъ; всѣ же сомнѣнія въ удовлетворительности послѣдняго объясненія носятъ метафизическій характеръ.

Такой взглядъ не устранилъ, однако, сомнѣній математиковъ; упорныя размышленія привели къ иному и болѣе правильному обоснованію операцій надъ мнимыми числами, и теперь метафизическими кажутся ссылки Конта на духъ математическаго анализа, будто бы требовавшій распространенія безъ всякихъ дополнительныхъ разсужденій операцій надъ обыкновенными числами и на числа комплексныя.

Очень занималъ Конта вопросъ объ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій любой степени. Указавъ на современное положеніе этой теоріи, Контъ подробно останавливается на вопросѣ о томъ, возможно ли такое рѣшеніе для уравненій всякой степени; при этомъ онъ склонялся къ отрицательному отвѣту, однако, по соображеніямъ, носящимъ отчасти метафизическій характеръ, столь ненавистный ему; именно Контъ находилъ, что сложность формы, въ которой должно представиться рѣшеніе, дѣлаетъ его недоступнымъ для слабыхъ силъ ума человѣческаго. Доказательство Абеля невозможности алгебраическаго рѣшенія уравненій степени выше четвертой, хотя и напечатанное нѣсколько раньше выхода въ свѣтъ курса Конта, было ему еще неизвѣстно.

Контъ очень внимательно останавливался на анализѣ понятія объ уравненіи и функціи, т. е. о видѣ или характерѣ зависимости одной величины отъ другой; онъ пытался установить понятіе объ аналитической функціи—т. е. рѣшить вопросъ, въ настоящее время еще останавливающій вниманіе математиковъ. Контъ однако считалъ этотъ вопросъ гораздо проще, чѣмъ онъ на самомъ дѣлѣ оказывается, и рѣшеніе, которое онъ даетъ этому вопросу, неудовлетворительно. Контъ говоритъ именно, что въ выраженіяхъ зависимости однихъ величинъ отъ другихъ могутъ входить въ любой комбинаціи десять опредѣленныхъ операцій (сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень, извлеченіе корня, логариѳмированіе, показательныя, прямыя и обратныя круговыя функціи), но при этомъ не оговариваетъ, должно ли въ каждое уравненіе входить конечное число такихъ операцій и комбинаціи ихъ, или число операцій и комбинацій остается неограниченнымъ; изъ дальнѣйшихъ разсужденій Конта нельзя выяснить, которое изъ этихъ рѣшеній онъ самъ принималъ. Онъ допускаетъ, съ одной стороны, и безконечные ряды и говоритъ о разложеніи функціи въ ряды, а въ такомъ случаѣ нѣкоторыя изъ указанныхъ выше простѣйшихъ функцій (напр. хотя бы тригонометрическія) могутъ быть выражены безчисленными повтореніями другихъ простѣйшихъ операцій. Съ другой стороны, если ограничить понятіе о функціи только конечнымъ числомъ операцій, названныхъ Контомъ основными, то его опредѣленіе явится узкимъ, такъ какъ подъ него не подойдутъ тѣ разложенія въ ряды, о которымъ говоритъ самъ Контъ.

Несмотря на недостатки изложеннаго опредѣленія понятія объ аналитической функціи, нельзя не признать, что Контъ совершенно правильно указалъ на главное затрудненіе, возникающее при выраженіи законовъ естественныхъ явленій математическими формулами—именно на ограниченность числа вышедшихъ въ обиходъ функцій, свойства которыхъ были бы и просты, и хорошо всѣмъ извѣстны.

Заканчивая свое разсужденіе объ аналитической функціи, Контъ останавливается и на вопросѣ, возможно ли ожидать введенія въ анализъ новыхъ функцій, которыя давали бы возможность расширить область аналитическихъ уравненій. И въ этомъ отношеніи Контъ склоняется къ отрицательному отвѣту, опровергнутому, однако, дальнѣйшимъ ходомъ науки,—достаточно въ этомъ отношенiи указать хотя бы на то положенiе, которое нынѣ занимаютъ въ анализѣ эллиптическiя функцiи.

Изложенiе трансцендентнаго анализа занимаетъ три главы перваго тома, почти $^1/_6$ часть его. Контъ останавливается отдѣльно на воззрѣнiяхъ Лейбница, Ньютона и Лагранжа; онъ считаетъ концепцiю послѣдняго наиболѣе философской, хотя и наименѣе удобной для приложенiя; наоборотъ, система Лейбница, хотя она и нашла себѣ наибольшее примѣненiе, кажется ему совершенно нефилософской, даже нелогичной. Теорiя Ньютона занимаетъ, по мнѣнiю Конта, среднее мѣсто между этими двумя системами. Контъ ожидаетъ, что въ дальнѣйшемъ должна первенствующее мѣсто занять теорiя Лагранжа, прочiя же сохранятъ только историческое значенiе. Такое предпочтенiе системѣ Лагранжа Контъ основываетъ на томъ, что въ послѣдней трансцендентный анализъ приводится къ обыкновенному алгебраическому анализу, и такимъ образомъ изъ абстрактной математики изгоняется самое понятiе о предѣлахъ, которое представляется ему нефилософскимъ. Дальнѣйшее развитiе науки пока не оправдало еще ожиданiй Конта; понятiе о предѣлѣ не изгнано изъ анализа; однако, отличительной чертой современнаго научнаго изложенiя теорiи предѣловъ именно и является стремленiе придать этой теорiи чисто алгебраическiй характеръ.

Дальнѣйшiе успѣхи косвеннаго исчисленiя — т. е. анализа трансцендентнаго—Контъ ожидалъ отъ веденiя въ это исчисленiе новыхъ вспомогательныхъ величинъ. Ничто, говоритъ Контъ, не можетъ заставить насъ навсегда ограничиться разсмотрѣнiемъ только безконечно малыхъ величинъ и предѣловъ; напротивъ, возможность при составленiи уравненiй, которыя должны выражать законы естественныхъ явленiй, пользоваться новыми классами величинъ будетъ способствовать расширенiю математическаго изслѣдованiя законовъ природы; исчисленiя, связанныя съ новыми величинами, могутъ открыть новые горизонты для всего математическаго анализа.

Воззрѣнiя Конта на геометрiю можно привести къ слѣдующимъ положенiямъ: конечная задача геометрiи—измѣренiе длинъ, площадей и объемовъ; главное содержанiе ея—изученiе свойствъ геометрическихъ протяженностей, изученiе, которое является только средствомъ для достиженiя основной ея цѣли. Геометрiя распадается на двѣ существенно различныя части: свойства прямой линiи и прямолинейныхъ фигуръ и тѣлъ должны быть изучены непосредственно; здѣсь геометрiя является чисто естественной наукой; теорiя прямой линiи и фигуръ, изъ нея составленныхъ, служитъ основанiемъ всей геометрiи, такъ какъ она даетъ возможность установить уравненiя между измѣренными и подлежащими измѣренiю величинами, которыя должны послужить предметомъ изслѣдованiя абстрактной части математики.

Всѣ же прочiе вопросы геометрiи могутъ быть приведены къ чисто аналитическимъ задачамъ: величина, положенiе и форма геометрическихъ протяженностей могутъ быть изучаемы совершенно отвлеченно, съ помощью чиселъ: приводимость вопроса о величинѣ въ геометрiи къ аналитическому вопросу о числахъ очевидна; изслѣдованiе положенiя приводится къ тому же вопросу съ помощью различныхъ координатныхъ системъ, форма же геометрическихъ протяжимостей является сама по себѣ лишь слѣдствiемъ взаимнаго расположенiя точекъ фигуры.

Итакъ, въ геометріи, на основаніи эмпирическихъ данныхъ, изучается прямая линія и фигуры, ею образуемыя. Эта теорія даетъ возможность составить уравненія, въ которыхъ свойства протяженностей—величина, положеніе и форма—выражаются алгебраическими соотношеніями, и вся геометрія затѣмъ, такъ сказать, поглощается анализомъ.

Выше я уже указывалъ, что Контъ, признавая геометрію за естественную науку, основанную на наблюденіи, не останавливается на вопросѣ, какія именно положенія геометріи носятъ чисто эмпирическій характеръ, и какія являются результатами дедукціи, положеніями науки чисто спекулятивной. Теорія прямолинейныхъ фигуръ и тѣлъ, составляя ту часть геометріи, которая, по мнѣнію Конта, должна быть изучаема безъ помощи анализа, конечно не вся состоитъ изъ данныхъ, полученныхъ эмпирическимъ путемъ.

Существенною особенностью воззрѣніи Конта на геометрію является совершенное исключеніе построенія, какъ метода и какъ цѣли геометрическихъ изслѣдованій. Надо признать, что въ этомъ отношеніи взглядъ Конта до сихъ поръ остается господствующимъ въ области чистой математики, и только въ прикладной математикѣ построительные методы начинаютъ вновь отвоевывать ту роль, которою они пользовались въ изслѣдованіяхъ геометровъ съ древнихъ временъ до восемнадцатаго вѣка.

Съ точки зрѣнія метода геометрію Контъ дѣлитъ на двѣ части: геометрія спеціальная или геометрія древнихъ изучаетъ формы, каждую отдѣльно, стараясь послѣдовательно раскрыть всѣ ихъ свойства; геометрія же новая или общая разсматриваетъ вопросы, поставленные относительно всѣхъ формъ вообще. Первый способъ изслѣдованія долженъ быть сохраненъ, по мнѣнію Конта, только по отношенію къ геометріи прямой линіи, прямолинейныхъ фигуръ и тѣлъ; всѣ же остальныя изслѣдованія должны быть поставлены по методу новой геометріи. Приложеніе анализа, которое обыкновенно считается отличительнымъ признакомъ новой или декартовой геометріи, не составляетъ, по мнѣнію Конта, характерной черты отличія между геометріею новой и древней. Контъ придавалъ большое значеніе изложенію геометріи по названному имъ новымъ методу и составилъ даже отдѣльный учебникъ „Аналитической геометріи", гдѣ пытался провести полностью свою мысль. Какъ въ указанномъ учебникѣ, такъ и въ курсѣ философіи онъ останавливался послѣдовательно на слѣдующихъ вопросахъ, которые онъ считалъ имѣющими общій интересъ для всѣхъ формъ, и потому являющимися основными вопросами новой геометріи: на опредѣленіи числа точекъ, необходимыхъ для построенія кривой, на составленіи уравненій касательныхъ, на опредѣленіи центра и діаметровъ, на соприкасаніи, на вычисленіи площадей и дугъ; подобные вопросы разсмотрѣны имъ и по отношеніи по поверхностямъ.

Примѣръ Конта въ отношеніи методологическаго дѣленія геометріи не нашелъ прямыхъ подражателей, и до сихъ поръ дѣленіе геометріи на три части—собственно геометріи, къ которой кромѣ элементарной, присоединяется и геометрія высшая, на аналитическую геометрію (т. е. на приложеніе алгебры къ геометріи) и на приложеніе трансцендентнаго анализа къ геометріи сохраняется въ математикѣ; первыя два излагатся по тому пріему, который Контъ называлъ спеціальнымъ, а послѣдніи — по общему; характернымъ же признакомъ, отдѣляющимъ древнюю геометрію отъ новой, считается именно приложеніе анализа.

Изложеніе механики Контъ начинаетъ съ доказательства того совершенно правильнаго положенія, что механика, какъ наука о движеніи, не можетъ быть сведена къ чистому анализу и навсегда должна сохранить характеръ естественной науки, основанной на извѣстныхъ общихъ данныхъ, установленныхъ изъ наблюденія. Въ предметъ механики не входитъ, говоритъ Контъ, изслѣдованіе свойствъ силъ, производящихъ движенія; она занимается опредѣленіемъ результатовъ совмѣстнаго воздѣйствія нѣсколькихъ силъ на тѣло, когда дѣйствіе каждой отдѣльной силы извѣстно, или наоборотъ—по дѣйствительному движенію опредѣляетъ тѣ простыя, изъ которыхъ составлено сложное движеніе.

Свойство инерціи, приписываемое нами тѣламъ, есть, по мнѣнію Конта, совершенная фикція, безусловно противорѣчащая результатамъ наблюденія, показывающаго, что тѣла не находятся въ пассивномъ состояніи, а постоянно воздѣйствуютъ одно на другое; введеніе свойства инерціи въ механику только потому не приводитъ къ абсурду, что тамъ разсматривается движеніе независимо отъ причинъ, его порождающихъ, и что поэтому всякое воздѣйствіе тѣлъ одно на другое можно замѣнить внѣшней силой, приписывая самому тѣлу совершенно пассивное состояніе.

Свойство инерціи Контъ отличаетъ отъ закона инерціи, представляющаго основной законъ природы, подтверждаемый нашими наблюденіями. Вторымъ закономъ движенія Контъ считаетъ законъ Ньютона равенства дѣйствія противодѣйствію, а третьимъ—принципъ независимости или сосуществованія движенія (сложеніе движеній). Принципъ же пропорціональности силъ приращенію скорости (ускоренію) Контъ считаетъ только слѣдствіемъ послѣдняго закона.

Самыя силы, разсматриваемыя въ механикѣ, Контъ дѣлитъ на *мгновенныя*, дѣйствующія какъ толчки, т. е. внезапно измѣняющія скорость движенія, но затѣмъ уже оставляющія ее безъ перемѣны, и на *ускорительныя*, которыя въ теченіе нѣкотораго времени измѣняютъ послѣдовательно *скорость движенія*.

На указанныхъ трехъ физическихъ законахъ движенія и изложенныхъ опредѣленіяхъ и основывается вся теоретическая механика, которую Контъ дѣлитъ сперва на статику и динамику, а затѣмъ на механику твердыхъ и механику жидкихъ тѣлъ.

Статика можетъ быть, говоритъ Контъ, трактована или самостоятельно, на основаніи опредѣленнаго и достаточно общаго отдѣльнаго принципа равновѣсія, или какъ частный случай той части динамики, которая занимается движеніемъ, порождаемымъ силами мгновенными.

Придавая извѣстное значеніе послѣднему методу, Контъ отдаетъ съ чисто философской точки зрѣнія предпочтеніе собственно статическому методу и считаетъ, что *принципъ возможныхъ скоростей*, введенный Лагранжемъ въ механику, является достаточно общимъ и совершенно самостоятельнымъ принципомъ статики, при чемъ доказательства Лагранжа считаетъ окончательно устраняющимъ всякія возраженія противъ этого принципа.

Переходя къ динамикѣ, Контъ, установивъ извѣстныя зависимости между пространствомъ, временемъ, скоростью и ускореніемъ, останавливается довольно долго надъ теоріей *уподобленія* движеній; онъ сравниваетъ такое уподобленіе съ соприкасаніемъ кривыхъ, и указываетъ, что съ этой точки зрѣнія изученіе движеній производилось бы путемъ сравненія его съ простѣйшимъ, наиболѣе близкимъ къ нему движеніемъ.

Затѣмъ Контъ устанавливаетъ, что всѣ уравненія механики могутъ быть связаны въ одну общую формулу на основаніи принципа д'Аламбера.

Послѣднюю главу перваго тома Контъ посвящаетъ изложенію открытыхъ геометрами основныхъ законовъ равновѣсія и движенія; эти общія теоремы механики Контъ сводитъ къ слѣдующимъ пунктамъ: условія равновѣсія системъ и условія устойчивости; принципъ сохраненія движенія центра тяжести; принципъ площадей, живыхъ силъ и неизмѣняемой площади; затѣмъ принципъ наименьшаго дѣйствія и сосуществованія малыхъ качаній.

С. Савичъ.

Предисловіе автора.

Этотъ курсъ, общій результатъ всѣхъ моихъ работъ со времени выхода изъ Политехнической школы въ 1816 году, былъ мною открытъ въ первый разъ въ апрѣлѣ 1826 года. Послѣ небольшаго числа лекцій тяжелая болѣзнь помѣшала мнѣ тогда продолжить дѣло, удостоившееся съ первыхъ своихъ шаговъ лестныхъ отзывовъ многихъ первоклассныхъ ученыхъ, въ числѣ которыхъ я могу назвать членовъ Академіи Наукъ Александра Гумбольдта, де-Бленвиля и Пуансо, съ постояннымъ интересомъ слѣдившихъ за изложеніемъ моихъ идей. Прошлую зиму, начиная съ 4 января 1829 года, я цѣликомъ повторилъ этотъ курсъ предъ аудиторіей, въ которую удостоили войти непремѣнный секретарь Академіи Наукъ Фурье, члены этой Академіи: де-Бленвиль, Пуансо, Навье, профессора Бруссе, Эскираль, Бине и др.; здѣсь я считаю долгомъ выразить имъ открыто свою благодарность за радушіе, съ которымъ они встрѣтили эту новую философскую попытку.

Благодаря такимъ отзывамъ я пріобрѣлъ увѣренность, что этотъ курсъ можетъ съ пользой получить и болѣе широкую извѣстность, и рѣшился съ этой цѣлью прочитать его въ этомъ году въ Королевскомъ Атенеѣ въ Парижѣ, гдѣ и началъ 9 декабря свои лекціи. Планъ остался прежній, но особыя условія мѣста заставили меня нѣсколько сократить объемъ курса.

Настоящее изданіе моихъ лекцій заключаетъ однако курсъ въ томъ объемѣ, который ему былъ приданъ въ прошломъ году.

Чтобы закончить эту историческую замѣтку, я считаю не лишнимъ указать на то, что нѣкоторыя изъ изложенныхъ въ этомъ курсѣ основныхъ идей моихъ были уже раньше высказаны мною въ первой части сочиненія, озаглавленнаго: *Система положительной политики*, напечатаннаго въ маѣ 1822 года въ количествѣ 100 экземпляровъ, и перепечатаннаго въ апрѣлѣ 1824 года въ болѣе значительномъ числѣ экземпляровъ. Эта первая часть совсѣмъ не была опубликована обыкновеннымъ порядкомъ, а только въ печати сообщена большому числу европейскихъ ученыхъ и философовъ.

Я счелъ нужнымъ установить здѣсь, что первое сочиненіе мое было дѣйствительно выпущено въ обращеніе, такъ какъ въ различныхъ сочиненіяхъ, вышедшихъ позже, изложены, безъ всякаго упоминанія о моихъ изслѣдованіяхъ, нѣкоторыя идеи, представляющія значительную аналогію съ моими, въ особенности относительно обновленія социальныхъ теорій. Хотя, какъ это не разъ обнаруживала исторія человѣческаго духа, лица, занимающіяся одною и тою же отраслью знанія, могутъ приходить даже безъ всякихъ сношеній другъ съ другомъ къ аналогичнымъ воззрѣніямъ, я долженъ былъ все-таки опредѣлено указать на болѣе раннее появленія моей малоизвѣстной въ обществѣ работы, чтобы никто не подумалъ, что я извлекъ основанія моихъ идей изъ сочиненій, въ дѣйствительности вышедшихъ въ свѣтъ послѣ моего труда.

Такъ какъ нѣсколько лицъ просили у меня объясненій относительно заглавія этого курса, то я считаю полезнымъ дать здѣсь нѣкоторыя общія указанія.

Выраженіе *положительная философія* во всемъ этомъ курсѣ постоянно употребляется въ одномъ, строго неизмѣнномъ смыслѣ, и мнѣ казалось излишнимъ опредѣлять его чѣмъ нибудь другимъ кромѣ указанія на его постоянное и однообразное употребленіе. На всю первую лекцію въ частности можно смотрѣть какъ на разъясненіе точнаго опредѣленія того, что я называю *положительной философіей*. Я сожалѣю, однако, что за неимѣніемъ другаго мнѣ пришлось принять терминъ *философія*, которому неправильно придавали множество различныхъ значеній. Мнѣ казалось однако, что прилагательнаго *положительная*, при помощи котораго я измѣняю нѣсколько значеніе слова *философія*, будетъ достаточно для того, чтобы даже съ перваго взгляда уничтожить всякую неясность для тѣхъ, по крайней мѣрѣ, кто понимаетъ значеніе этого слова. Поэтому въ этомъ предисловіи я ограничусь заявленіемъ, что я употребляю слово *философія* въ томъ смыслѣ, который ему придавали древніе, и въ особенности Аристотель, и обозначаю имъ общую систему человѣческихъ понятій; прибавляя слово *положительная*, я хочу сказать, что имѣю въ виду особый способъ философскаго мышленія, который признаетъ, что всѣ теоріи, къ какой-бы области идей онѣ не принадлежали, имѣютъ цѣлью согласованіе наблюдаемыхъ фактовъ; этотъ пріемъ и составляетъ третью и послѣднюю ступень общей философіи, сперва теологической, а затѣмъ метафизической, какъ я это объясняю въ первой же лекціи.

Есть конечно много аналогіи между моей *положительной философіей* и тѣмъ, что англійскіе ученые, особенно послѣ Ньютона, называютъ *натуральной философіей*, но я не могъ избрать ни этого названія, ни названія *философія наукъ*, которое было-бы быть можетъ еще точнѣе, потому, что ни та, ни другая не касаются всѣхъ классовъ явленій, тогда какъ *положительная философія*, въ которую я включаю изученіе соціальныхъ явленій точно такъ-же, какъ и всякихъ другихъ, указываетъ на однообразный пріемъ разсужденія, приложимый ко всѣмъ предметамъ, подлежащимъ человѣческому изслѣдованію. Кромѣ того выраженіе *натуральная философія* употребляется въ Англіи для обозначенія совокупности различныхъ основанныхъ на наблюденіи наукъ, разсматриваемыхъ со всѣми подробностями, тогда какъ подъ *положительной философіей*, сопоставляя ее съ *положительными науками*, я понимаю только изученіе общихъ идей различныхъ наукъ, признавая науки подчиненными одному методу и составляющими различныя части одного общаго плана изслѣдованія. Такимъ образомъ новый терминъ, который я принужденъ былъ ввести, въ одно и то же время и шире, и уже другихъ названій, аналогичныхъ съ нимъ по основной идеѣ своей и на первый взглядъ могущихъ показаться совершенно равнозначущими.

Первая лекція.

Цѣль этого курса. или общія соображенія о природѣ и значеніи положительной философіи.

Въ этой первой лекціи я имѣю въ виду ясно указать цѣль этого курса, т. е. точно опредѣлить то направленіе, въ которомъ будутъ разсмотрѣны основныя отрасли натуральной философіи, указанныя въ представленной вамъ мною программѣ.

Безъ сомнѣнія, характеръ этого курса можно будетъ понять вполнѣ, т. е. настолько, чтобы составить о немъ окончательное мнѣніе, только тогда, когда отдѣльныя его части будутъ развиты послѣдовательно одна за другой. Таково обычное неудобство опредѣленій, относящихся къ очень обширнымъ системамъ идей, когда эти опредѣленія предшествуютъ самому изложенію. Но общія положенія можно разсматривать съ двухъ точекъ зрѣнія: или какъ общій взглядъ на подлежащую доказательству систему, или какъ выводъ изъ установленной уже системы, и, если эти положенія пріобрѣтаютъ все свое значеніе только тогда, когда они разсматриваются со второй точки зрѣнія, то и при первой точкѣ зрѣнія они имѣютъ громадную важность, опредѣляя съ самаго начала предметъ изслѣдованія. Произведенное со всей возможной для насъ строгостью общее ограниченіе поля нашихъ изслѣдованій есть вступленіе, особенно необходимое по нашему мнѣнію для столь обширнаго и до сихъ поръ столь мало опредѣленнаго труда, какъ тотъ, къ которому мы теперь приступаемъ. Въ силу этой логической необходимости я считаю нужнымъ теперь-же указать вамъ на цѣлый рядъ основныхъ соображеній, которыя вызвали появленіе этого курса, и которыя впослѣдствіи будутъ развиты съ той подробностью, какую заслуживаетъ чрезвычайная важность каждаго изъ нихъ.

Чтобы лучше объяснить истинную природу и особый характеръ положительной философіи, необходимо прежде всего бросить общій взглядъ на послѣдовательное движеніе человѣческаго духа, разсматривая его во всей совокупности, такъ какъ ни одна идея не можетъ быть хорошо понята безъ знакомства съ ея исторіей.

Изучая такимъ образомъ весь ходъ развитія человѣческаго ума въ различныхъ сферахъ его дѣятельности, отъ его перваго простѣйшаго проявленія до нашихъ дней, я, какъ мнѣ кажется, открылъ главный основной законъ, которому это развитіе подчинено безусловно, и который можетъ быть твердо установленъ или путемъ раціональныхъ доказательствъ, доставляемыхъ знакомствомъ съ нашимъ организмомъ, или съ помощью историческихъ данныхъ, извлекаемыхъ при внимательномъ изученіи прошлаго. Этотъ законъ состоитъ въ томъ, что каждая изъ нашихъ главныхъ идей, каждая изъ отраслей нашего знанія проходитъ послѣдовательно три различныхъ теоретическихъ состоянія: состояніе теологическое или фиктивное; состояніе метафизическое или абстрактное; состояніе научное или положительное. Другими словами, человѣческій духъ по самой своей природѣ въ каждомъ изъ своихъ изслѣдованій пользуется послѣдовательно тремя методами мышленія, по характеру своему существенно различными и даже прямо противоположными другъ другу: сначала теологическимъ методомъ, затѣмъ метафизическимъ и наконецъ положительнымъ методомъ. Отсюда и возникаютъ три взаимно исключающіе другъ друга вида философіи, или три общія системы воззрѣній на совокупность явленій: первая есть необходимая исходная точка человѣческаго ума; третья — его опредѣленное и окончательное состояніе; вторая служитъ только переходной ступенью.

Въ теологическомъ состояніи человѣческій духъ, направляя свои изслѣдованія главнымъ образомъ на внутреннюю природу вещей, первыя и конечныя причины поражающихъ его явленій, стремясь, однимъ словомъ, къ абсолютному познанію, воображаетъ, что явленія производятся прямымъ и постояннымъ воздѣйствіемъ болѣе или менѣе многочисленныхъ сверхъестественныхъ факторовъ, произвольное вмѣшательство которыхъ объясняетъ всѣ кажущіяся аномаліи міра.

Въ метафизическомъ состояніи, которое на самомъ дѣлѣ представляетъ собою только общее видоизмѣненіе теологическаго, сверхъестественные факторы замѣнены абстрактными силами, настоящими сущностями (олицетворенными абстракціями), неразрывно связанными съ различными вещами, и могущими сами собою производить всѣ наблюдаемыя явленія, объясненіе которыхъ состоитъ въ такомъ случаѣ только въ подысканіи соотвѣтствующей сущности.

Наконецъ въ положительномъ состояніи человѣческій духъ познаетъ невозможность достиженія абсолютныхъ знаній, отказывается отъ изслѣдованія происхожденія и назначенія существующаго міра и отъ познанія внутреннихъ причинъ явленій, и стремится, правильно комбинируя разсужденіе и наблюденіе, къ познанію дѣйствительныхъ законовъ явленій, т. е. ихъ неизмѣнныхъ отношеній послѣдовательности и подобія. Объясненіе явленій, приведенное къ его дѣйствительнымъ предѣламъ, есть отнынѣ только установленіе связей между различными отдѣльными явленіями и нѣсколькими общими фактами, число которыхъ уменьшается все болѣе и болѣе по мѣрѣ прогресса науки.

Теологическая система дошла до высшей степени доступнаго ей совершенства, когда она замѣнила дѣйствіемъ одного существа разнородныя вмѣшательства многочисленныхъ, независящихъ другъ отъ друга божествъ, существованіе которыхъ до этого момента предполагалось. Точно также и предѣлъ метафизической системы состоитъ въ замѣнѣ всѣхъ разнообразныхъ сущностей одной общей великой сущностью, *природой*, которую и надлежало бы разсматривать какъ единственный источникъ всѣхъ явленій.

Параллельно этому совершенство, къ которому постоянно, хотя быть можетъ и безуспѣшно, стремится положительная система, заключалось-бы въ возможности представить всѣ отдѣльныя подлежащія наблюденію явленія какъ частные случаи одного общаго факта, подобнаго напр. тяготѣнію.

Здѣсь не мѣсто вдаваться въ подробное доказательство этого основнаго закона развитія человѣческаго духа и выводить наиболѣе важныя его слѣдствія. Мы будемъ говорить о немъ съ надлежащей подробностью въ той части нашего курса, которая посвящена изученію соціальныхъ явленій *). Я упомянулъ объ этомъ законѣ только для того, чтобы путемъ сопоставленія положительной философіи съ двумя другими философскими системами, которыя одна за другой до послѣдняго времени господствовали надъ всей нашей интеллектуальной дѣятельностью, точно опредѣлить истинный характеръ самой положительной философіи. Теперь же, чтобы не оставлять совершенно безъ доказательствъ такой важный законъ, часто притомъ примѣняемый во всемъ этомъ курсѣ, я долженъ ограничиться бѣглымъ указаніемъ на самыя общія и очевидныя соображенія, доказывающія его справедливость.

Во-первыхъ, достаточно, мнѣ кажется, провозгласить такой законъ для того, чтобы его справедливость была тотчасъ же провѣрена всѣми, кто нѣсколько глубже знакомъ съ общей исторіей наукъ. Нѣтъ ни одной науки, достигшей въ наше время положительнаго состоянія, которую въ прошломъ нельзя было-бы себѣ представить состоящей главнымъ образомъ изъ метафизическихъ абстракцій, а въ болѣе отдаленные времена даже и находящейся подъ полнымъ господствомъ теологическихъ понятій.

Къ сожалѣнію въ различныхъ частяхъ этого курса мы не разъ должны будемъ признать, что даже самыя совершенныя науки до сихъ поръ сохраняютъ еще весьма замѣтныя слѣды этихъ двухъ первобытныхъ состояній.

Указанный общій подъемъ человѣческаго духа можетъ быть теперь легко установленъ весьма осязательнымъ, хотя и косвеннымъ, путемъ, а именно разсмотрѣніемъ развитія индивидуальнаго ума. Въ виду того, что въ развитіи отдѣльной личности и цѣлаго вида исходная точка по необходимости должна быть одна и та же, главныя фазы перваго должны представлять основныя эпохи второго. И дѣйствительно не вспомнитъ-ли каждый изъ насъ, оглянувшись на свое собственное прошлое, какъ онъ по отношенію къ своимъ главнѣйшимъ понятіямъ былъ *теологомъ*—въ дѣтствѣ, *метафизикомъ*—въ юности и *физикомъ*—въ зрѣломъ возрастѣ? Такая повѣрка доступна теперь всѣмъ людямъ, стоящимъ на уровнѣ своего вѣка.

Но кромѣ общаго или индивидуальнаго прямого наблюденія, доказывающаго справедливость закона, въ этомъ общемъ обзорѣ я долженъ еще указать особенно на теоретическія соображенія, заставляющія чувствовать необходимость такого закона.

Наиболѣе важное изъ этихъ соображеній, почерпнутое изъ самой природы предмета, состоитъ въ томъ, что во всякое время необходимо имѣть какую нибудь теорію, которая связывала бы между собою от-

*) Лица, которыя пожелали бы получить по этому предмету немедленно болѣе подробныя объясненія, могутъ съ пользою для себя обратиться къ тремъ моимъ статьямъ „Философскія соображенія о наукахъ и ученыхъ", помѣщеннымъ въ ноябрѣ 1825 г. въ сборникѣ, озаглавленномъ „Производитель" (№ 7, 8 и 10), и особенно въ первой части моей „Системы положительной политики", представленной въ апрѣлѣ 1824 г. въ Академіи Наукъ, гдѣ я впервые указалъ на открытіе вышеупомянутаго закона.

дѣльные факты, и что, вмѣстѣ съ тѣмъ, создать основанную на наблюденіяхъ теорію въ началѣ жизни человѣческаго духа было очевидно невозможно.

Со времени Бэкона всѣ здравомыслящіе люди повторяютъ, что истинны только тѣ познанія, которыя могутъ опираться на наблюденія. Это основное положеніе очевидно неопровержимо, если его примѣнять, какъ это и слѣдуетъ дѣлать, къ зрѣлому состоянію нашего ума. Но относительно самаго образованія нашихъ познаній не менѣе очевидно и то, что въ первобытномъ своемъ состояніи человѣческій духъ не могъ и не долженъ былъ мыслить такимъ образомъ, такъ какъ, если съ одной стороны всякая положительная теорія должна непремѣнно опираться на наблюденія, то съ другой стороны для того, чтобы приступить къ наблюденіямъ, нашъ умъ нуждается уже въ какой нибудь теоріи. Если, созерцая явленія, мы не связывали бы ихъ съ какимъ-нибудь принципомъ, то для насъ было бы невозможно не только соединить эти разрозненныя наблюденія и слѣдовательно извлечь изъ нихъ какую нибудь пользу, но даже и запомнить ихъ; чаще-же всего явленія остались бы незамѣченными.

Такимъ образомъ, подъ давленіемъ необходимости наблюдать, чтобы составлять себѣ истинныя теоріи, и не менѣе настойчивой необходимости создавать какія нибудь теоріи, чтобы имѣть возможность послѣдовательно наблюдать, умъ человѣческій съ самаго начала попадаетъ въ заколдованный кругъ, изъ котораго онъ никогда не выбрался бы, если-бы къ его счастью онъ не получилъ естественнаго выхода въ самопроизвольномъ развитіи теологическихъ понятій, давшихъ точку опоры его усиліямъ и доставившихъ пищу его дѣятельности. Таково, независимо отъ связанныхъ съ нимъ важныхъ соціальныхъ соображеній, на которыя я не могу даже намекнуть въ этотъ моментъ, основное положеніе, доказывающее логическую необходимость чисто теологическаго характера первоначальной философіи.

Эта необходимость становится еще болѣе осязательной, если мы обратимъ вниманіе на полное соотвѣтствіе теологической философіи съ самой природой тѣхъ изслѣдованій, на которыхъ въ своемъ дѣтствѣ человѣчество главнымъ образомъ сосредоточиваетъ всю свою дѣятельность.

Въ самомъ дѣлѣ, весьма замѣчательно, что именно вопросы, наиболѣе недоступные нашему пониманію, какъ-то: вопросы о внутренней природѣ вещей, происхожденіи и цѣли явленій, всего настойчивѣе задаются человѣчествомъ въ первобытномъ его состояніи, въ то время какъ всѣ дѣйствительно разрѣшимые вопросы считаются почти недостойными серьезнаго размышленія. Причину этого явленія легко понять, такъ какъ только опытъ далъ намъ возможность познать размѣръ нашихъ силъ, и, если-бы человѣкъ не началъ съ преувеличеннаго о нихъ мнѣнія, онѣ никогда не могли бы получить того развитія, къ какому онѣ способны. Этого требуетъ нашъ организмъ. Какъ бы то однако ни было, представимъ себѣ, насколько это возможно, это всеобщее и ясно выраженное настроеніе умовъ и зададимся вопросомъ, какой пріемъ получила-бы въ такую эпоху положительная философія (если-бы она могла тогда существовать), высшая цѣль которой состоитъ въ отысканіи законовъ явленій, а главной характеристической чертой является какъ разъ признаніе всѣхъ тѣхъ высокихъ таинъ, которыя теологическая философія съ удивительной легкостью объясняетъ до малѣйшихъ мелочей, недоступными для человѣческаго разума.

Тоже самое можно сказать, разсматривая съ практической точки зрѣнія природу изслѣдованій, занимающихъ первоначально человѣка. Въ этомъ отношеніи они сильно увлекаютъ человѣка перспективой неограниченной власти надъ внѣшнимъ міромъ, какъ бы предназначеннымъ исключительно для нашего пользованія и находящимся во всѣхъ своихъ явленіяхъ въ непрерывныхъ внутреннихъ соотношеніяхъ съ нашимъ существованіемъ. Всѣ эти несбыточныя надежды, всѣ эти преувеличенныя представленія о значеніи человѣка въ природѣ, порождаемыя геологической философіей и падающія при первомъ прикосновеніи философіи положительной, являются въ началѣ тѣмъ необходимымъ стимуломъ, безъ котораго совсѣмъ нельзя было-бы понять первоначальную рѣшимость человѣка взяться за трудныя изслѣдованія.

Мы стоимъ теперь такъ далеко отъ настроенія умовъ въ первобытныя времена, по крайней мѣрѣ по отношенію къ большинству явленій, что намъ трудно представить себѣ ясно значеніе и необходимость подобныхъ соображеній.

Человѣческій умъ теперь настолько созрѣлъ, что мы предпринимаемъ трудныя научныя изслѣдованія, не имѣя въ виду никакой посторонней могущей дѣйствовать на воображеніе цѣли, подобной той, какую всегда ставили себѣ астрологи и алхимики. Наша интеллектуальная дѣятельность въ достаточной степени возбуждается одной надеждой открыть законы явленій, простымъ желаніемъ подтвердить или опровергнуть какую нибудь теорію. Но это не могло быть въ дѣтствѣ человѣческаго духа; гдѣ напримѣръ, почерпнули-бы мы безъ привлекательныхъ химеръ астрологіи, безъ могучаго обмана алхиміи, постоянство и энергію, необходимыя для накопленія длиннаго ряда наблюденій и опытовъ, которые позже послужили фундаментомъ для созданія первыхъ положительныхъ теорій того или другого рода явленій?

Это условіе нашего интеллектуальнаго развитія давно ясно почувствовалъ Кеплеръ въ астрономіи и справедливо оцѣнилъ въ наше время Бертоле въ химіи.

Изъ всѣхъ этихъ соображеній видно, слѣдовательно, что если положительная философія и является дѣйствительно окончательнымъ состояніемъ человѣческаго духа, состояніемъ, къ которому онъ постоянно стремился все сильнѣе и сильнѣе, тѣмъ не менѣе эта философія по необходимости должна была сначала, и притомъ въ теченіе многихъ вѣковъ, пользоваться то какъ методомъ, то какъ предварительной доктриной, теологической философіей, отличительной чертой которой является ея самопроизвольность, вслѣдствіе чего въ началѣ только она и была возможна и только она могла въ достаточной степени заинтересовать младенческій умъ. Теперь уже очень легко понять, что для перехода отъ этой предварительной философіи къ окончательной человѣческій духъ долженъ былъ усвоить себѣ въ видѣ переходной ступени методъ и доктрины метафизики. Послѣднее замѣчаніе необходимо для пополненія общаго обзора указаннаго мною главнаго закона.

На самомъ дѣлѣ, не трудно понять, что нашъ умъ, принужденный двигаться только почти незамѣтными шагами, не могъ перейти вдругъ, непосредственно, отъ теологической философіи къ положительной. Теологія и физика такъ глубоко несовмѣстимы другъ съ другомъ, и понятія ихъ такъ радикально противоположны другъ другу, что прежде чѣмъ отказаться отъ однихъ, чтобы пользоваться исключительно другими, человѣческій умъ долженъ былъ нѣкоторое время прибѣгать къ переходнымъ понятіямъ, носящимъ смѣшанный характеръ и потому способнымъ содѣйствовать постепенному переходу.

Таково естественное назначеніе метафизическихъ понятій, такъ какъ сами по себѣ они не приносятъ никакой дѣйствительной пользы. Замѣняя при изученіи явленій сверхъестественное направляющее дѣйствіе соотвѣтствующею нераздѣльною сущностью, хотя и понимаемою сначала только какъ эманація перваго, человѣкъ понемногу пріучился принимать во вниманіе только самые факты, понятія же о метафизическихъ сущностяхъ явленій отодвигались все далѣе и далѣе до тѣхъ поръ, пока не превратились у всѣхъ здравомыслящихъ людей просто въ абстрактныя наименованія явленій. Невозможно вообразить себѣ, при помощи какого другого процесса нашъ разумъ могъ-бы перейти отъ совершенно сверхъестественныхъ къ чисто естественнымъ соображеніямъ, отъ теологическаго къ положительному образу мыслей.

Установивъ такимъ образомъ, насколько это возможно сдѣлать не входя въ неумѣстныя теперь подробныя разсужденія, общій законъ развитія человѣческаго духа, какъ я его понимаю, мы безъ труда можемъ сейчасъ же точно опредѣлить истинную природу положительной философіи, что и составляетъ главную задачу этой лекціи.

Изъ предшествовавшаго видно, что основная характеристическая черта положительной философіи состоитъ въ признаніи всѣхъ явленій подчиненными неизмѣннымъ естественнымъ *законамъ*, открытіе и низведеніе числа которыхъ до минимума и составляетъ цѣль всѣхъ нашихъ усилій, хотя мы и признаемъ абсолютно недоступнымъ и безсмысленнымъ исканіе первыхъ или послѣднихъ *причинъ*. Безполезно долго настаивать на принципѣ, который нынѣ хорошо извѣстенъ всѣмъ тѣмъ, кто нѣсколько глубже вникалъ въ основанныя на наблюденіи науки. Дѣйствительно, всякій знаетъ, что даже въ самыхъ совершенныхъ объясненіяхъ положительныхъ наукъ мы не претендуемъ на указаніе *первопричины* явленій, такъ какъ такимъ образомъ мы только отодвинули-бы затрудненіе назадъ; мы ограничиваемся точнымъ анализомъ обстоятельствъ возникновенія явленій и связываемъ ихъ другъ съ другомъ естественными отношеніями послѣдовательности и подобія.

Такимъ образомъ мы говоримъ—я привожу примѣръ, самый замѣчательный—что всѣ общія явленія вселенной *объясняются*, насколько это возможно, Ньютоновскимъ закономъ тяготѣнія, такъ какъ, съ одной стороны, эта чудная теорія представляетъ намъ все изумительное разнообразіе астрономическихъ явленій какъ одинъ и тотъ-же фактъ, разсматриваемый съ различныхъ точекъ зрѣнія: постоянное притяженіе молекулъ другъ къ другу прямо пропорціональное массамъ и обратно пропорціональное квадратамъ разстоянія; съ другой-же стороны, этотъ общій фактъ представляется какъ простое обобщеніе явленія, которое весьма близко къ намъ и которое поэтому мы считаемъ вполнѣ намъ извѣстнымъ, а именно тяжести тѣлъ на земной поверхности.

Что же касается того, что такое притяженіе и тяжесть сами по себѣ и каковы ихъ причины, то всѣ эти вопросы мы считаемъ неразрѣшимыми, выходящими за предѣлы вѣдѣнія положительной философіи, и съ полнымъ основаніемъ предоставляемъ ихъ воображенію теологовъ или тонкому анализу метафизиковъ.

Очевидное доказательство невозможности добиться рѣшенія этихъ вопросовъ можно видѣть въ томъ, что всякій разъ, когда по этому предмету пытались сказать что нибудь дѣйствительно разумное, наиболѣе великіе умы могли опредѣлять эти два принципа только одинъ при посредствѣ другого, утверждая, что притяженіе есть ни что иное какъ всеобщая тяжесть, и что тяжесть состоитъ просто въ земномъ притяженіи. Такія объясненія заставляютъ улыбаться, когда предъявляется претензія на знаніе внутренней природы вещей и способовъ происхожденія явленій, но составляютъ однако все, что мы имѣемъ наиболѣе удовлетворительнаго и показываютъ намъ тождественность двухъ родовъ явленій, которыя долго считались совершенно независимыми другъ отъ друга.

Ни одинъ здраво разсуждающій умъ не ищетъ теперь дальнѣйшихъ объясненій.

Было-бы легко увеличить число такихъ примѣровъ, и въ теченіе этого курса мы встрѣтимъ ихъ въ большомъ количествѣ, ибо въ эту именно сторону исключительно и направлены нынѣ всѣ главныя усилія ума.

Чтобы въ настоящее время указать хоть одну изъ современныхъ работъ, я выберу рядъ прекрасныхъ изслѣдованій г. Фурье по теоріи теплоты, который дастъ намъ весьма яркое подтвержденіе предшествовавшихъ общихъ замѣчаній. Дѣйствительно, въ этой работѣ, философскій характеръ которой столь очевидно положителенъ, раскрыты самые важные и точные законы термологическихъ явленій, а между тѣмъ авторъ ни разу не задаетъ себѣ вопроса относительно самой сущности теплоты и упоминаетъ объ оживленномъ спорѣ между сторонниками калорифической матеріи и учеными, приписывающими происхожденіе теплоты колебаніямъ эфира, только чтобы показать его безсодержательность. И все-таки же въ этомъ трудѣ разбираются самые высокіе вопросы, изъ которыхъ нѣкоторые никогда даже и не ставились,—ясное доказательство того, что человѣческій духъ, не берясь за недоступныя ему задачи и ограничивая свои изслѣдованія чисто положительными вопросами, можетъ въ нихъ найти неистощимую пищу для самой глубокой своей дѣятельности.

Охарактеризовавъ съ доступной для меня въ этомъ обзорѣ точностью духъ положительной философіи, развитію которой посвящается весь этотъ курсъ, я долженъ теперь изслѣдовать, въ какой эпохѣ своего движенія находится она въ настоящее время, и что еще нужно сдѣлать, чтобы закончить ея построеніе.

Для этого нужно прежде всего принять во вниманіе, что всѣ отрасли нашего знанія не могли съ одинаковой быстротой пройти три вышеуказанныя главныя фазы своего развитія и, слѣдовательно, не могли одновременно достигнуть положительнаго состоянія.

Въ этомъ отношеніи существуетъ необходимый и неизмѣнный порядокъ, которому слѣдовали и должны были слѣдовать въ своемъ развитіи различные виды нашихъ понятій, и обстоятельное обсужденіе котораго составляетъ необходимое дополненіе высказаннаго выше основнаго закона. Этотъ порядокъ представитъ исключительный предметъ слѣдующей лекціи. Въ настоящее же время намъ достаточно знать, что онъ зависитъ отъ различія въ природѣ явленій, и опредѣляется степенью ихъ общности, простоты и относительной независимости, тремя условіями, ведущими, не смотря на все свое различіе, къ одной и той же цѣли. Такъ къ положительнымъ теоріямъ были сведены сперва астрономическія явленія, какъ наиболѣе общія, наиболѣе простыя и наиболѣе независимыя отъ всѣхъ другихъ, затѣмъ, послѣдовательно и по тѣмъ же причинамъ, явленія собственно земной физики, химіи, и наконецъ физіологіи.

Нельзя указать точно на начало этого переворота, такъ какъ о немъ, какъ и о всѣхъ великихъ событіяхъ въ жизни человѣчества, можно сказать, что онъ совершился понемногу, въ особенности со времени работъ Аристотеля и Александрійской школы, и затѣмъ со времени введенія арабами естественныхъ наукъ въ Западную Европу.

Однако, такъ какъ во избѣжаніе неясности мысли полезно было бы точно опредѣлить эпоху, я укажу на сильное движеніе ума человѣческаго, вызванное два вѣка тому назадъ соединеннымъ воздѣйствіемъ правилъ Бэкона, идей Декарта и открытій Галилея, какъ на моментъ, начиная съ котораго духъ положительной философіи сталъ проявляться какъ очевидное противоположеніе теологическимъ и метафизическимъ воззрѣніямъ; именно тогда положительныя идеи окончательно освободились отъ примѣси суевѣрія и схоластики, которая болѣе или менѣе скрывала истинный характеръ всѣхъ предыдущихъ работъ.

Съ этой памятной эпохи подъемъ положительной философіи и паденіе философіи теологической и метафизической опредѣлились чрезвычайно ясно, и наконецъ сдѣлались настолько очевидными, что нынѣ каждый понимающій духъ времени наблюдатель не можетъ не признать постояннаго стремленія человѣческаго ума къ положительнымъ наукамъ и безповоротнаго отрицанія тѣхъ безсмысленныхъ доктринъ и предварительныхъ методовъ, которые были годны только для первыхъ его проявленій. Такимъ образомъ этотъ основной переворотъ долженъ непремѣнно совершиться во всемъ своемъ объемѣ, и если положительной философіи остается сдѣлать еще какое нибудь большое завоеваніе и подчинить еще какую нибудь область интеллектуальнаго царства, то можно быть увѣреннымъ, что и тамъ преобразованіе совершится, какъ оно совершилось во всѣхъ другихъ областяхъ; было бы очевидно непослѣдовательно предполагать, что человѣческій духъ, столь склонный къ единству методовъ, сохранитъ на неопредѣленное время для одного класса явленій свой первобытный способъ разсужденія послѣ того, какъ для всѣхъ остальныхъ явленій онъ принялъ новый прямопротивоположный ходъ изслѣдованія.

Итакъ все приводится къ простому вопросу о томъ, обнимаетъ-ли всѣ разряды явленій положительная философія, которая въ послѣдніе два вѣка получила такое широкое распространеніе? Очевидно, нѣтъ, и поэтому предстоитъ еще большая научная работа для того, чтобы дать положительной философіи характеръ универсальности, необходимой для окончательнаго ея построенія.

Дѣйствительно, въ четырехъ только что названныхъ главныхъ категоріяхъ естественныхъ явленій, т. е. явленіяхъ астрономическихъ, физическихъ, химическихъ и физіологическихъ, можно замѣтить существенный пропускъ, именно явленій соціальныхъ, которыя, хотя и входятъ неявно въ число явленій физіологическихъ, но заслуживаютъ однако какъ по своей важности, такъ и по особеннымъ трудностямъ ихъ изученія, выдѣленія ихъ въ особую категорію. Эта послѣдняя группа понятій, относящихся къ наиболѣе частнымъ, наиболѣе сложнымъ и наиболѣе зависящимъ отъ другихъ явленіямъ, благодаря этому одному обстоятельству должна была совершенствоваться медленнѣе всѣхъ другихъ, даже если-бы и не было тѣхъ особыхъ неблагопріятныхъ условій, которыя мы разсмотримъ позднѣе. Какъ-бы то ни было, очевидно, что соціальныя явленія не вошли еще въ область положительной философіи, и теологическіе и метафизическіе методы, которыми при изученіи другихъ родовъ явленій никто не пользуется ни какъ средствомъ изслѣдованія, ни даже какъ пріемомъ аргументаціи, до сихъ поръ и въ томъ и въ другомъ отношеніи только одни и примѣняются при изученіи соціальныхъ явленій, хотя недостаточность этихъ методовъ вполнѣ сознается всѣми разумными людьми, утомленными безконечными и пустыми пререканіями между божественнымъ правомъ и главенствомъ народа.

И такъ вотъ очень крупный, но очевидно единственный пропускъ, который надо заполнить, чтобы закончить построеніе положительной философіи. Теперь, когда человѣческій духъ создалъ небесную физику и физику земную, механическую и химическую, а также и физику органическую, растительную и животную, ему остается только закончить систему наблюдательныхъ наукъ созданіемъ *соціальной физики*. Такова въ настоящее время самая крупная и самая настоятельная во многихъ существенныхъ отношеніяхъ потребность нашего ума, и такова, я осмѣливаюсь это сказать, первая и особая цѣль этого курса.

Относящіяся къ изученію соціальныхъ явленій идеи, которыя я попытаюсь изложить и зародышъ которыхъ можно, какъ я надѣюсь, найти даже въ этой лекціи, не имѣютъ цѣлью тотчасъ-же дать соціальной физикѣ ту-же степень совершенства, какую имѣютъ уже болѣе раннія отрасли положительной философіи; такое намѣреніе было-бы очевидно несбыточно, такъ какъ даже эти послѣднія проявляютъ относительно развитія своего огромное и притомъ совершенно неизбѣжное неравенство.

Мои идеи должны будутъ только придать послѣднему классу нашихъ познаній тотъ положительный характеръ, который уже имѣютъ другія науки. Если только это условіе будетъ въ дѣйствительности выполнено, современная философская система во всей своей совокупности будетъ поставлена на прочное основаніе, такъ какъ тогда не будетъ существовать ни одного доступнаго наблюденію явленія, которое не входило-бы въ одну изъ установленныхъ выше пяти великихъ категорій явленій астрономическихъ, физическихъ, химическихъ, физіологическихъ и соціальныхъ. Послѣ того какъ всѣ наши понятія станутъ однородными, философія окончательно достигнетъ положительнаго состоянія; она не будетъ уже въ состояніи измѣнять свой характеръ, и ей останется только развиваться безконечно путемъ новыхъ, постоянно увеличивающихся пріобрѣтеній, которыя явятся неизбѣжнымъ результатомъ новыхъ наблюденій и болѣе глубокихъ размышленій.

Получивъ такимъ образомъ характеръ универсальности, котораго она еще не имѣетъ, положительная философія, сохраняя свое естественное превосходство, будетъ въ состояніи вполнѣ замѣнить теологическую и метафизическую философіи, универсальность которыхъ въ настоящее время является ихъ единственнымъ истиннымъ достояніемъ, и которыя, потерявъ свое преимущество, будутъ имѣть для нашихъ потомковъ только чисто историческій интересъ.

Послѣ такого объясненія спеціальной цѣли этого курса легко уже понять его вторую общую цѣль, которая дѣлаетъ его курсомъ положительной философіи, а не только курсомъ соціальной физики.

Дѣйствительно, такъ какъ построеніе соціальной физики завершаетъ систему естественныхъ наукъ, то становится возможнымъ и даже необходимымъ подвести итоги всѣмъ пріобрѣтеннымъ познаніямъ, достигшимъ къ этому времени опредѣленнаго и однороднаго состоянія, чтобы согласовать ихъ и представить какъ вѣтви одного дерева, а не продолжать считать ихъ за отдѣльныя тѣла.

Съ этою именно цѣлью, прежде чѣмъ приступить къ изученію соціальныхъ явленій, я послѣдовательно, въ указанномъ выше энциклопедическомъ порядкѣ, разсмотрю существующія уже различныя положительныя науки.

Мнѣ кажется, что незачѣмъ предупреждать о томъ, что здѣсь не можетъ быть и рѣчи о рядѣ спеціальныхъ курсовъ по отдѣльнымъ главнымъ отраслямъ естественной философіи. Не говоря уже о времени, необходимомъ для подобнаго предпріятія, ясно, что подобное намѣреніе не можетъ быть осуществлено мной, и, кажется, я могу сказать — никѣмъ другимъ при современномъ намъ состояніи образованія человѣчества. Совсѣмъ наоборотъ, для правильнаго пониманія курса подобнаго настоящему требуется предварительное изученіе отдѣльныхъ наукъ, которыя въ немъ будутъ разсмотрѣны. Безъ этого очень трудно понять и совершенно невозможно оцѣнить тѣ философскія размышленія, которымъ будутъ подлежать различныя науки. Однимъ словомъ я предполагаю изложить *курсъ положительной философіи,* а не курсъ положительныхъ наукъ. Я разсматриваю здѣсь каждую изъ основныхъ наукъ только по отношенію ко всей положительной системѣ и по характеризующему ее духу, т. е. какъ по отношенію къ ея болѣе важнымъ методамъ, такъ и по отношенію къ ея главнымъ результатамъ. Чаще всего я буду даже вынужденъ ограничиться указаніемъ на послѣдніе, пользуясь спеціальными изслѣдованіями, и постараюсь затѣмъ опредѣлить ихъ важность.

Чтобы резюмировать указанія относительно двойной цѣли этого курса, я долженъ замѣтить, что оба предмета, спеціальный и общій, хотя и различны сами по себѣ, но по необходимости нераздѣльны, такъ какъ, съ одной стороны, невозможно представить себѣ курса положительной философіи безъ соціальной физики, ибо въ такомъ случаѣ положительной философіи недоставало бы одного изъ ея существенныхъ элементовъ, и благодаря этому она не имѣла бы того характера всеобщности, который долженъ быть ея главнымъ аттрибутомъ и который отличаетъ наше настоящее изслѣдованіе отъ ряда спеціальныхъ работъ. Съ другой стороны, возможно ли съ увѣренностью приступить къ положительному изученію соціальныхъ явленій, если умъ не подготовленъ еще глубокими размышленіями надъ положительными методами, испытанными уже въ приложеніи къ менѣе сложнымъ предметамъ, и, сверхъ того, не вооруженъ знаніемъ главныхъ законовъ другихъ явленій, которыя оказываютъ болѣе или менѣе прямое вліяніе на явленія соціальныя?

Несмотря на то, что не всѣ основныя науки внушаютъ одинаковый интересъ неразвитымъ умамъ, нѣтъ однако ни одной, которой можно было бы пренебречь въ изслѣдованіи подобномъ предпринятому нами. Что же касается ихъ значенія для блага человѣчества, то конечно всѣ науки, если ихъ разсмотрѣть глубже, оказываются равными. Науки, результаты которыхъ на первый взглядъ представляютъ меньшій интересъ съ практической точки зрѣнія, неотразимо влекутъ къ себѣ или высокимъ совершенствомъ своихъ методовъ, или тѣмъ, что онѣ составляютъ необходимую основу для другихъ наукъ. Объ этомъ замѣчаніи я буду имѣть случай поговорить особо въ слѣдующей лекціи.

Чтобы насколько возможно предупредить всякія неправильныя толкованія, которыя можно ожидать по поводу столь новаго курса, какимъ является настоящій, я считаю нужнымъ къ предыдущимъ объясненіямъ присоединить еще нѣсколько соображеній, относящихся непосредственно къ всеобщности спеціальныхъ познаній, которую невдумчивые судьи могутъ счесть тенденціей этого курса, и которая вполнѣ справедливо притается совершенно противной истинному духу положительной философіи. Эти соображенія получатъ еще большее значеніе потому, что они представятъ духъ положительной философіи съ новой точки зрѣнія, которая можетъ окончательно разъяснить общее о ней понятіе.

Въ первобытномъ состояніи нашихъ познаній не существуетъ правильнаго раздѣленія умственнаго труда, и одни и тѣ же лица одновременно занимаются всѣми науками. Такая организація человѣческаго труда, сначала неизбѣжная и даже необходимая, какъ мы это докажемъ позже, понемногу измѣняется по мѣрѣ развитія отдѣльныхъ разрядовъ понятій. По закону, необходимость котораго очевидна, каждая отрасль научнаго знанія незамѣтно отдѣляется отъ общаго ствола, какъ только она разростется настолько, чтобы выдержать отдѣльную обработку, т. е. какъ только она сдѣлается способной сама по себѣ занимать умы нѣсколькихъ человѣкъ.

Этому раздѣленію различныхъ видовъ изслѣдованій между нѣсколькими разрядами ученыхъ мы и обязаны тѣмъ удивительнымъ развитіемъ, котораго въ наши дни достигла каждая отдѣльная отрасль человѣческаго знанія, и которое дѣлаетъ въ настоящее время очевидно невозможной универсальность научныхъ изслѣдованій, столь легкую и обычную въ древности.

Однимъ словомъ, раздѣленіе умственнаго труда, все болѣе и болѣе совершенствуемое, является однимъ изъ самыхъ важныхъ и характерныхъ аттрибутовъ положительной философіи.

Но, признавая вполнѣ поразительные результаты этого раздѣленія труда, видя отнынѣ въ немъ истинную основу организаціи ученаго міра, невозможно съ другой стороны не почувствовать огромныхъ неудобствъ, которыя оно, при настоящемъ его состояніи, порождаетъ благодаря чрезмѣрной узости идей, исключительно занимающихъ каждый отдѣльный умъ. Этотъ печальный фактъ конечно неизбѣженъ и до нѣкоторой степени привходитъ въ самый принципъ раздѣленія труда, такъ что мы въ этомъ отношеніи никакими мѣрами не сравнимся съ древними, превосходство которыхъ однако происходило главнымъ образомъ вслѣдствіе ограниченности объема ихъ познаній.

Однако мнѣ кажется, что подходящими мѣрами можно избѣжать самыхъ гибельныхъ послѣдствій чрезмѣрной спеціализаціи, не вредя при этомъ живительному дѣйствію раздѣленія изслѣдованій. Необходимо этимъ заняться серьезно, ибо указанныя неудобства, которыя уже по своей природѣ стремятся все болѣе и болѣе увеличиваться, становятся очень замѣтными. По всеобщему признанію установленныя ради достиженія высшей степени совершенства нашихъ работъ дѣленія различныхъ отраслей естественной философіи въ концѣ концовъ не могутъ не считаться искуственными. Не будемъ забывать и того, что, несмотря на такое признаніе, въ ученомъ мірѣ очень мало людей, которые охватывали бы совокупность понятій одной науки, въ свою очередь составляющей только часть великаго цѣлаго. Большинство же вполнѣ довольствуется спеціальнымъ изученіемъ болѣе или менѣе обширной части одной опредѣленной науки, мало заботясь объ отношеніи ихъ работъ къ общей системѣ положительныхъ знаній. Поспѣшимъ исправить это зло, пока оно не сдѣлалось еще тяжелѣе. Примемъ мѣры, чтобы въ концѣ концовъ духъ человѣка не потерялся въ мелочахъ. Не будемъ скрывать отъ себя, что здѣсь-то и находится слабый пунктъ положительной философіи, на который съ нѣкоторой надеждой на успѣхъ могутъ произвести нападеніе сторонники теологической и метафизической философіи.

Дѣйствительное средство остановить разъѣдающее вліяніе, которымъ слишкомъ большая спеціализація отдѣльныхъ изслѣдованій угрожаетъ интеллектуальной будущности, состоитъ конечно не въ возвращеніи къ прежнему смѣшенію труда, которое заставило-бы человѣчество пойти назадъ и которое къ счастью сдѣлалось теперь вообще невозможнымъ.

Наоборотъ, это средство состоитъ въ усовершенствованіи самого раздѣленія труда. Достаточно, дѣйствительно, изученіе общихъ положеній наукъ обратить еще въ отдѣльную самостоятельную науку. Пусть новый рядъ ученыхъ, получившихъ подобающую подготовку, не отдаваясь спеціальному изученію какой-нибудь отдѣльной отрасли естественной философіи, но основываясь на знакомствѣ съ общимъ состояніемъ положительныхъ наукъ, посвятитъ себя исключительно точному опредѣленію духа этихъ наукъ, изслѣдованію ихъ соотношеній и связи другъ съ другомъ, низведенію, если таковое возможно, присущихъ имъ принциповъ къ наименьшему числу общихъ принциповъ, постоянно слѣдуя при этомъ основнымъ правиламъ положительнаго метода. Пусть въ тоже время другіе ученые, съ помощью образованія, направленнаго на ознакомленіе съ совокупностью положительныхъ знаній, получатъ возможность, прежде чѣмъ взяться за свои спеціальныя изслѣдованія, воспользоваться свѣтомъ, проливаемымъ учеными, занимающимися общими положеніями наукъ, и въ свою очередь исправляютъ полученные тѣми результаты: это и есть то положеніе вещей, къ которому современные ученые приближаются все болѣе и болѣе. Какъ только оба эти требованія будутъ исполнены—а возможность этого очевидна—раздѣленіе научнаго труда безъ всякой опасности можетъ быть доведено до той степени, которой потребуетъ развитіе отдѣльныхъ отраслей знанія. При существованіи особаго, постоянно провѣряемаго всѣми другими, класса ученыхъ, на обязанности которыхъ исключительно и постоянно лежало бы установленіе связи каждаго новаго открытія съ общей системой, не будетъ болѣе основанія бояться, что слишкомъ большое вниманіе къ частностямъ помѣшаетъ схватить цѣлое. Однимъ словомъ, послѣ этого организація научнаго міра будетъ вполнѣ закончена и будетъ развиваться безпредѣльно, сохраняя постоянно все тотъ же характеръ.

Образовать изъ изученія общихъ научныхъ положеній особый отдѣлъ всего умственнаго труда значитъ только распространить приложеніе того же принципа раздѣленія, который послѣдовательно создалъ отдѣльныя спеціальности, такъ какъ до тѣхъ поръ, пока положительныя науки были мало развиты, ихъ взаимныя отношенія не имѣли такого значенія, чтобы вызвать, систематически по крайней мѣрѣ, появленіе особаго класса работъ, и необходимость этой новой науки не была особенно настоятельна; въ настоящее же время каждая изъ наукъ настолько развилась, что изученіе ихъ взаимныхъ отношеній можетъ дать матеріалъ для цѣлаго ряда изслѣдованій, а вмѣстѣ съ тѣмъ новая наука становится необходимой для того, чтобы предупредить разрозненность человѣческихъ понятій.

Такъ именно я понимаю назначеніе положительной философіи въ общей системѣ наукъ положительныхъ въ точномъ смыслѣ этого слова. Такова, по крайней мѣрѣ, цѣль этого курса.

Теперь, послѣ того какъ я попытался опредѣлить общій духъ курса положительной философіи, насколько это было возможно при первомъ обзорѣ, чтобы сообщить картинѣ дѣйствительный ея характеръ, считаю нужнымъ бѣгло указать на главную пользу, которую подобная работа можетъ принести прогрессу человѣчества, если всѣ существенныя условія будутъ надлежащимъ образомъ выполнены. Этотъ послѣдній рядъ соображеній я ограничу указаніемъ четырехъ основныхъ свойствъ.

Во первыхъ, изученіе положительной философіи, разсматривающей результаты дѣятельности нашихъ умственныхъ способностей, даетъ намъ единственное раціональное средство обнаружить логическіе законы человѣческаго ума, къ отъисканію которыхъ до сихъ поръ примѣнялись средства, весьма мало для того пригодныя.

Чтобы разъяснить вполнѣ мое мнѣніе по этому предмету, я долженъ сперва напомнить весьма важное философское понятіе, высказанное г. де-Бленвиллемъ въ прекрасномъ введеніи къ его *Общимъ принципамъ сравнительной анатоміи.*

Онъ говоритъ, что всякое дѣятельное существо, и въ особенности всякое живое существо, во всѣхъ своихъ проявленіяхъ можетъ быть изучаемо съ двухъ точекъ зрѣнія, въ статическомъ и въ динамическомъ отношеніяхъ, т. е. какъ существо, способное дѣйствовать, и какъ дѣйствующее на самомъ дѣлѣ. Ясно, что всѣ соображенія, которыя можно представить, непремѣнно войдутъ въ тотъ или другой разрядъ. Примѣнимъ теперь это блестящее основное положеніе къ изученію отправленій нашего ума.

При разсмотрѣніи этихъ функцій съ статической точки зрѣнія, ихъ изученіе можетъ состоять только въ опредѣленіи органическихъ условій, отъ которыхъ онѣ зависятъ, и образуетъ такимъ образомъ существенную часть анатоміи и физіологіи. Если-же ихъ разсматривать съ динамической точки зрѣнія, то вопросъ приводится къ изученію дѣйствительнаго хода работы человѣческаго ума путемъ изслѣдованія пріемовъ, примѣненныхъ въ свое время къ пріобрѣтенія различныхъ точныхъ знаній, что по существу и составляетъ главный предметъ положительной философіи, какъ я ее опредѣлилъ въ этой лекціи. Однимъ словомъ, смотря на научныя теоріи какъ на великіе логическіе факты, мы только путемъ глубокаго наблюденія этихъ фактовъ можемъ подняться до пониманія логическихъ законовъ.

Таковы очевидно два единственные общіе пріема, пополняющіе другъ друга, съ помощью которыхъ можно получить нѣкоторыя истинныя раціональныя познанія относительно интеллектуальныхъ явленій.

Отсюда видно, что здѣсь совсѣмъ нѣтъ мѣста для той ложной психологіи, представляющей послѣдней видоизмѣненіе теологіи, которую такъ безуспѣшно пытаются теперь оживить и которая, не обращая вниманія ни на физіологическое изученіе нашихъ мыслительныхъ органовъ, ни на наблюденіе раціональныхъ процессовъ, дѣйствительно руководящихъ нашими научными изслѣдованіями, стремится открыть основные законы человѣческаго духа, разсматривая ихъ сами по себѣ, т. е. превращая въ полную абстракцію и причины, и слѣдствія.

Положительная философія пріобрѣла свое превосходство понемногу начиная со времени Бэкона; теперь она, хотя иногда и косвенно, получила такое вліяніе на умы, оставшіеся даже наиболѣе чуждыми ея колоссальному развитію, что метафизики, занимающіеся изученіемъ нашего разума, могли надѣяться замедлить паденіе своей мнимой науки только пытаясь представить и свои доктрины основанными какъ-бы на наблюденіи фактовъ. Съ этой цѣлью они въ послѣднее время, съ помощью очень страннаго ухищренія, предложили отличать два равно важные рода наблюденія, внѣшнее и внутреннее, изъ которыхъ послѣднее предназначено исключительно для изученія интеллектуальныхъ явленій. Здѣсь не мѣсто вдаваться въ подробный разборъ этого основнаго софизма, и я ограничусь указаніемъ на главное соображеніе, которое покажетъ ясно, что это прямое созерцаніе духа въ самомъ себѣ есть чистѣйшая иллюзія.

Недавно еще считали, что для объясненія зрѣнія достаточно указать, что свѣтовое дѣйствіе тѣлъ рисуетъ на ретинѣ изображенія, представляющія собой внѣшнія формы и цвѣта. На это физіологи основательно возражали, что если-бы свѣтовыя впечатлѣнія дѣйствовали какъ *картины*, то нужно было-бы имѣть еще одинъ глазъ, чтобы видѣть ихъ. Не примѣнимо-ли тоже возраженіе еще болѣе въ данномъ случаѣ?

Въ самомъ дѣлѣ, понятно, что въ силу неизбѣжной необходимости человѣкъ можетъ прямо наблюдать всякого рода явленія кромѣ происходящихъ въ немъ самомъ. Кто будетъ тутъ наблюдать? Относительно моральныхъ явленій еще можно допустить, что человѣкъ въ состояніи наблюдать въ самомъ себѣ свои страсти, если исходить изъ основаннаго на анатоміи соображенія, что органы, черезъ посредство коихъ наши страсти проявляются, отдѣлены отъ органовъ, предназначенныхъ для производства наблюденій. Но если бы даже каждый изъ насъ имѣлъ случай сдѣлать надъ собой подобныя наблюденія, то они, очевидно, никогда не имѣли бы большой научной цѣнности, и лучшимъ средствомъ изученія страстей все же останется наблюденіе внѣ себя, ибо всякое очень ярко выраженное состояніе страсти, т. е. какъ разъ то, которое всего важнѣе было бы изслѣдовать, является конечно несовмѣстимымъ съ состояніемъ наблюденія. Что-же касается такого-же наблюденія мыслительныхъ явленій въ самый моментъ ихъ осуществленія, то это очевидно невозможно. Мыслящій человѣкъ не можетъ раздѣлиться на двѣ половины, изъ которыхъ одна будетъ мыслить, а другая наблюдать за мышленіемъ. Какъ можетъ быть произведено наблюденіе въ случаѣ, когда наблюдающій и наблюдаемый органы тождественны?

Итакъ, этотъ мнимый психологическій методъ по самому своему основанію не имѣетъ никакого значенія.

Обратимъ также вниманіе на то, къ какимъ глубоко противорѣчащимъ другъ другу процессамъ онъ насъ сразу приводитъ! Съ одной стороны вамъ совѣтуютъ насколько возможно изолировать себя отъ всякихъ внѣшнихъ ощущеній, и въ особенности избѣгать умственной работы, ибо что станется съ *внутреннимъ* наблюденіемъ, если вы будете заниматься хотя бы самымъ простымъ вычисленіемъ? Съ другой же стороны, послѣ того какъ вы путемъ различныхъ предосторожностей достигнете наконецъ этого совершеннаго состоянія умственнаго сна, вы должны заняться созерцаніемъ дѣйствій, совершающихся въ вашемъ умѣ, когда тамъ ничего не совершается! Нѣтъ сомнѣнія въ томъ, что наши потомки когда нибудь увидятъ такія претензіи въ комедіи.

Результаты такого страннаго способа наблюденія вполнѣ соотвѣтствуютъ его принципу. Уже двѣ тысячи лѣтъ метафизики занимаются подобнымъ образомъ психологіей, и до сихъ поръ они не согласились ни на одномъ понятномъ и твердо установленномъ положеніи. Даже теперь они раздѣлены на множество школъ, безпрерывно спорящихъ о первыхъ элементахъ ихъ доктринъ. *Внутреннее наблюденіе* порождаетъ почти столько же разнорѣчивыхъ мнѣній, сколько есть людей, вѣрящихъ, что они имъ занимаются.

Настоящіе ученые, люди, преданные положительнымъ изслѣдованіямъ, до сихъ поръ напрасно просятъ этихъ психологовъ указать хоть на одно истинное открытіе, большое или маленькое, которымъ мы были бы обязаны ихъ прославленному методу. Это не значитъ, что они не принесли абсолютно никакой пользы общему прогрессу нашего знанія, не говоря уже о важной услугѣ, которую они оказали, поддерживая дѣятельность нашего ума въ такую эпоху, когда онъ не могъ найти для себя болѣе питательной пищи. Можно однако утверждать, что все, что въ ихъ сочиненіяхъ, по счастливому выраженію знаменитаго положительнаго философа (Кювье), не состоитъ изъ метафоръ, принимаемыхъ за разсужденія, а выражаетъ собою какое-нибудь истинное положеніе, найдено не съ помощью ихъ мнимаго метода, а было получено путемъ дѣйствительныхъ наблюденій надъ движеніемъ человѣческаго духа, наблюденій, которымъ отъ времени до времени развитіе наукъ давало почву.

Но даже и эти положенія, очень малочисленныя, провозглашаемыя съ такимъ шумомъ, самымъ появленіемъ своимъ обязанныя только измѣнѣ психологовъ собственному мнимому методу, чаще всего оказываются или слишкомъ преувеличенными, или весьма неполными, и стоятъ ниже сдѣланныхъ учеными безъ всякаго самовосхваленія замѣчаній о пріемахъ, которыми они пользуются. Легко было-бы привести нѣсколько поразительныхъ тому примѣровъ, если-бы я не боялся слишкомъ растянуть это разсужденіе; припомните, между прочимъ, что̀ сталось съ теоріей знаковъ.

Соображенія, которыя я только что изложилъ, говоря о наукѣ разсужденія, еще болѣе очевидны, если ихъ приложить къ искусству разсужденія.

Дѣйствительно, если дѣло идетъ не только о томъ, чтобы знать что̀ такое положительный методъ, а чтобы имѣть глубокое и ясное понятіе о немъ и быть въ состояніи примѣнять его на дѣлѣ, то его надо разсматривать въ дѣйствіи, т. е. надо изучать различныя приложенія этого метода, уже сдѣланныя до сихъ поръ человѣческимъ духомъ. Однимъ словомъ, очевидно, что только путемъ философскаго изученія наукъ можно достигнуть этого результата. Методъ не можетъ быть изучаемъ отдѣльно отъ изслѣдованій, при которыхъ онъ былъ примѣненъ: иначе получается наука мертвая, неспособная обогатить умъ людей, надъ ней работающихъ. Все что̀, разсматривая методъ абстрактно, можно о немъ сказать, сводится къ расплывчатымъ общимъ мѣстамъ, которыя не могутъ оказать вліянія на умъ человѣка. Установивъ прочно, въ видѣ логическаго тезиса, что всѣ наши познанія должны быть основаны на наблюденіи, что мы должны переходить то отъ фактовъ къ принципамъ, то отъ принциповъ къ фактамъ, и еще нѣсколько подобныхъ афоризмовъ, мы будемъ понимать методъ гораздо хуже, чѣмъ тотъ, кто сколь-нибудь глубже, даже безъ всякаго философскаго намѣренія, вникъ хоть въ одну положительную науку. Благодаря непониманію этого важнаго факта наши психологи начали принимать свои мечты за науку, думая, что однимъ чтеніемъ правилъ Бэкона и разсужденій Декарта они постигли положительный методъ.

Я не знаю, будетъ-ли возможно въ будущемъ составить *a priori* надлежащій обзоръ методовъ независимо отъ философскаго изученія наукъ, но я вполнѣ убѣжденъ въ томъ, что подобное предпріятіе неисполнимо теперь, такъ какъ общіе логическіе пріемы еще не могутъ быть достаточно полно объяснены независимо отъ ихъ примѣненія. Я рѣшаюсь кромѣ того сказать, что если даже въ будущемъ это предположеніе будетъ приведено въ исполненіе, что можно еще себѣ представить, то только путемъ правильнаго примѣненія научныхъ пріемовъ можно будетъ создать хорошую систему интеллектуальныхъ привычекъ, что и составляетъ существенную цѣль изученія методовъ. Теперь мнѣ незачѣмъ болѣе настаивать на этомъ предметѣ, къ которому мы будемъ часто возвращаться въ теченіе этого курса, и по поводу котораго я представлю новыя замѣчанія въ слѣдующей лекціи.

Итакъ первымъ важнымъ и прямымъ результатомъ положительной философіи должно быть проявленіе путемъ опыта законовъ, которымъ слѣдуютъ въ своей дѣятельности наши умственныя отправленія, а слѣдовательно и точное познаніе общихъ правилъ, способныхъ вѣрно вести насъ въ поискахъ за истиной.

Вторымъ не менѣе важнымъ, но еще болѣе интереснымъ слѣдствіемъ, которое необходимо повлечетъ за собой прочное обоснованіе положительной философіи, опредѣленіе коей дано въ этой лекціи, является руководящая роль ея во всеобщемъ преобразованіи нашей системы воспитанія.

Въ самомъ дѣлѣ здравомыслящіе люди уже теперь единогласно признаютъ необходимость замѣны нашего, по существу своему все еще теологическаго, метафизическаго и литературнаго воспитанія, воспитаніемъ *положительнымъ*, соотвѣтствующимъ духу нашей эпохи и примѣнимымъ къ потребностямъ современной цивилизаціи. Различныя попытки, усиливавшіяся все болѣе и болѣе въ послѣдній вѣкъ, а особенно въ наше время, распространять и постоянно расширять положительное обученіе, попытки, которымъ различныя европейскія правительства постоянно и охотно оказывали свое содѣйствіе (или даже предпринимали ихъ сами) доказываютъ, что со всѣхъ сторонъ само собою зарождается желаніе дѣйствовать въ этомъ направленіи. Но, помогая насколько возможно этимъ полезнымъ попыткамъ, не слѣдуетъ скрывать отъ себя, что при настоящемъ состояніи нашихъ идей онѣ не имѣютъ ни малѣйшей надежды достигнуть своей главной цѣли,—полнаго перерожденія всеобщаго образованія. Ибо исключительная спеціализація и ясно выраженное стремленіе къ обособленію, которыя до сихъ поръ характеризуютъ наши пріемы понимать и разработывать науки, оказываютъ конечно большое вліяніе на способъ преподаванія ихъ. Если кто-нибудь задумаетъ въ настоящее время изучить главныя отрасли естественной философіи для того, чтобы составить себѣ общую систему положительныхъ идей, то онъ будетъ принужденъ изучать каждую науку отдѣльно, пользуясь тѣми же пріемами и съ тѣми же подробностями, какъ если-бы онъ хотѣлъ сдѣлаться спеціалистомъ-астрономомъ, химикомъ и т. п., что дѣлаетъ положительное образованіе почти невозможнымъ и по необходимости крайне несовершеннымъ даже для самыхъ сильныхъ умовъ, находящихся въ самыхъ благопріятныхъ условіяхъ. Подобный образъ дѣйствій при примѣненіи къ всеобщему образованію оказался-бы конечно чистѣйшей безсмыслицей, а между тѣмъ послѣднее безусловно требуетъ совокупности положительныхъ идей по всѣмъ главнымъ классамъ явленій природы. Этой то совокупности идей и суждено, въ болѣе или менѣе широкихъ размѣрахъ, стать даже въ народныхъ массахъ постоянной основой человѣческихъ соображеній, создать, однимъ словомъ, общій духъ нашихъ потомковъ. Чтобы естественная философія могла завершить уже столь подготовленное преобразованіе нашей интеллектуальной системы, необходимо слѣдовательно, чтобы входящія въ ея составъ науки представлялись всѣмъ отдѣльными вѣтвями, выходящими изъ одного ствола, и прежде всего были сведены къ тому, что̀ составляетъ ихъ суть, т. е. къ ихъ главнымъ методамъ и наиболѣе важнымъ результатамъ. Только при такомъ условіи преподаваніе наукъ можетъ сдѣлаться у насъ основаніемъ новой дѣйствительно раціональной системы всеобщаго образованія. Пусть затѣмъ къ этому начальному образованію присоединяются различныя спеціальныя научныя занятія, соотвѣтствующія тѣмъ спеціальнымъ формамъ образованія, которыя должны слѣдовать за общимъ — въ этомъ отношеніи очевидно не можетъ возникать никакихъ сомнѣній. Но главное соображеніе, на которое я хотѣлъ здѣсь указать, состоитъ въ томъ, что всѣ эти спеціальныя занятія были-бы конечно недостаточны для дѣйствительнаго обновленія системы нашего образованія, если-бы онѣ не опирались на предварительное общее образованіе, представляющее прямой результатъ опредѣленной въ этой лекціи положительной философіи.

Спеціальному изученію общихъ положеній наукъ суждено не только преобразовать воспитаніе, но и способствовать прогрессу отдѣльныхъ положительныхъ наукъ; это-то и составляетъ третье основное свойство, на которое я желаю указать.

Дѣйствительно, дѣленіе, которое мы устанавливаемъ между науками, хотя и не вполнѣ произвольно, какъ нѣкоторые это думаютъ, однако по существу своему является искусственнымъ. На самомъ дѣлѣ предметъ всѣхъ изслѣдованій одинъ, и мы подраздѣляемъ его только съ цѣлью обособить встрѣчающіяся при его изученіи затрудненія, чтобы потомъ лучше справиться съ ними. Часто случается поэтому, что, вопреки нашимъ классическимъ подраздѣленіямъ, важные вопросы требуютъ извѣстнаго соединенія нѣсколькихъ спеціальныхъ точекъ зрѣнія, которое нельзя осуществить при теперешнемъ состояніи научнаго міра; это обстоятельство иногда принуждаетъ оставлять эти вопросы безъ отвѣта гораздо долѣе, чѣмъ это необходимо. Подобное неудобство должно въ особенности возникать по отношенію къ наиболѣе существеннымъ положеніямъ каждой науки въ частности. Можно безъ труда привести весьма интересные въ этомъ отношеніи примѣры, что̀ я и буду заботливо дѣлать по мѣрѣ того, какъ естественное развитіе этого курса будетъ намъ представлять ихъ.

Я могъ-бы указать въ прошломъ на одинъ особенно заслуживающій упоминанія примѣръ, остановившись на удивительной концепціи аналитической геометріи Декарта. Это крупное открытіе, которое совершенно измѣнило видъ математическихъ наукъ, и въ которомъ надо видѣть истинное основаніе всѣхъ позднѣйшихъ ея огромныхъ успѣховъ, есть только результатъ сближенія двухъ наукъ, разсматривавшихся до тѣхъ поръ отдѣльно. Но мое замѣчаніе будетъ убѣдительнѣе, если мы обратимся къ вопросамъ еще неразрѣшеннымъ.

Я ограничусь указаніемъ на весьма важное въ химіи ученіе объ опредѣленныхъ пропорціяхъ.

*

Конечно, возникшій въ послѣднее время по поводу основнаго положенія этой теоріи споръ, каково-бы ни было его видимое положеніе, не можетъ еще считаться законченнымъ навсегда, ибо, какъ мнѣ кажется, тутъ дѣло идетъ не о простомъ химическомъ вопросѣ. Я считаю возможнымъ высказать, что для полученія дѣйствительно окончательнаго рѣшенія, т. е. чтобы опредѣлить, должны-ли мы считать закономъ природы то, что молекулы постоянно соединяются въ опредѣленныхъ отношеніяхъ, намъ нужно будетъ соединить химическую точку зрѣнія съ физіологической. Это положеніе подкрѣпляется тѣмъ, что даже по признанію знаменитыхъ химиковъ, которые наиболѣе потрудились надъ созданіемъ этой теоріи, относительно ея можно только сказать, что она постоянно подтверждается составомъ неорганическихъ тѣлъ, но почти такъ-же часто опровергается составомъ органическихъ тѣлъ, и распространить ее на послѣднія какъ оказывается, до сихъ поръ совсѣмъ невозможно.

Итакъ, не слѣдуетъ-ли, прежде чѣмъ возводить эту теорію въ основной принципъ, отдать себѣ отчетъ въ этомъ весьма важномъ исключеніи? Не подчиняется-ли и она тому общему характерному свойству органическихъ тѣлъ, въ силу котораго ни въ одномъ изъ ихъ проявленій нельзя установить неизмѣнныхъ чиселъ? Какъ-бы то ни было, для окончательнаго рѣшенія въ ту или другую сторону этого великаго вопроса естественной философіи очевидно необходимъ новый рядъ соображеній, принадлежащихъ одинаково и къ химіи, и къ физіологіи.

Я считаю полезнымъ указать здѣсь еще одинъ примѣръ того же рода, который принадлежитъ однако къ болѣе спеціальному классу изслѣдованій и еще убѣдительнѣе показываетъ значеніе положительной философіи для разрѣшенія вопросовъ, требующихъ совмѣстнаго примѣненія нѣсколькихъ наукъ. Я заимствую его также изъ химіи. Дѣло идетъ о неразрѣшенномъ еще до сихъ поръ вопросѣ, долженъ-ли азотъ при теперешнемъ состояніи нашихъ познаній считаться простымъ или сложнымъ тѣломъ. Вы знаете, на основаніи какихъ чисто химическихъ соображеній знаменитому Берцеліусу удалось поколебать мнѣніе всѣхъ химиковъ относительно простоты этого газа. Но я не премину обратить особенное вниманіе на то вліяніе, которое, по драгоцѣнному признанію самого Берцеліуса, оказало на его взглядъ физіологическое наблюденіе, что въ составъ тканей животныхъ, питающихся несодержащими азота веществами, входитъ столько-же азота, сколько у животныхъ плотоядныхъ. Изъ этого дѣйствительно ясно, что для рѣшенія вопроса о томъ, простое-ли тѣло азотъ или сложное, необходимо придется прибѣгнуть къ помощи физіологіи, и къ чисто химическимъ соображеніямъ присоединить рядъ новыхъ изслѣдованій объ отношеніи между составомъ живыхъ тѣлъ и поглощаемой ими пищей.

Теперь было-бы неумѣстно увеличивать число примѣровъ такихъ задачъ, которыя могутъ быть разрѣшены только совмѣстными усиліями нѣсколькихъ наукъ, изучаемыхъ нынѣ независимо одна отъ другой. Только что приведенные случаи достаточно ясно показываютъ важность той функціи, которую предстоитъ выполнить въ совершенствованіи каждой отдѣльной естественной науки положительной философіи, предназначаемой прежде всего для постояннаго подготовленія такихъ комбинацій, которыя не могли-бы создаться безъ нея.

Наконецъ четвертое и послѣднее основное свойство науки, названной мной положительной философіей, на которое я долженъ указать теперь же, и которое, по своему громадному практическому значенію, должно болѣе всего привлечь къ ней всеобщее вниманіе, состоитъ въ томъ, что положительную философію можно считать единственной прочной основой общественнаго преобразованія, имѣющаго положить конецъ тому критическому состоянію, въ которомъ такъ давно уже находятся наиболѣе цивилизованные народы. Послѣдняя часть этого курса будетъ спеціально посвящена установленію и самому широкому развитію этого положенія. Но общимъ очертаніемъ той громадной картины, которую я взялся намѣтить въ этой лекціи, не доставало-бы одного изъ самыхъ характерныхъ ея элементовъ, если-бы я не указалъ здѣсь на столь существенное соображеніе.

Нѣсколькихъ самыхъ простыхъ замѣчаній будетъ достаточно для оправданія того, что въ такомъ опредѣленіи можетъ показаться слишкомъ притязательнымъ.

Не читателямъ этой книги я считалъ бы нужнымъ доказывать, что идеи управляютъ и переворачиваютъ міръ, или, другими словами, что весь соціальный механизмъ дѣйствительно основывается на убѣжденіяхъ. Они хорошо знаютъ еще и то, что великій политическій и моральный кризисъ современнаго общества зависитъ въ концѣ концовъ отъ умственной анархіи. Наша опаснѣйшая болѣзнь состоитъ въ глубокомъ разногласіи умовъ относительно всѣхъ основныхъ вопросовъ жизни, твердое отношеніе къ которымъ является первымъ условіемъ истиннаго соціальнаго порядка.

До тѣхъ поръ, пока отдѣльные умы не примкнутъ единогласно къ извѣстному числу общихъ идей, съ помощью которыхъ можно было бы построить общую соціальную доктрину, нельзя скрывать отъ себя, что народы останутся по необходимости въ совершенно революціонномъ состояніи, и, несмотря ни на какіе политическіе палліативы, будутъ вырабатывать только временныя учрежденія. Равнымъ образомъ достовѣрно и то, что если только такое единеніе умовъ на почвѣ общности принциповъ состоится, то соотвѣтствующія учрежденія создадутся сами естественнымъ образомъ, безъ всякаго тяжелаго потрясенія, такъ какъ самый главный безпорядокъ разсѣется благодаря одному этому факту. На это обстоятельство и должно быть направлено главное вниманіе всѣхъ тѣхъ, которые понимаютъ все значеніе дѣйствительно нормальнаго положенія вещей.

Теперь, съ той высокой точки зрѣнія, которой мы постепенно достигли съ помощью различныхъ соображеній, высказанныхъ въ этой лекціи, намъ уже не трудно сразу характеризировать опредѣленно, во всей его глубинѣ, современное состояніе обществъ, и установить, какимъ образомъ можно произвести въ немъ существенныя измѣненія.

Пользуясь основнымъ закономъ, провозглашеннымъ въ началѣ этой лекціи, я считаю возможнымъ точно резюмировать всѣ сдѣланныя относительно современнаго положенія общества замѣчанія, сказавъ просто, что существующій теперь въ умахъ безпорядокъ въ концѣ концовъ зависитъ отъ одновременнаго примѣненія трехъ совершенно несовмѣстимыхъ философій: теологической, метафизической и положительной. На самомъ дѣлѣ вѣдь очевидно, что если-бы одна изъ этихъ философій достигла полнаго и всеобщаго главенства, то получился-бы опредѣленный соціальный порядокъ, тогда какъ зло состоитъ именно въ отсутствіи какой-бы то ни было истинной организаціи.

Именно это одновременное существованіе трехъ противорѣчащихъ другъ другу философій и препятствуетъ безусловно соглашенію по какому бы то ни было важному вопросу. Если такой взглядъ правиленъ, то остается только узнать, какая философія по природѣ вещей можетъ и должна побѣдить, а затѣмъ всякій разумный человѣкъ, каковы-бы ни были его личныя мнѣнія до анализа этого вопроса, долженъ постараться содѣйствовать успѣху ея. Какъ только изслѣдованіе будетъ доведено до этихъ простыхъ положеній, результатъ его не долго будетъ оставаться неопредѣленнымъ, такъ какъ на основаніи различныхъ соображеній, изъ которыхъ главнѣйшія указаны въ этой лекціи, видно, что положительная философія при естественномъ ходѣ вещей одна только и можетъ побѣдить. Она одна уже много вѣковъ постоянно прогрессировала, тогда какъ ея антогонисты постоянно падали. Справедливо-ли это или нѣтъ, вопросъ не важный; самый фактъ неоспоримъ, и этого вполнѣ достаточно. О немъ можно сожалѣть, но его нельзя отрицать, и слѣдовательно имъ нельзя пренебрегать, не рискуя перейти въ область праздныхъ соображеній. Этотъ всеобщій переворотъ человѣческаго духа теперь уже почти законченъ, и остается только, какъ я уже объяснилъ, пополнить положительную философію, включивъ въ нее изученіе соціальныхъ явленій, и затѣмъ привести ее въ одну систему однородныхъ доктринъ. Когда эта двойная работа достаточно подвинется впередъ, торжество положительной философіи наступитъ само собой и возстановитъ порядокъ въ обществѣ.

Ясно выраженное предпочтеніе, которое почти всѣ умы, начиная отъ самыхъ возвышенныхъ и до самыхъ вульгарныхъ, оказываютъ теперь положительнымъ познаніямъ предъ неясными и мистическими понятіями, достаточно предсказываетъ, какая встрѣча ожидаетъ положительную философію, когда она пріобрѣтетъ единственное недостающее ей качество, т. е. подобающую ей всеобщность.

Однимъ словомъ, въ настоящее время теологическая и метафизическая философіи оспариваютъ другъ у друга задачу преобразованія общества, совершенно непосильную и той, и другой; только между ними и идетъ борьба въ этомъ отношеніи. Положительная философія до сихъ поръ вмѣшивалась въ борьбу только для того, чтобы подвергать критикѣ и ту, и другую, и успѣла совершенно лишить ихъ всякаго довѣрія.

Приведемъ же ее наконецъ въ такое состояніе, чтобы она могла принять активное участіе, и не будемъ останавливаться болѣе на сдѣлавшихся безполезными спорахъ. Завершая обширное умственное зданіе, начатое Бэкономъ, Декартомъ и Галилеемъ, прямо создадимъ систему общихъ идей, которую положительной философіи суждено поставить навсегда во главѣ рода человѣческаго, и революціонный кризисъ, мучащій цивилизованные народы, будетъ совершенно законченъ.

Съ этихъ четырехъ главныхъ точекъ зрѣнія я и счелъ нужнымъ указать теперь-же на благотворное вліяніе положительной философіи, чтобы представить существенное дополненіе къ общему опредѣленію, которое я попытался дать выше.

Прежде чѣмъ кончить, я желаю обратить вниманіе еще на одно соображеніе, которое, какъ мнѣ кажется, поможетъ избѣжать насколько возможно ошибочнаго съ самаго начала пониманія природы этого курса.

Признавая цѣлью положительной философіи приведеніе въ одну систему однородныхъ доктринъ всей совокупности пріобрѣтенныхъ человѣчествомъ познаній относительно различныхъ классовъ естественныхъ явленій, я былъ очень далекъ отъ мысли изучать всѣ эти явленія, смотря на нихъ какъ на различныя слѣдствія одного принципа, или считая ихъ подчиненными одному единственному закону. Хотя я и долженъ заняться спеціальнымъ разборомъ этого вопроса въ слѣдующей лекціи, я считаю нужнымъ уже теперь заявить объ этомъ, чтобы избѣгнуть совершенно неосновательныхъ упрековъ, которые могли-бы быть вслѣдствіе неправильнаго пониманія высказаны мнѣ лицами, если бы они отнесли мой курсъ къ числу попытокъ дать универсальное объясненіе, какими каждый день дарятъ насъ люди, совершенно чуждые научнымъ методамъ и знаніямъ.

Ничего подобнаго въ этомъ курсѣ не заключается и дальнѣйшее его изложеніе ясно докажетъ это всѣмъ тѣмъ, у кого содержащіяся въ лекціи разъясненія могли оставить еще нѣкоторую долю сомнѣнія въ этомъ отношеніи.

По моему глубокому личному убѣжденію всѣ эти попытки общаго объясненія всѣхъ явленій однимъ закономъ совершенно безполезны, даже если ихъ дѣлаютъ наиболѣе свѣдующіе люди.

Я думаю, что силы человѣческаго духа слишкомъ незначительны, а міръ слишкомъ сложенъ для того, чтобы мы хоть когда нибудь достигли такого научнаго совершенства; кромѣ того, я нахожу, что обыкновенно слишкомъ преувеличиваютъ выгоды, которыя проистекали бы изъ такого объясненія, если бы оно было возможно.

Во всякомъ случаѣ мнѣ кажется очевиднымъ, что при теперешнемъ состояніи нашихъ знаній мы еще очень далеки отъ такого объясненія и надо много времени, чтобы подобныя попытки могли оказаться разумными; если мы и можемъ надѣяться когда бы то ни было добиться этого успѣха, то, по мнѣнію моему, только связывая всѣ явленія съ наиболѣе общимъ извѣстнымъ намъ положительнымъ закономъ, т. е. съ закономъ тяготѣнія, который сближаетъ уже часть астрономическихъ явленій съ явленіями земной физики.

Лапласъ высказалъ мнѣніе, что всѣ химическія явленія можно разсматривать только какъ простыя молекулярныя измѣненія, происходящія подъ вліяніемъ ньютоновскаго притяженія, видоизмѣненнаго фигурой и взаимнымъ положеніемъ атомовъ. Но не говоря уже о неопредѣленности, которая всегда будетъ сопровождать эту теорію благодаря отсутствію необходимыхъ данныхъ относительно внутренняго строенія тѣлъ, почти очевидно, что трудность примѣненія ея будетъ такъ велика, что придется сохранить естественное нынѣ отдѣленіе астрономіи отъ химіи, даже признавая его искусственнымъ. Самъ Лапласъ предложилъ эту мысль какъ простую философскую догадку, которая не можетъ въ дѣйствительности оказать никакого полезнаго вліянія на прогрессъ химическихъ знаній. Можно сказать еще болѣе: даже предполагая, что намъ удалось преодолѣть эту непобѣдимую трудность, мы всетаки не достигнемъ научнаго единства, такъ какъ намъ нужно будетъ попытаться подчинить тому же закону всю совокупность явленій физіологическихъ, что, конечно, окажется далеко не самой легкой частью этого предпріятія. Однако, если взвѣсить все хорошенько, гипотеза съ которой мы только что, познакомились, оказывается наиболѣе благопріятной для этого столь желаннаго единства.

Мнѣ не нужны дальнѣйшія подробности, чтобы окончательно убѣдить, что цѣль этого курса совсѣмъ не состоитъ въ томъ, чтобы представить всѣ явленія природы въ сущности тождественными, не смотря на внѣшнее ихъ разнообразіе.

СИНОПТИЧЕСКАЯ ТАБЛИЦА КУРСА ПОЛО

Лекціи.

Общія предварительныя свѣдѣнія **2**
- 1-е Изложеніе цѣли этого курса,
  или общія соображенія о природѣ и значеніи
- 2-е Изложеніе плана,
  или общія соображенія объ іерархіи положител

Математика **16**
- Философскія соображенія о совокупности математическ
- Общія соображенія о
  - Исчисленіи . . . . .
  - Геометріи . . . . .
  - Раціональной механикѣ

Наука о неорганическихъ тѣлахъ.

Астрономія . . . **9**
- Философскія соображенія объ астрономіи вообще . .
- Общія соображенія о
  - Геометрической астрономіи
  - Механической астрономіи
- Общія соображенія о положительной космогоніи . .

Физика **9**
- Философскія соображенія о физикѣ вообще . . .
- Общія соображенія о
  - Барологіи. . . . . .
  - Термологіи . . . . .
  - Акустикѣ . . . . . .
  - Оптикѣ . . . .
  - Электрологіи . . . . .

Химія **6**
- Философскія соображенія о химіи вообще . .
- Общія соображенія о
  - Химіи неорганической.
  - Химіи органической. . .

Наука объ органическихъ тѣлахъ.

Физіологія . . . **12**
(Біологія).
- Философскія соображенія о физіологіи вообще.
- Общія соображенія о
  - Строеніи и составѣ живыхъ
  - Классификаціи живыхъ тѣл
  - Растительной физіологіи.
  - Животной физіологіи .
  - Интеллектуальной и аффекті

Соціальная физика или соціологія . . **15**

Лекціи.
- Введеніе 2
  - 1⁰ Общія соображенія о пр
  - 2⁰ Разборъ главныхъ попы
- Методъ 3
  - 1⁰ Особенности положител
  - 2⁰ Отношеніе соціальной ф
- Наука. 10
  - Соображенія объ общемъ с
  - Основной естественный за
  - Исторія хода цивилизаціи

Общій обзоръ и заключеніе **3**
- 1⁰ Обзоръ положительнаго метода.
- 2⁰ Обзоръ положительной доктрины.
- 3⁰ Будущее положительной философіи.

...ЖИТЕЛЬНОЙ ФИЛОСОФІИ ОГЮСТА КОНТА

Вторая лекція.

Изложеніе плана этого курса, или общія соображенія объ іерархіи положительныхъ наукъ.

Опредѣливъ въ прошлой лекціи по возможности точно общій характеръ соображеній, которыя я намѣренъ представить въ этомъ курсѣ по всѣмъ главнымъ отраслямъ естественной философіи, я долженъ теперь указать планъ, которому мы должны слѣдовать, т. е. предложить наиболѣе удобную и раціональную классификацію главныхъ положительныхъ наукъ для того, чтобы затѣмъ послѣдовательно изучать ихъ съ установленной уже точки зрѣнія. Это второе общее изслѣдованіе необходимо, чтобы съ самаго начала окончательно выяснить истинный духъ этого курса.

Прежде всего не трудно понять, что мнѣ незачѣмъ останавливаться на слишкомъ къ сожалѣнію легкой критикѣ предложенныхъ въ теченіе двухъ послѣднихъ вѣковъ многочисленныхъ классификацій общей системы человѣческихъ познаній, разсматриваемыхъ во всемъ ихъ объемѣ. Теперь всѣ вполнѣ убѣдились, что всякаго рода энциклопедическія подраздѣленія, построенныя, какъ у Бэкона и д'Аламбера, на нѣкоторыхъ особенностяхъ различныхъ способностей человѣческаго ума, уже по самому принципу совершенно неправильны, — даже если эти особенности реальны, а не фиктивны, какъ это часто бываетъ,— ибо въ каждой сферѣ своей дѣятельности нашъ разумъ сразу примѣняетъ всѣ свои главныя способности. Что же касается всѣхъ другихъ классификацій, то достаточно указать на возникавшіе при появленіи ихъ споры, которые убѣдили окончательно, что въ каждой изъ нихъ есть какой нибудь крупный недостатокъ; такимъ образомъ ни одна классификація не заслужила всеобщаго одобренія, и по этому предмету существуетъ столько же мнѣній, сколько и людей. Въ общемъ эти попытки были такъ дурно задуманы, что даже вызвали у всѣхъ умныхъ людей невольное предубѣжденіе противъ подобныхъ предложеній.

Не останавливаясь болѣе на столь прочно установленномъ фактѣ, гораздо важнѣе отыскать его причину. Объяснить себѣ глубокое несовершенство этихъ энциклопедическихъ попытокъ, такъ часто возобновлявшихся до послѣдняго времени, очень не трудно. Мнѣ незачѣмъ указывать, что когда благодаря неосновательности первыхъ попытокъ всѣ подобнаго рода работы совершенно лишились всеобщаго довѣрія, за классификаціи стали браться чаще всего люди, совершенно незнакомые съ классифицируемыми ими предметами. Кромѣ этого замѣчанія, относящагося только къ личности классификаторовъ, есть еще одно гораздо болѣе важное соображеніе, заимствованное изъ самой природы предмета и показывающее, почему до сихъ поръ невозможно было достичь дѣйствительно удовлетворительной энциклопедической теоріи. Причина лежитъ въ недостаткѣ однородности, которая до послѣдняго времени существовала между отдѣльными частями интеллектуальной системы, изъ которыхъ однѣ сдѣлались послѣдовательно положительными, тогда какъ другія все еще оставались теологическими или метафизическими. При такомъ нестройномъ положеніи вещей установленіе какой бы то ни было раціональной классификаціи было конечно невозможно. Какъ расположить въ одной системѣ столь глубоко противорѣчивыя понятія?

Вслѣдствіе этого именно затрудненія потерпѣли неудачу всѣ классификаторы, при чемъ ни одинъ изъ нихъ не замѣтилъ его отчетливо. Для всякаго, однако, кто понималъ дѣйствительное положеніе человѣческаго духа, было ясно, что подобное предпріятіе преждевременно, и что оно можетъ быть выполнено съ успѣхомъ только тогда, когда наши главныя понятія станутъ положительными.

Такъ какъ на основаніи данныхъ въ прошлой лекціи объясненій можно считать это основное условіе выполненнымъ, то теперь можно приступить къ дѣйствительно раціональному и прочному построенію системы, всѣ части которой сдѣлались наконецъ однородными.

Съ другой стороны, общая теорія классификацій, установленная въ послѣднее время философскими работами ботаниковъ и зоологовъ, позволяетъ надѣяться на дѣйствительный успѣхъ подобнаго предпріятія, такъ какъ она даетъ намъ вѣрнаго руководителя въ видѣ истиннаго основнаго принципа искусства классифицированія, принципа, который до тѣхъ поръ не былъ ни разу ясно понятъ.

Этотъ принципъ вытекаетъ какъ необходимое слѣдствіе прямаго примѣненія положительнаго метода къ самому вопросу о классификаціи, который, какъ и всякій другой, надлежитъ разсматривать съ помощью наблюденій, а не рѣшать апріорными соображеніями. На основаніи этого принципа классификація должна вытекать изъ изученія самихъ классифицируемыхъ предметовъ, и опредѣляется дѣйствительнымъ сродствомъ и естественными связями, которыя между ними существуютъ; такимъ образомъ сама классификація должна быть выраженіемъ наиболѣе общаго факта, обнаруженнаго внимательнымъ сравненіемъ охватываемыхъ ею предметовъ.

Примѣняя это основное правило къ настоящему случаю, мы должны приступить къ классификаціи положительныхъ наукъ на основаніи существующей между ними взаимной зависимости, а эта зависимость, если она реальна, можетъ вытекать только изъ зависимости между соотвѣтствующими явленіями.

Но прежде чѣмъ совершить эту важную энциклопедическую операцію въ указанномъ выше направленіи, необходимо, чтобы не сбиться съ пути въ такомъ обширномъ трудѣ, отмѣтить границы предмета предполагаемой классификаціи съ большей, чѣмъ мы дѣлали до сихъ поръ, точностью.

Всѣ поступки человѣческіе приводятся или къ размышленію или къ дѣйствію, и поэтому самое общее дѣленіе нашихъ познаній состоитъ въ отличіи теоретическихъ познаній отъ практическихъ. Если мы остановимся на этомъ первомъ дѣленіи, то очевидно, что въ курсѣ, подобномъ нашему, могутъ быть разсматриваемы только теоретическія познанія, ибо здѣсь вопросъ идетъ не объ изученіи всей совокупности человѣческихъ знаній, а только системы основныхъ понятій о явленіяхъ различныхъ классовъ, которая даетъ прочную основу для всѣхъ другихъ нашихъ соображеній и которая въ свою очередь не опирается ни на какую предыдущую интеллектуальную систему.

Итакъ въ трудѣ подобномъ нашему слѣдуетъ разсматривать общія разсужденія, а не ихъ приложенія, если только послѣднія не могутъ послужить для объясненія первыхъ. Вѣроятно это и понималъ Бэконъ, хотя весьма несовершенно, подъ своей *первой философіей*, которая, по его мнѣнію, должна быть извлечена изъ совокупности наукъ, и которую такъ различно и постоянно такъ странно объясняли пробовавшіе комментировать его мысль метафизики.

Безъ сомнѣнія, разсматривая всю совокупность занятій человѣчества, слѣдуетъ признать, что изученіе природы какъ бы предназначено послужить истинной разумной основой воздѣйствія человѣка на природу, ибо познаніе управляющихъ явленіями законовъ, которое позволяетъ намъ постоянно предвидѣть самыя явленія, одно только можетъ дать намъ возможность въ нашей дѣятельности съ пользой для насъ видоизмѣнять одни явленія при помощи другихъ. Наши естественныя и прямыя средства вліять на окружающія насъ тѣла совершенно несоразмѣрны съ нашими потребностями. Каждый разъ когда мы совершаемъ какое-нибудь сильное воздѣйствіе, это удается только благодаря тому, что наше знаніе законовъ природы позволяетъ намъ ввести въ число опредѣленныхъ обстоятельствъ, подъ вліяніемъ которыхъ происходятъ явленія, нѣсколько новыхъ элементовъ, въ извѣстныхъ случаяхъ оказывающихся, несмотря на всю свою незначительность, достаточно сильными, чтобы измѣнить въ нашу пользу окончательный результатъ дѣйствія всѣхъ вмѣстѣ взятыхъ внѣшнихъ причинъ. Однимъ словомъ на *наукѣ основано предвидѣніе, на предвидѣніи дѣйствіе*. Въ такой очень простой формулѣ точно выражается отношеніе *науки къ искусству*, если принимать эти два слова въ ихъ полномъ значеніи.

Несмотря, однако, на все значеніе этой связи, которую не слѣдуетъ упускать изъ вида, понимать науки только какъ основы искусствъ значило бы понимать ихъ весьма несовершеннымъ образомъ, а къ несчастью въ наши дни многіе слишкомъ склоняются къ такому взгляду. Какъ бы ни были велики услуги, которыя научныя теоріи оказали *промышленности*, хотя бы даже наше могущество, по энергическому выраженію Бэкона, и было пропорціонально нашимъ познаніямъ, мы все же не должны забывать, что науки прежде всего имѣютъ болѣе прямое и возвышенное назначеніе: удовлетворять нашъ разумъ въ его основной потребности познавать законы явленій. Чтобы понять, какъ глубока и могуча эта потребность, достаточно обратить вниманіе на физіологическое вліяніе *удивленія*, и вспомнить, что наиболѣе ужасное изъ всѣхъ возможныхъ для насъ ощущеній мы испытываемъ, когда намъ кажется, что какое нибудь явленіе происходитъ противно тѣмъ естественнымъ законамъ, къ которымъ мы привыкли.

Потребность располагать факты въ такомъ порядкѣ, чтобы мы могли легко ихъ охватывать, что и составляетъ, собственно говоря, предметъ всѣхъ научныхъ теорій, настолько сроднилась съ нашимъ организмомъ, что если намъ не удастся удовлетворить ее положительными понятіями, то мы непремѣнно возвратимся къ понятіямъ теологическимъ и метафизическимъ, появившимся первоначально на свѣтъ подъ ея вліяніемъ, какъ это я объяснилъ въ предшествующей лекціи.

Я считаю нужнымъ здѣсь особенно отмѣтить одно соображеніе, которое буду часто повторять въ этомъ курсѣ, чтобы указать на необходимость намъ защитить себя противъ чрезмѣрнаго вліянія существующихъ привычекъ, которыя препятствуютъ образованію благородныхъ и истинныхъ взглядовъ на важность и назначеніе наукъ. Если-бы главная сила нашего организма не исправляла въ умахъ ученыхъ, иногда непроизвольно, неполноту и узость общаго направленія нашего вѣка, то человѣческій умъ, ограничиваясь имѣющими немедленное практическое примѣненіе изслѣдованіями, благодаря одному этому, какъ правильно замѣтилъ Кондорсе, остановился-бы въ своемъ прогрессѣ даже по отношенію къ тѣмъ практическимъ примѣненіямъ, ради которыхъ такъ неразумно пожертвовали бы чисто теоретическими работами, ибо самыя важныя приложенія постоянно вытекаютъ изъ теорій, созданныхъ съ чисто научными цѣлями и существовавшихъ иногда по цѣлымъ вѣкамъ безъ всякихъ практическихъ результатовъ. Можно указать, какъ на весьма замѣчательный примѣръ, на блестящую теорію коническихъ сѣченій, созданную греческими геометрами, которая много поколѣній спустя вызвала обновленіе астрономіи и дала возможность довести мореплаваніе до той высокой степени совершенства, на которой оно стоитъ теперь, и которой оно никогда не достигло-бы безъ чисто теоретическихъ работъ Архимеда и Аполлонія; такимъ образомъ Кондорсе по этому поводу съ полнымъ основаніемъ могъ сказать „морякъ, котораго спасаетъ отъ кораблекрушенія точное опредѣленіе долготы, обязанъ своей жизнью теоріи, созданной двѣ тысячи лѣтъ тому назадъ геніальными мыслителями, которые имѣли въ виду только простыя геометрическія соображенія“.

Очевидно, что признавъ самымъ общимъ образомъ изученіе природы за раціональную основу воздѣйствія на нее, человѣкъ долженъ приступать къ теоретическимъ изслѣдованіямъ совершенно не задаваясь какими-бы то ни было практическими цѣлями, ибо наши средства для открытія истины такъ слабы, что если мы не сосредоточимъ ихъ исключительно на одной цѣли, и при отысканіи истины будемъ еще задаваться и посторонними вопросами о немедленной практической пользѣ, то почти никогда не будемъ въ состояніи найти самую истину.

Какъ бы то ни было, вѣрно, что совокупность нашихъ познаній о природѣ и совокупность выведенныхъ изъ этихъ познаній пріемовъ воздѣйствія на природу въ нашу пользу составляютъ двѣ совершенно отдѣльныя по существу своему системы, которыя слѣдуетъ и разсматривать, и изучать совершенно независимо одна отъ другой. Кромѣ того, такъ какъ первая система лежитъ въ основѣ второй, то при методическомъ изученіи ее и слѣдуетъ разсматривать раньше даже въ томъ случаѣ, если-бы мы захотѣли охватить всю массу человѣческихъ знаній, какъ теоретическихъ, такъ и прикладныхъ. Мнѣ кажется, что именно система теоретическихъ знаній и должна теперь быть предметомъ дѣйствительно раціональнаго курса положительной философіи; такъ, по крайней мѣрѣ, я ее понимаю. Безъ сомнѣнія можно было-бы задумать болѣе обширный курсъ, затрогивающій въ одно и тоже время общія положенія теоріи и практики, но я не думаю, что подобное предпріятіе, не говоря ужъ о его размѣрахъ, можетъ быть предпринято при теперешнемъ состояніи человѣчества. Мнѣ кажется, что для его осуществленія нужно предварительно совершить еще одну очень важную и совершенно особенную работу, до сихъ поръ не исполненную, а именно на основаніи научныхъ теорій въ истинномъ смыслѣ этого слова выработать особыя спеціальныя понятія, долженствующія служить прямымъ основаніемъ общихъ практическихъ пріемовъ.

При томъ развитіи, какого уже достигъ нашъ разумъ, науки не прилагаются къ искусствамъ немедленно, по крайней мѣрѣ въ наиболѣе сложныхъ случаяхъ: между этими двумя рядами идей есть еще средній, который, съ философской точки зрѣнія опредѣленъ очень слабо, но проявляетъ себя замѣтнѣе, если обратить вниманіе на классъ людей, занимающихся имъ спеціально.

Между собственно учеными и директорами промышленныхъ предпріятій понемногу формируется новый промежуточный классъ *инженеровъ*, спеціальное назначеніе которыхъ состоитъ въ установленіи отношеній между теоріей и практикой. Совершенно не заботясь о прогрессѣ науки, эти лица изучаютъ ее въ современномъ ея состояніи для того, чтобы сдѣлать тѣ примѣненія къ промышленности, на которыя наука способна. Таково по меньшей мѣрѣ естественное положеніе вещей, хотя въ этомъ отношеніи существуетъ еще большое смѣшеніе. Собраніе доктринъ, которыя относятся къ этому классу и должны непосредственно создать настоящія теоріи различныхъ искусствъ, могло-бы конечно дать матеріалъ для весьма интересныхъ и важныхъ философскихъ соображеній. Но трудъ, который охватилъ-бы ихъ вмѣстѣ съ теоріями, основанными на наукахъ въ чистомъ смыслѣ этого слова, былъ-бы теперь совершенно преждевременнымъ, такъ какъ эти доктрины, лежащія между чистой теоріей и прямой практикой, еще не создались, и въ настоящее время существуетъ нѣсколько несовершенныхъ элементовъ, относящихся къ наиболѣе развившимся наукамъ и искусствамъ, которые могутъ позволить намъ только допустить возможность такого рода труда для всей совокупности человѣческихъ дѣйствій. Чтобы привести здѣсь наиболѣе серьезный примѣръ слѣдуетъ взглянуть съ этой точки зрѣнія на блестящую идею Монжа относительно начертательной геометріи, представляющей собою ничто иное какъ общую теорію искусства построенія. Я постараюсь послѣдовательно указать на немногія уже установившіяся аналогичныя идеи, по мѣрѣ того, какъ естественное развитіе этого курса представитъ намъ случаи насколько возможно оцѣнить ихъ значеніе. Ясно однако, что столь несовершенныя понятія не могутъ войти какъ существенная часть въ курсъ положительной философіи, которая, насколько это возможно, должна заключать въ себѣ только доктрины съ твердо установленнымъ и ясно опредѣленнымъ характеромъ.

Мы поймемъ еще лучше трудность построенія промежуточныхъ доктринъ, на которыя я только что указалъ, если мы обратимъ вниманіе на то, что всякое искусство зависитъ не отъ одной соотвѣтствующей ему науки, а отъ нѣсколькихъ сразу, такъ что самыя важныя искусства пользуются содѣйствіемъ почти всѣхъ главныхъ наукъ. Ограничиваясь только наиболѣе выдающимся примѣромъ, я укажу на то, что хорошая теорія земледѣлія требуетъ соединенія познаній по химіи, физіологіи, физикѣ и даже астрономіи и математикѣ; тоже самое можно сказать и объ изящныхъ искусствахъ. Изъ этого замѣчанія легко понять, почему эти

Мнѣ не нужно настаивать теперь на этомъ соображеніи, къ которому мнѣ необходимо будетъ много разъ возвращаться въ различныхъ частяхъ этого курса. Предыдущее объясненіе развито мною достаточно широко, чтобы мотивировать вполнѣ тѣ предѣлы, которыми я ограничилъ общій предметъ нашихъ изслѣдованій.

Итакъ, вслѣдствіе всего изложеннаго въ этой лекціи, мы видимъ: 1) что человѣческія познанія, во всей своей совокупности, состоятъ изъ знаній теоретическихъ и прикладныхъ, и что здѣсь мы должны остановиться только на первыхъ; 2) что теоретическія познанія или науки въ собственномъ смыслѣ этого слова дѣлятся на науки общія и частныя, и что здѣсь мы должны разсматривать только науки общія и ограничиться абстрактной физикой, не смотря на интересъ, который могла бы представить для насъ конкретная физика.

Опредѣливъ такимъ образомъ точно дѣйствительный предметъ этого курса, мы теперь легко можемъ приступить къ составленіи вполнѣ раціональной и удовлетворительной классификаціи основныхъ наукъ, что и составляетъ энциклопедическій вопросъ, служащій главнымъ предметомъ этой лекціи.

Прежде всего слѣдуетъ признать, что, какъ-бы естественна ни была подобная классификація, она всегда будетъ заключать въ себѣ нѣчто, если не произвольное, то во всякомъ случаѣ искусственное, что конечно представитъ существенный ея недостатокъ.

Дѣйствительно, главная цѣль, которую слѣдуетъ имѣть въ виду при каждой работѣ энциклопедическаго характера, есть расположеніе наукъ въ ихъ естественной послѣдовательности, въ соотвѣтствіи съ ихъ взаимной зависимостью, такъ, чтобы можно было излагать науки одну за другой, ни разу не попадая въ заколдованный кругъ.

Однако, какъ мнѣ кажется, выполнить это условіе безусловно строго невозможно. Я позволяю себѣ нѣсколько подробнѣе развить здѣсь это положеніе, такъ какъ я считаю его весьма важнымъ для характеристики дѣйствительной трудности изслѣдованія, которымъ мы теперь занимаемся. Это дастъ мнѣ вмѣстѣ съ тѣмъ возможность установить относительно изложенія нашихъ идей общій принципъ, который я часто буду примѣнять впослѣдствіе.

Каждую науку можно излагать слѣдуя двумъ существенно различнымъ методамъ, *историческому* и *догматическому*; всякій другой способъ изложенія науки представляетъ только извѣстную комбинацію этихъ двухъ пріемовъ.

По первому методу свѣдѣнія излагаются послѣдовательно, въ томъже порядкѣ, въ какомъ умъ человѣка дѣйствительно пріобрѣлъ ихъ, и, если это возможно, примѣняя тѣже пріемы.

По второму методу система идей науки представляется намъ въ томъ видѣ, какъ ее нынѣ могъ бы усвоить одинъ человѣкъ, если бы онъ избралъ соотвѣтственную точку зрѣнія, и, обладая достаточными познаніями, задался цѣлью перестроить науку во всей ея совокупности.

Изученіе каждой новой науки по необходимости начинается по первому методу, представляющему то удобство, что для изложенія свѣдѣній не требуется никакой новой работы, кромѣ затраченной на пріобрѣтеніе ихъ, такъ какъ вся задача преподаванія сводится къ послѣдовательному изученію въ хронологическомъ порядкѣ различныхъ оригинальныхъ трудовъ, содѣйствовавшихъ прогрессу науки. Наоборотъ, догматическій методъ, для примѣненія котораго необходимо, чтобы всѣ эти отдѣльные труды уже слились въ одну общую систему, гдѣ они были бы расположены въ болѣе естественномъ и логическомъ порядкѣ, можетъ быть приложенъ только къ наукѣ, достигшей уже довольно высокой степени развитія. Однако, по мѣрѣ прогресса науки *историческій* способъ изложенія становится все менѣе и менѣе удобнымъ, благодаря накопленію слишкомъ длиннаго ряда промежуточныхъ пунктовъ, черезъ которые умъ человѣка долженъ пройти, тогда какъ догматическій способъ становится все болѣе и болѣе возможнымъ и вмѣстѣ съ тѣмъ необходимымъ, ибо новыя понятія позволяютъ представить прежнія открытія съ болѣе прямой точки зрѣнія.

Такъ напр., все образованіе древняго геометра состояло въ послѣдовательномъ изученіи очень небольшого числа оригинальныхъ сочиненій, появившихся къ тому времени по разнымъ вопросамъ геометріи и сводившихся главнымъ образомъ къ твореніямъ Архимеда и Аполлонія; наоборотъ, современный геометръ оканчиваетъ свое общее образованіе, не прочитавъ ни одного оригинальнаго сочиненія, за исключеніемъ развѣ касающихся новыхъ открытій, которыя не могутъ быть изучены иначе.

Итакъ по отношенію къ изложенію наукъ умъ человѣческій постоянно стремится къ послѣдовательной замѣнѣ историческаго метода догматическимъ, ибо послѣдній одинъ только можетъ удовлетворять насъ при болѣе совершенномъ состояніи нашего умственнаго развитія.

Главная задача умственнаго воспитанія состоитъ въ томъ, чтобы въ нѣсколько лѣтъ поднять умъ, чаще всего посредственный, до той степени развитія, которая является результатомъ усилій многихъ геніальныхъ ученыхъ, въ теченіе длиннаго ряда вѣковъ послѣдовательно отдававшихъ всю свою жизнь и всѣ свои силы на изученіе одного и того же предмета. Понятно, что хотя изученіе безконечно легче и скорѣе, чѣмъ открытія, тѣмъ не менѣе было бы совершенно невозможно достичь намѣченной цѣли, если бы мы захотѣли заставить каждаго отдѣльнаго человѣка пройти всѣ тѣ промежуточные пункты, на которыхъ по необходимости долженъ былъ останавливаться коллективный геній человѣчества. Отсюда и вытекаетъ неизбѣжность перехода къ догматическому методу, особенно ясно проявляющаяся теперь въ наиболѣе совершенныхъ наукахъ, обыкновенное изложеніе которыхъ не заключаетъ почти никакихъ слѣдовъ первоначальнаго происхожденія ихъ элементовъ.

Однако, дабы предупредить всякое преувеличеніе, нужно прибавить, что въ дѣйствительности всякое изложеніе неизбѣжно является только извѣстной комбинаціей историческаго и догматическаго методовъ, гдѣ догматическій способъ долженъ однако постоянно занимать все болѣе и болѣе важное мѣсто. Догматическое изложеніе не можетъ быть проведено совершенно строго; оно требуетъ переработки пріобрѣтенныхъ познаній и потому во всякую эпоху развитія науки не можетъ быть распространено на недавно созданныя части ея, при изученіи которыхъ надо прибѣгать исключительно къ историческому способу, не представляющему въ данномъ случаѣ неудобствъ, заставляющихъ вообще избѣгать его.

Единственный серьезный недостатокъ, въ которомъ можно упрекнуть догматическій методъ, состоитъ въ томъ, что при такомъ положеніи остается неизвѣстнымъ, какимъ путемъ были пріобрѣтены человѣчествомъ различныя познанія; знакомство же съ этимъ путемъ, хотя и вполнѣ отлично отъ самого пріобрѣтенія познаній въ томъ же порядкѣ, само по себѣ представляетъ высокій интересъ для всякаго философскаго ума. Этотъ упрекъ имѣлъ бы въ моихъ глазахъ большое значеніе, если бы онъ дѣйствительно представлялъ доводъ въ пользу историческаго метода; не трудно, однако, убѣдиться, что между изученіемъ науки по такъ называемому *историческому* способу и дѣйствительнымъ познаніемъ истинной исторіи этой науки существуетъ только внѣшняя связь.

Дѣйствительно, не только въ каждой наукѣ различныя части, которыя приходится раздѣлять при *догматическомъ* методѣ, на самомъ дѣлѣ развивались одновременно, оказывая при этомъ вліяніе одна на другую — что и заставляло бы предпочесть историческій методъ — но, разсматривая развитіе человѣческаго духа во всей его совокупности, мы увидимъ, что въ дѣйствительности различныя науки совершенствовались тоже одновременно и совмѣстно, что благодаря безчисленнымъ взаимнымъ вліяніямъ успѣхи наукъ и успѣхи искусствъ зависѣли другъ отъ друга и что послѣдніе были наконецъ тѣсно связаны съ общимъ развитіемъ человѣческаго общества. Это обширное сцѣпленіе настолько реально, что для пониманія происхожденія какой нибудь научной теоріи часто приходится разсматривать усовершенствованія, достигнутыя въ искусствѣ, не имѣющемъ съ нею никакой раціональной связи, или даже частное улучшеніе въ соціальной организаціи, безъ котораго данное открытіе не могло быть сдѣлано. Далѣе мы увидимъ много такихъ примѣровъ. Изъ предыдущаго же слѣдуетъ, что съ истинной исторіей каждой науки, т. е. съ дѣйствительнымъ происхожденіемъ всѣхъ входящихъ въ составъ ея открытій, можно познакомиться только путемъ прямого и всесторонняго изученія исторіи человѣчества. Вотъ почему на всѣ собранные до сихъ поръ документы по исторіи математики, астрономіи, медицины, не смотря на всю ихъ научную цѣнность, нужно смотрѣть только какъ на сырые матеріалы.

Мнимый *историческій* методъ, если бы даже и возможно было строго слѣдовать ему при изложеніи деталей каждой науки въ отдѣльности, былъ бы совершенно произвольнымъ и абстрактнымъ въ томъ весьма важномъ отношеніи, что представлялъ бы развитіе этой науки совершенно изолированнымъ и, далеко не давая вѣрной исторіи науки, приводилъ-бы къ крайне ложному о ней понятію.

Мы конечно убѣждены въ высокой важности знакомства съ исторіей наукъ, и я думаю даже, что нельзя вполнѣ изучить науку, не зная ея исторіи. Но изученіе исторіи науки должно быть совершенно отдѣлено отъ собственно догматическаго изученія науки, безъ котораго исторія ея будетъ совершенно непонятна. Мы разсмотримъ съ большимъ вниманіемъ дѣйствительную исторію основныхъ наукъ, составляющихъ предметъ нашихъ размышленій, но сдѣлаемъ это только въ послѣдней части нашего курса, посвященной изученію соціальныхъ явленій, при разсмотрѣніи исторіи общаго развитія человѣчества, самую важную, хотя до сихъ поръ наиболѣе пренебрегаемую часть которой и составляетъ исторія наукъ. Историческія соображенія встрѣтятся при изученіи каждой науки, но они будутъ носить совершенно иной характеръ и не измѣнятъ дѣйствительнаго характера нашего главнаго труда.

Предыдущее разсужденіе, какъ видно, должно быть подробнѣе развито позже, теперь же оно имѣетъ цѣлью точнѣе опредѣлить истинное направленіе этого курса, представляя его съ новой точки зрѣнія.

Въ особенности же, по отношенію къ занимающему насъ вопросу, изъ него вытекаетъ точное опредѣленіе условій, которыя можно поставить себѣ съ надеждой выполнить ихъ при построеніи энциклопедической системы основныхъ наукъ.

Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что какой бы совершенной ни казалась намъ извѣстная классификація наукъ, она никогда не будетъ строго согласована съ исторической ихъ послѣдовательностью.

Какъ бы мы ни поступали, нельзя избѣжать, чтобы наука, признаваемая за предшествующую, въ нѣкоторыхъ частныхъ, болѣе или менѣе важныхъ отношеніяхъ не была принуждена заимствовать свои понятія изъ науки, признаваемой за послѣдующую. Нужно стараться только, чтобы это заимствованіе не имѣло мѣста по отношенію къ наиболѣе характеристическимъ понятіямъ каждой науки, ибо тогда классификація была бы уже совершенно неправильной.

Такъ, напримѣръ, мнѣ кажется неоспоримымъ, что въ общей системѣ наукъ астрономія должна быть помѣщена раньше собственно физики, и тѣмъ не менѣе нѣкоторыя части послѣдней, особенно оптика, необходимы для полнаго изложенія астрономіи.

Подобные второстепенные совершенно неизбѣжные недостатки не могутъ уничтожить значеніе классификаціи, удовлетворяющей въ достаточной мѣрѣ всѣмъ главнымъ условіямъ, и являются слѣдствіемъ необходимой искусственности дѣленія нашего умственнаго труда.

Хотя въ виду предшествующихъ объясненій мы не должны бы принимать историческій порядокъ въ основаніе нашей классификаціи, тѣмъ не менѣе я считаю нужнымъ заранѣе указать на общее соотвѣтствіе предлагаемой мною энциклопедической системы съ совокупностью всей исторіи наукъ, какъ на одну изъ существенныхъ ея особенностей; это соотвѣтствіе выражается въ томъ, что, несмотря на дѣйствительную и постоянную одновременность развитія различныхъ отраслей знанія, науки, представляемыя въ нашей классификаціи, какъ предшествующія, на самомъ дѣлѣ всегда являются болѣе древними и всегда болѣе преуспѣвшими, чѣмъ послѣдующія. Такая послѣдовательность неизбѣжна, если мы дѣйствительно за самый принципъ классификаціи примемъ, какъ и слѣдуетъ дѣлать, естественную логическую связь отдѣльныхъ наукъ, такъ какъ исходная точка вида должна быть непремѣнно та же, что и исходная точка индивидуума.

Чтобы окончательно въ возможно точномъ видѣ представить дѣйствительную трудность вопроса, который намъ предстоитъ рѣшить, я считаю полезнымъ ввести сюда одно очень простое математическое соображеніе, хорошо резюмирующее совокупность разсужденій, изложенныхъ до сихъ поръ въ этой лекціи. Вотъ въ чемъ оно состоитъ.—

Мы ставимъ себѣ задачей классифицировать основныя науки; сейчасъ мы увидимъ, что, принявъ все во вниманіе, нельзя не отличать между ними по крайней мѣрѣ шести; большинство ученыхъ приняло бы, вѣроятно, еще бо́льшее число. Допустивъ первое предположеніе, вспомнимъ, что изъ 6-ти предметовъ можно составить 720 различныхъ перемѣщеній, изъ числа которыхъ слѣдуетъ избрать только одно, наиболѣе удовлетворяющее главнымъ условіямъ задачи.

Ясно, что, несмотря на многочисленность предложенныхъ до настоящаго времени энциклопедическихъ системъ, только еще немногія изъ всѣхъ возможныхъ перемѣщеній подверглись обсужденію; при этомъ, кажется, я могу сказать безъ преувеличенія, что среди 720 классификацін не найдется, можетъ быть, ни одной, въ пользу которой нельзя было бы привести нѣсколько подходящихъ соображеній, такъ какъ, разсматривая различныя системы, на самомъ дѣлѣ предложенныя, можно замѣтить между ними крайнія противорѣчія: науки, поставленныя одними учеными во главѣ энциклопедической системы, стоятъ на послѣднемъ мѣстѣ въ другихъ, и наоборотъ.

Слѣдовательно, именно въ выборѣ одной раціональной системы изъ большого числа возможныхъ заключается дѣйствительная трудность поставленнаго нами вопроса.

Приступая теперь прямо къ этому важному вопросу, прежде всего вспомнимъ, что для составленія естественной и положительной классификаціи основныхъ наукъ принципъ ея слѣдуетъ искать въ сравненіи различныхъ разрядовъ явленій, законы которыхъ изслѣдуютъ эти науки. Мы желаемъ опредѣлить реальную зависимость различныхъ научныхъ изслѣдованій, а она представляется только слѣдствіемъ зависимости, существующей между соотвѣтствующими явленіями.

Разсматривая съ этой точки зрѣнія всѣ доступныя наблюденію явленія, мы увидимъ, что ихъ можно распредѣлить на небольшое число естественныхъ категорій, расположенныхъ такимъ образомъ, что раціональное изученіе каждой изъ нихъ будетъ основано на знакомствѣ съ главными законами предыдущей, а въ свою очередь станетъ основаніемъ для изученія слѣдующей.

Эта послѣдовательность опредѣляется степенью простоты, или, что тоже самое, степенью общности явленій, изъ которой вытекаетъ взаимная ихъ зависимость, а слѣдовательно и бóльшая или меньшая легкость ихъ изслѣдованія.

Дѣйствительно, a priori ясно, что наиболѣе простыя, т. е. наименѣе осложненныя вліяніемъ другихъ явленія должны быть непремѣнно также и самыя общія, ибо все, что наблюдается въ наибольшемъ числѣ случаевъ, по тому самому уже наименѣе зависитъ отъ обстоятельствъ, присущихъ каждому отдѣльному случаю.

Итакъ, чтобы изучить систематически всю естественную философію, слѣдуетъ начинать съ самыхъ общихъ или самыхъ простыхъ явленій, а затѣмъ послѣдовательно переходить къ болѣе частнымъ или сложнымъ явленіямъ, такъ какъ эта послѣдовательность общности или простоты, устанавливая необходимымъ образомъ раціональную связь главныхъ наукъ на основаніи взаимной зависимости явленій, опредѣляетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и сравнительную легкость изученія ихъ.

Въ тоже время, въ силу одного второстепеннаго соображенія, которое я считаю важнымъ указать здѣсь и которое вполнѣ согласуется со всѣми предыдущими, наиболѣе общія или простыя явленія по необходимости наиболѣе чужды человѣку и, благодаря именно этому обстоятельству могутъ быть изучаемы въ болѣе разумномъ и спокойномъ настроеніи духа, что и является одной изъ причинъ болѣе быстраго развитія соотвѣтствующихъ наукъ.

Указавъ такимъ образомъ основное правило, которымъ надлежитъ руководствоваться при классификаціи наукъ, я могу немедленно перейти къ построенію энциклопедической системы, опредѣляющей планъ этого курса; значеніе ея всякій можетъ оцѣнить безъ труда на основаніи предыдущихъ соображеній.

Первый же взглядъ на совокупность естественныхъ явленій приводитъ насъ къ распредѣленію ихъ, согласно только что установленному нами принципу, на два главныхъ класса; въ первый войдутъ явленія въ неорганическихъ тѣлахъ, а во второй—въ органическихъ.

Послѣднія очевидно сложнѣе и носятъ болѣе частный характеръ, чѣмъ первыя; они зависятъ отъ первыхъ, которыя, на оборотъ, отъ нихъ совершенно не зависятъ.

Поэтому физіологическія явленія необходимо изучать только послѣ явленій неорганическаго міра. Какъ бы мы ни объясняли различіе этихъ двухъ классовъ предметовъ, несомнѣнно, что въ живыхъ тѣлахъ можно наблюдать всѣ механическія и химическія явленія, происходящія въ тѣлахъ неограническихъ, но, кромѣ того, еще совершено особый рядъ явленій, явленій жизненныхъ въ собственномъ смыслѣ этого слова, находящихся въ зависимости отъ *организма*. Я не касаюсь здѣсь вопроса, одной или не одной природы оба класса явленій,—вопроса неразрѣшимаго, слишкомъ сильно волнующаго всѣхъ въ наши дни благодаря остаткамъ вліянія теологическихъ и метафизическихъ воззрѣній; подобный вопросъ не входитъ въ область положительной философіи, которая открыто и опредѣленно заявляетъ, что ей неизвѣстна внутренняя природа тѣлъ. Чтобы признать необходимость отдѣлить изученіе неорганическихъ тѣлъ отъ изученія органическихъ, нѣтъ, однако, никакой надобности считать эти тѣла существенно различными по природѣ своей.

Безъ сомнѣнія общіе взгляды относительно пониманія явленій живыхъ тѣлъ еще недостаточно установились; но какое бы мнѣніе въ этомъ отношеніи ни получило верхъ при дальнѣйшемъ прогрессѣ естественной философіи, предлагаемая нами классификація нисколько не будетъ этимъ затронута. Дѣйствительно, если даже будетъ признано доказаннымъ—а это едва ли позволяетъ предвидѣть современное состояніе физіологіи—что физіологическія явленія всегда суть только простыя механическія, химическія или электрическія явленія, видоизмѣненныя свойственнымъ органическимъ тѣламъ строеніемъ и составомъ, тѣмъ не менѣе наше основное дѣленіе сохранитъ свое значеніе. Ибо всегда, даже и при такой гипотезѣ, останется справедливымъ, что общія явленія нужно изучать прежде, чѣмъ приступать къ изслѣдованію спеціальныхъ видоизмѣненій, которымъ эти явленія подвергаются въ извѣстныхъ тѣлахъ вселенной, благодаря особому расположенію ихъ молекулъ.

Такимъ образомъ дѣленіе, основаніе котораго теперь большинство здравомыслящихъ лицъ видятъ въ различіи законовъ, способно, въ силу подчиненности явленій, удержаться на неопредѣленное время и при дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ, не смотря на все сходство между этими двумя классами тѣлъ, которое удалось-бы прочно установить въ будущемъ.

Здѣсь не мѣсто останавливаться на общемъ сравненіи между неорганическими и органическими тѣлами во всѣхъ его существенныхъ частяхъ; оно будетъ предметомъ особаго и всесторонняго разсмотрѣнія въ физіологической части нашего курса. Теперь же достаточно признать въ принципѣ логическую необходимость раздѣлить науки, относящіяся къ тѣмъ и другимъ тѣламъ, и приступать къ изученію органической физики только послѣ изученія общихъ законовъ физики неорганической.

Перейдемъ къ установленію главнаго подраздѣленія, которому на основаніи того же правила подлежитъ каждая изъ этихъ двухъ обширныхъ частей естественной философіи.

два послѣдовательныхъ дѣленія въ неорганической физикѣ, мы ограничимся по отношенію къ органической только однимъ.

На основаніи предыдущаго разсужденія положительная философія оказывается естественнымъ образомъ раздѣленной на пять главныхъ наукъ, послѣдовательность которыхъ опредѣляется неизмѣннымъ и необходимымъ подчиненіемъ, основаннымъ, независимо отъ всякихъ гипотезъ, на одномъ только внимательномъ сравненіи соотвѣтствующихъ явленій: эти науки суть астрономія, физика, химія, физіологія и наконецъ соціальная физика. Первая изучаетъ явленія самыя общія, самыя простыя, самыя отвлеченныя и наиболѣе удаленныя отъ человѣчества; они вліяютъ на всѣ другія, не подвергаясь вліянію послѣднихъ. Наоборотъ въ соціальной физикѣ разсматриваются явленія наиболѣе частныя, наиболѣе сложныя, наиболѣе конкретныя и наиболѣе затрагивающія прямые интересы человѣчества; эти явленія болѣе или менѣе зависятъ отъ всѣхъ предыдущихъ, не оказывая въ свою очередь на нихъ никакого явленія.

Между этими предѣлами степень частности и сложности явленій и непосредственности интереса ихъ для человѣка, а равно и ихъ послѣдовательная зависимость идутъ постепенно увеличиваясь отъ одного предѣла къ другому.

Таковы общія и глубокія соотношенія, которыя мы должны установить между отдѣльными главными науками не на основаніи произвольныхъ и пустыхъ различій между ними, а на основаніи правильно примѣненнаго истинно философскаго наблюденія; таковъ же долженъ быть и планъ этого курса.

Я могъ здѣсь только намѣтить изложеніе главныхъ соображеній, на которыхъ основана указанная выше классификація. Чтобы вполнѣ вникнуть въ нее, слѣдуетъ теперь, разсмотрѣвъ ее съ общей точки зрѣнія, изслѣдовать по отношенію къ каждой отдѣльной наукѣ; это требованіе мы тщательно выполнимъ впослѣдствіи, приступая къ спеціальному изученію каждой части этого курса. Построеніе энциклопедической системы, выполненное исходя изъ каждой изъ пяти главныхъ наукъ, придастъ ей бо́льшую точность и особенно сдѣлаетъ очевидной ея устойчивость. Эти преимущества классификаціи выступятъ тогда еще нагляднѣе, ибо мы увидимъ, что внутреннее расположеніе частей каждой науки естественнымъ образомъ устанавливается по тому же принципу, и вся система человѣческихъ знаній, до малѣйшихъ мелочей, представится распредѣленной на основаніи одного послѣдовательно проведеннаго соображенія относительно бо́льшей или меньшей степени отвлеченности соотвѣтствующихъ понятій. Подобная работа, однако, не говоря уже о томъ, что она теперь увлекла бы насъ слишкомъ далеко, была бы несомнѣнно неумѣстна въ этой лекціи, въ которой мы должны остаться на самой общей точкѣ зрѣнія положительной философіи.

Тѣмъ не менѣе, чтобы теперь же дать возможность какъ можно полнѣе оцѣнить значеніе основной іерархіи наукъ, которую я постоянно буду примѣнять въ теченіе этого курса, я долженъ бѣгло указать на ея наиболѣе существенныя и общія свойства.

Прежде всего, какъ на рѣшительную повѣрку справедливости нашей классификаціи, слѣдуетъ указать на ея согласіе съ почти самопроизвольной группировкой, допускаемой неявнымъ образомъ учеными, посвятившими себя изученію различныхъ отраслей естественной философіи.

Составители энциклопедическихъ системъ обыкновенно очень пренебрегаютъ однимъ условіемъ, именно необходимимостью представлять отдѣльными науки, которыя движеніе человѣческаго духа заставило, безъ всякой предвзятой цѣли, изучать самостоятельно, и устанавливать подчиненіе, соотвѣтствующее положительнымъ ихъ между собою отношеніямъ, обнаруживаемымъ ихъ постепеннымъ развитіемъ. Подобное согласованіе, однако, есть очевидно самый вѣрный признакъ удачной классификаціи, такъ какъ дѣленія, сами собой возникшія въ системѣ наукъ, могли опредѣлиться только подъ вліяніямъ давно ощущаемаго сознанія дѣйствительныхъ потребностей человѣческаго духа и не были искажены ложными общими положеніями.

Хотя предложенная выше классификація удовлетворяетъ вполнѣ этому условію—этого не нужно и доказывать—но не слѣдуетъ отсюда заключать, что установившіеся эмпирически обычаи ученыхъ дѣлаютъ излишнимъ только что завершенный нами энциклопедическій трудъ; они сдѣлали лишь возможной операцію, которая показываетъ глубокое различіе, лежащее между эмпирической и раціональной классификаціей. Кромѣ того, указанная классификація далеко еще не понята вполнѣ и особенно не примѣняется съ необходимой точностью, и ея значеніе недостаточно оцѣнено; чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно обратить вниманіе на ежедневно совершаемыя, къ великому ущербу для человѣческаго ума, нарушенія изложеннаго энциклопедическаго закона.

Вторая весьма существенная характеристическая черта нашей классификаціи заключается въ ея согласіи съ дѣйствительнымъ ходомъ развитія естественной философіи. Это согласіе подтверждается всѣмъ, что мы знаемъ объ исторіи наукъ, въ особенности за послѣдніе два вѣка, когда движеніе ихъ можно было наблюдать съ бо́льшей точностью.

Въ самомъ дѣлѣ понятно, что разумное изученіе каждой основной науки, требующей предварительной разработки всѣхъ тѣхъ наукъ, которыя предшествуютъ ей въ нашей энциклопедической іерархіи, могло имѣть дѣйствительный успѣхъ и пріобрѣсти свой истинный характеръ только послѣ широкаго развитія предшествующихъ наукъ, относящихся къ явленіямъ болѣе общимъ, болѣе отвлеченнымъ, менѣе сложнымъ и независимымъ отъ другихъ. Въ этой именно послѣдовательности, хотя и совершенно самопроизвольно, и долженъ былъ осуществляться прогрессъ наукъ.

Это соображеніе кажется мнѣ настолько важнымъ, что я считаю невозможнымъ помимо его понять исторію человѣческаго духа. Общій законъ, которому она подчинена и который я указалъ въ предыдущей лекціи, не можетъ получить правильнаго освѣщенія, если при приложеніи его не принимать во вниманіе только что установленную нами энциклопедическую формулу, ибо именно въ указанной въ этой формулѣ послѣдовательности человѣческія познанія проходили одно за другимъ состоянія сперва теологическое, затѣмъ метафизическое и, наконецъ, положительное. Если при примѣненіи закона не обращать вниманія на этотъ неизбѣжный порядокъ движенія, то часто будутъ встрѣчаться неопредолимыя повидимому трудности, такъ какъ ясно, что теологическое и метафизическое состоянія нѣкоторыхъ основныхъ теорій должны были временно совпадать и иногда дѣйствительно совпадали съ положительнымъ состояніемъ предшествующихъ имъ въ нашей энциклопедической системѣ теорій; это обстоятельство создаетъ при провѣркѣ общаго закона затрудненія, которыя можно разсѣять только съ помощью предыдущей классификаціи.

Въ третьихъ, наша классификація обладаетъ тѣмъ весьма замѣчательнымъ свойствомъ, что точно опредѣляетъ относительное совершенство различныхъ наукъ, состоящее по существу въ степени точности свѣдѣній и ихъ бо́льшемъ или меньшемъ внутреннемъ согласованіи. Въ самомъ дѣлѣ, чѣмъ явленія болѣе общи, просты и отвлечены, и чѣмъ менѣе они зависятъ отъ другихъ, тѣмъ точнѣе могутъ быть имѣющіяся о нихъ свѣдѣнія и тѣмъ согласованіе ихъ полнѣе. Такъ органическія явленія допускаютъ изслѣдованія и менѣе точныя, и менѣе систематическія, чѣмъ явленія, происходящія въ неорганическихъ тѣлахъ; равнымъ образомъ въ неорганической физикѣ для небесныхъ явленій, благодаря ихъ большей общности и независимости отъ всѣхъ другихъ, оказалось возможнымъ построить науку болѣе точную и болѣе согласованную, чѣмъ для явленій земныхъ.

Это замѣчаніе, которое такъ поражаетъ при дѣйствительномъ изученіи наукъ, и которое часто подавало поводъ къ неосновательнымъ ожиданіямъ или неправильнымъ сравненіямъ, вполнѣ объясняется установленнымъ мною энциклопедической послѣдовательностью.

Мнѣ естественнымъ образомъ представится случай развить приведенное соображеніе со всей подробностью въ слѣдующей лекціи, гдѣ я покажу, что возможность примѣнять при изученіи различныхъ явленій математическій анализъ, дающій намъ средство внести въ это изученіе высшую доступную для насъ степень точности и согласованія, какъ разъ опредѣляется тѣмъ мѣстомъ, которое занимаютъ явленія въ моей энциклопедической системѣ.

Я не долженъ переходить къ слѣдующему вопросу, не предупредивъ читателя относительно одного очень важнаго заблужденія, чрезвычайно распространеннаго несмотря на свою грубость. Это заблужденіе состоитъ въ смѣшеніи степени точности, допускаемой различными познаніями нашими, съ степенью ихъ достовѣрности, и создало весьма опасное предубѣжденіе, что, такъ какъ степень точности очевидно совсѣмъ не одинакова для различныхъ познаній, то и степень достовѣрности ихъ тоже не равна. Вслѣдствіе этого до сихъ поръ еще говорятъ, хотя и рѣже, чѣмъ прежде, о неодинаковой достовѣрности различныхъ наукъ, и такой взглядъ заставляетъ отказываться отъ разработки самыхъ трудныхъ изъ нихъ. Ясно, однако, что точность и достовѣрность суть два качества, которыя сами по себѣ очень отличаются другъ отъ друга. Совершенно абсурдное положеніе можетъ быть въ высшей степени точнымъ, какъ напримѣръ, если бы кто нибудь сказалъ, что сумма угловъ треугольника равна тремъ прямымъ угламъ; съ другой стороны, совершенно правильное положеніе можетъ быть выражено съ весьма посредственной точностью, какъ напримѣръ, положеніе, что каждый человѣкъ умретъ. Если, на основаніи предыдущаго объясненія, различныя науки по необходимости представляютъ неравную степень точности, то это положеніе нисколько не относится къ ихъ достовѣрности.

Каждая наука можетъ дать столь же достовѣрные результаты, какъ и всякая другая, если она съумѣетъ свои заключенія оставить въ предѣлахъ той степени точности, какую допускаютъ соотвѣтствующія явленія,—условіе, однако, не всегда легко выполнимое. Въ каждой наукѣ различныя предположенія только болѣе или менѣе вѣроятны, но не они составляютъ сущность ея; всякій же положительный, т. е. основанный на прочно установленныхъ фактахъ результатъ достовѣренъ, и въ этомъ отношеніи между науками нѣтъ никакого различія.

Наконецъ, самое интересное свойство нашей энциклопедической формулы, по важности своей и многочисленности непосредственныхъ возможныхъ для него примѣненій, состоитъ въ прямомъ опредѣленіи общаго истиннаго плана совершенно раціональнаго научнаго образованія, опредѣленія, которое является непосредственнымъ результатомъ самаго установленія формулы.

Дѣйствительно, ясно, что прежде чѣмъ начать систематическое изученіе какой нибудь изъ основныхъ наукъ, необходимо подготовить себя изученіемъ наукъ, относящихся къ предшествующимъ по нашей энциклопедической формулѣ явленіямъ, такъ какъ послѣднія всегда имѣютъ преобладающее вліяніе на явленія, съ законами которыхъ мы предполагаемъ ознакомиться. Это соображеніе настолько очевидно, что, несмотря на его огромное практическое значеніе, я не считаю нужнымъ въ данный моментъ настаивать на принципѣ, который къ тому же будетъ неизбѣжно выступать впередъ по поводу каждой отдѣльной науки. Я ограничусь только замѣчаніемъ, что этотъ принципъ во всей полнотѣ примѣнимъ не только ко всеобщему образованію, но въ частности и къ спеціальному образованію ученыхъ.

Такъ, физики, неизучавшіе раньше, по крайней мѣрѣ въ общихъ чертахъ, астрономіи,—химики, непріобрѣвшіе, прежде чѣмъ приступить къ занятіямъ своей собственной наукой, предварительно познаніи въ астрономіи, а затѣмъ въ физикѣ,—физіологи, неподготовившіеся къ своимъ спеціальнымъ занятіямъ предварительнымъ изученіемъ астрономіи, физики и химіи, не удовлетворяютъ одному изъ основныхъ условій ихъ умственнаго развитія. Еще болѣе очевидно это положеніе по отношенію къ лицамъ, которые хотятъ приступить къ положительному изученію соціальныхъ наукъ, не познакомившись ранѣе въ общихъ чертахъ съ астрономіей, физикой, химіей и физіологіей.

Такъ какъ всѣ эти условія въ наши дни выполняются весьма рѣдко и нѣтъ ни одного прочно поставленнаго учрежденія, которое было бы устроено съ цѣлью удовлетворенія ихъ, то можно сказать, что еще не существуетъ ученыхъ, дѣйствительно раціонально подготовленныхъ. Это соображеніе, по моему мнѣнію, такъ важно, что я безъ боязни рѣшаюсь приписать частью указанному недостатку нашего современнаго образованія чрезвычайно неудовлетворительное состояніе, въ которомъ еще находятся труднѣйшія науки; несовершенство этихъ наукъ не вызывается вовсе дѣйствительною сложностью природы соотвѣтствующихъ явленій.

Указанное выше условіе представляется еще болѣе важнымъ по отношенію ко всеобщему образованію. Я нахожу его даже настолько необходимымъ, что считаю невозможнымъ осуществленіе самыхъ главныхъ общихъ результатовъ, которые научное образованіе призвано произвести въ обществѣ въ дѣлѣ обновленія нашей интеллектуальной системы, если главныя отрасли естественной философіи не будутъ изучаемы въ надлежащей послѣдовательности. Не будемъ забывать, что почти во всѣхъ умахъ, даже самыхъ высокихъ, идеи обыкновенно сохраняются въ той связи, въ которой они первоначально были пріобрѣтены, и такимъ образомъ начинать не съ начала часто есть зло непоправимое. Въ теченіе одного вѣка очень немного является мыслителей, способныхъ въ эпоху своей полной возмужалости, подобно Бэкону, Декарту и Лейбницу, отбросить всѣ предупрежденія, чтобы сверху до низу перестроить всю систему пріобрѣтенныхъ ими идей.

Значеніе нашего энциклопедическаго закона, какъ основанія научнаго образованія, можетъ быть правильно оцѣнено только тогда, если мы разсмотримъ его также по отношенію къ методу, а не только по отношенію къ доктринѣ, какъ мы это сейчасъ сдѣлали.

Съ этой новой точки зрѣнія, выполненіе опредѣленнаго нами общаго плана занятій должно непремѣнно дать намъ въ результатѣ совершенно ясное пониманіе положительнаго метода, пониманіе, котораго никакимъ инымъ способомъ нельзя достичь.

Въ самомъ дѣлѣ, если естественныя явленія расположить такъ, что всѣ дѣйствительно однородныя явленія будутъ отнесены къ одной и той-же наукѣ, а явленія, отнесенныя къ различнымъ наукамъ, будутъ дѣйствительно разнородны, то вслѣдствіе этого общій положительный методъ по необходимости будетъ измѣняться постоянно однообразно на всемъ протяженіи одной основной науки, и безпрерывно претерпѣвать различныя все болѣе и болѣе сложныя измѣненія при переходѣ отъ одной науки къ другой. Мы получимъ слѣдовательно увѣренность, что разсмотримъ положительный методъ во всѣхъ возможныхъ для него реальныхъ разновидностяхъ, что не имѣло-бы мѣста, если-бы мы приняли энциклопедическую формулу, неудовлетворяющую поставленнымъ выше главнымъ условіямъ.

Это новое соображеніе имѣетъ дѣйствительно основное значеніе, ибо, если въ прошлой лекціи мы видѣли вообще, что понять положительный методъ, изучая его отдѣльно отъ приложеній, невозможно, то теперь мы можемъ прибавить, что, не изучивъ послѣдовательно и въ надлежащемъ порядкѣ его примѣненій ко всѣмъ главнымъ разрядамъ естественныхъ явленій, нельзя даже составить себѣ яснаго и точнаго понятія о этомъ методѣ. Одной науки недостаточно для достиженія этой цѣли, даже при самомъ разумномъ выборѣ ея, ибо, хотя по существу методъ тождественъ во всѣхъ наукахъ, однако каждая изъ нихъ особенно развиваетъ тотъ или другой изъ его характеристическихъ процессовъ, вліяніе которыхъ, слишкомъ слабо выраженное въ другихъ наукахъ, могло-бы остаться совершенно незамѣченнымъ. Такъ напримѣръ, въ нѣкоторыхъ отрасляхъ философіи примѣняется собственно наблюденіе, въ другихъ опытъ, и при томъ именно тотъ или другой родъ опытовъ, представляющій дѣйствительное орудіе изслѣдованія.

Равнымъ образомъ нѣкоторыя общія правила, нынѣ составляющія неотъемлемую часть самого метода, были первоначально извлечены изъ одной науки; хотя впослѣдствіе подобныя правила и были перенесены въ другія, но всетаки для полнаго усвоенія ихъ необходимо обратиться къ первоисточнику; такова, напримѣръ, теорія классификацій.

Ограничиваясь изученіемъ одной науки, мы конечно должны были-бы выбрать самую совершенную, чтобы какъ можно глубже понять положительный методъ; но такъ какъ самая совершенная наука въ тоже время и самая простая, то мы получили-бы очень неполное понятіе о методѣ, такъ какъ не знали-бы, какія существенныя видоизмѣненія онъ долженъ претерпѣть при приспособленіи къ изученію болѣе сложныхъ явленій. Въ этомъ отношеніи каждая изъ основныхъ наукъ представляетъ преимущества, свойственныя только ей одной; это ясно доказываетъ необходимость разсматривать всѣ науки, подъ опасеніемъ въ противномъ случаѣ составить себѣ только слишкомъ узкія понятія и недостаточный навыкъ. Это соображеніе придется впослѣдствіи часто повторять, поэтому теперь безполезно развивать его подробнѣе.

Я долженъ однако здѣсь, опять по отношенію къ методу, особенно настойчиво указать на необходимость для полнаго пониманія его не только изучать философски различныя основныя науки, но и изучать ихъ именно въ установленномъ въ этой лекціи порядкѣ. Что можетъ создать разумнаго человѣкъ—оставляя въ сторонѣ случай особаго превосходства его умственныхъ способностей—который сразу принимается за изученіе самыхъ сложныхъ явленій, не усвоивъ себѣ предварительно, путемъ изслѣдованія наиболѣе простыхъ явленій, что такое *законъ*, что значитъ *наблюдать*, что такое положительное понятіе и даже что такое значитъ разсуждать послѣдовательно? Таковъ, однако, даже въ настоящее время обычный ходъ занятій нашихъ молодыхъ физіологовъ, сразу приступающихъ къ изслѣдованію свойствъ живыхъ тѣлъ, не имѣя, въ большинствѣ случаевъ, другой подготовки, кромѣ первоначальнаго образованія, состоящаго только въ изученіи одного или двухъ мертвыхъ языковъ, и обладая въ лучшемъ случаѣ лишь самымъ поверхностнымъ знаніемъ физики и химіи, знаніемъ съ точки зрѣнія метода почти равнымъ нулю потому, что обыкновенно оно не было пріобрѣтено не раціональнымъ образомъ, начиная съ истинной исходной точки естественной философіи. Понятно, какъ важно измѣнить столь неправильный планъ занятій. Равнымъ образомъ, относительно соціальныхъ явленій, которыя еще сложнѣе, не будетъ-ли сдѣланъ большой шагъ къ возвращенію современныхъ обществъ къ дѣйствительно нормальному состоянію, если будетъ признана логическая необходимость приступать къ изученію этихъ явленій только послѣ послѣдовательнаго воспитанія нашихъ умственныхъ органовъ путемъ глубокаго философскаго изслѣдованія всѣхъ предыдущихъ явленій? Можно даже положительно утверждать, что въ этомъ-то и заключается главная трудность. Теперь уже мало найдется здравомыслящихъ людей, которые не были-бы убѣждены въ томъ, что общественныя явленія нужно изучать, слѣдуя положительному методу; но лица, занимающіяся такимъ изученіемъ, не знаютъ и не имѣютъ возможности узнать опредѣленно, въ чемъ состоитъ этотъ методъ, такъ какъ они не познакомились съ нимъ въ предшествовавшихъ его приложеніяхъ; поэтому только что указанное правило осталось до сихъ поръ безплоднымъ для обновленія соціальныхъ теорій, не смотря на всѣ усилія мнимыхъ положительныхъ реформаторовъ, невышедшихъ еще изъ теологическаго и метафизическаго состояній. Послѣднее соображеніе будетъ позже развито подробнѣе: здѣсь я долженъ ограничиться однимъ указаніемъ на него, исключительно чтобы обратить вниманіе на общее значеніе предложенной въ этой лекціи энциклопедической системы.

Таковы тѣ четыре главныя точки зрѣнія, съ которыхъ я долженъ былъ освѣтить общее значеніе раціональной и положительной классификаціи, установленной выше для основныхъ наукъ.

Чтобы дополнить общее изложеніе плана этого курса, мнѣ остается только разсмотрѣть одинъ огромный и важный пробѣлъ въ моей энциклопедической формулѣ, нарочно оставленный мною, и который читатель уже безъ сомнѣнія замѣтилъ. Дѣйствительно, въ нашей системѣ наукъ мы совсѣмъ еще не обозначили мѣста для математики.

Основаніемъ такого добровольнаго пропуска служитъ самая важность этой обширной и основной науки; вся слѣдующая лекція будетъ посвящена исключительно точному опредѣленію ея истиннаго общаго характера и ея положенія въ энциклопедіи наукъ. Чтобы однако не оставить огромную картину, которую я попытался набросать въ этой лекціи, неоконченной въ такомъ важномъ пунктѣ, я долженъ въ общихъ чертахъ намѣтить здѣсь заранѣе общіе результаты предпринимаемаго нами въ слѣдующей лекціи изслѣдованія.

При современномъ состояніи развитія нашихъ положительныхъ знаній слѣдуетъ, мнѣ кажется, считать математику, особенно со временъ Декарта и Ньютона, не столько составной частью естественной философіи въ собственномъ смыслѣ слова, сколько дѣйствительнымъ основаніемъ всей этой философіи, хотя, говоря точно, математика въ одно и тоже время представляетъ и то, и другое. Дѣйствительно, въ настоящее время свѣдѣнія, входящія прямо въ составъ математики, хотя совершенно реальныя и весьма драгоцѣнныя, сами по себѣ имѣютъ для насъ гораздо меньшее значеніе, чѣмъ возможность пользоваться ею какъ самымъ могущественнымъ орудіемъ, которое умъ человѣческій можетъ употребить для нахожденія законовъ естественныхъ явленій.

Чтобы составить себѣ въ этомъ отношеніи совершенно опредѣленное и безусловно точное мнѣніе, мы увидимъ, что математику надо раздѣлить на двѣ науки съ существенно различнымъ характеромъ: абстрактную математику или исчисленіе, понимая это послѣднее слово въ самомъ обширномъ смыслѣ, и конкретную математику, которая состоитъ съ одной стороны изъ общей геометріи, а съ другой—изъ раціональной механики. Конкретная часть математики, конечно, основана на абстрактной, и въ свою очередь становится прямымъ основаніемъ для всей естественной философіи, разсматривая, насколько это возможно, съ геометрической или механической точки зрѣнія всѣ явленія вселенной.

Абстрактная часть одна имѣетъ исключительно значеніе орудія изслѣдованія и представляетъ изъ себя только поразительное и обширное распространеніе естественной логики на извѣстный рядъ дедукцій. Наоборотъ, геометрію и механику надо считать за дѣйствительныя естественныя науки, основанныя, какъ и всѣ другія, на наблюденіи, хотя, благодаря чрезвычайной простотѣ ихъ явленій, они достигли безконечно болѣе совершенной степени систематизаціи, которая иногда могла скрывать экспериментальный характеръ ихъ первоначальныхъ принциповъ. Эти двѣ физическія науки имѣютъ ту особенность, что при теперешнемъ состояніи человѣческаго духа онѣ примѣняются и постоянно будутъ примѣняться скорѣе какъ методъ, чѣмъ какъ прямая доктрина.

Очевидно при этомъ, что, поставляя такимъ образомъ математику во главѣ положительной философіи, мы только расширяемъ приложеніе принципа классификаціи, основаннаго на послѣдовательной зависимости наукъ согласно степени отвлеченности соотвѣтствующихъ явленій и приведшаго насъ къ установленной въ этой лекціи системѣ наукъ. Теперь къ этому ряду мы лишь прибавляемъ дѣйствительный первый членъ его, важность котораго потребовала отдѣльнаго болѣе подробнаго разсмотрѣнія.

Дѣйствительно, геометрическія и механическія явленія наиболѣе общи, наиболѣе просты, отвлеченны и независимы отъ всѣхъ другихъ явленій, для которыхъ они, наоборотъ, служатъ основаніемъ. Легко также понять, что изученіе ихъ составляетъ необходимое введеніе къ изученію всѣхъ другихъ явленій, и такимъ образомъ математика должна составлять истинный исходный пунктъ всякаго раціональнаго научнаго образованія, общаго или спеціальнаго; это обстоятельство и объясняетъ общій, издавна эмпирически установившійся въ этомъ отношеніи обычай, неимѣвшій впрочемъ первоначально другого основанія, кромѣ сравнительной древности математическихъ наукъ.

Въ настоящее время я долженъ ограничиться бѣглымъ указаніемъ на всѣ эти соображенія, которыя будутъ спеціальнымъ предметомъ слѣдующей лекціи.

Итакъ, въ этой лекціи мы точно опредѣлили раціональный планъ, которымъ мы будемъ постоянно руководствоваться при изученіи положительной философіи,—опредѣлили не на основаніи пустыхъ и произвольныхъ теорій, но смотря на него какъ на предметъ истинной философской задачи. Въ окончательномъ выводѣ — математика, астрономія, физика, химія, физіологія и соціальная физика представляютъ ту энциклопедическую формулу, которая одна среди многочисленныхъ классификацій, допускаемыхъ шестью основными науками, логически соотвѣтствуетъ естественной и неизмѣнной іерархіи явленій.

Мнѣ не нужно напоминать о важности этого вывода; читатель долженъ усвоить его себѣ вполнѣ, чтобы постоянно примѣнять его въ теченіе всего нашего курса. Окончательнымъ результатомъ этой лекціи, если его выразить въ самой простой формѣ, является объясненіе и оправданіе большой синоптической таблицы, помѣщенной въ началѣ этого сочиненія, при построеніи которой я старался во внутреннемъ распредѣленіи каждой основной науки, по возможности строго слѣдовать принципу классификаціи, только что приведшему насъ къ общей іерархіи наукъ.

Третья лекція.

Философскія соображенія о совокупности математическихъ наукъ.

Приступая прямо къ предмету нашего курса и начиная съ философскаго изученія первой изъ шести основныхъ наукъ, указанныхъ въ предыдущей лекціи, мы имѣемъ возможность сейчасъ же замѣтить значеніе положительной философіи въ дѣлѣ усовершенствованія общаго характера каждой отдѣльной науки.

Хотя математика является наукой самая древней и наиболѣе совершенной, однако общее представленіе, которое мы должны составить себѣ о ней, установлено еще далеко не точно. Опредѣленіе самой науки и ея главныя подраздѣленія до сихъ поръ остаются неясными и не вполнѣ вѣрными; и множественное число, въ которомъ обыкновенно ставится ея названіе *), достаточно указываетъ на отсутствіе единства въ обыкновенномъ пониманіи философскаго характера математики. Въ дѣйствительности основныя понятія, входящія въ составъ этой великой науки, только въ началѣ прошлаго вѣка развились настолько, что истинный духъ совокупности науки могъ ясно проявиться. Съ этого времени, однако, вниманіе геометровъ было съ полнымъ основаніемъ, но слишкомъ исключительно поглощено спеціальнымъ изученіемъ различныхъ отдѣльныхъ отраслей ея и приложеніемъ добытыхъ результатовъ къ самымъ важнымъ міровымъ законамъ, чтобы въ надлежащей мѣрѣ остановиться на выясненіи общей системы науки.

Но теперь прогрессъ отдѣльныхъ частей идетъ не настолько уже быстро, чтобы препятствовать обзору всей совокупности науки. Математика **) сама по себѣ и наиболѣе существенныя приложенія ея получили достаточное развитіе и достигли того устойчиваго положенія, при которомъ слѣдуетъ постараться соединить различныя части науки въ одну

---

*) Слову „математика“ соотвѣтствуетъ во французскомъ языкѣ „les mathématiques“. Контъ, какъ это видно изъ помѣщеннаго ниже примѣчанія, старался ввести новый терминъ „la mathématique“. (*Пр. ред.*).

**) Я буду часто употреблять это выраженіе (la mathématique) въ единственномъ числѣ, какъ это предложилъ Кондорсе, чтобы съ большей силой указать на духъ науки.

систему, чтобы такимъ образомъ очистить путь для дальнѣйшихъ успѣховъ ея. Можно даже утверждать, что послѣднія внесенныя въ математику весьма серьезныя улучшенія прямо подготовили эту важную философскую операцію, придавъ главнымъ частямъ науки характеръ единства, недостававшаго ей прежде; такое именно направленіе имѣютъ выдающіяся и стоящія внѣ всякаго сравненія работы безсмертнаго автора *Теоріи функцій* и *аналитической механики* *).

Чтобы составить себѣ правильное представленіе о предметѣ математическихъ наукъ, разсматриваемыхъ во всей ихъ совокупности, можно исходить сначала изъ нѣсколько неяснаго и мало выражающаго опредѣленія, которое обыкновенно дается математикѣ за неимѣніемъ другого: *математика есть наука о величинахъ*, или, болѣе положительно, *наука, имѣющая цѣлью измѣреніе величинъ*. Это схоластическое опредѣленіе безъ сомнѣнія очень нуждается въ большей точности и большей глубинѣ, но самая идея его въ сущности справедлива и даже достаточно широка, если ее только понимать надлежащимъ образомъ. Въ подобныхъ случаяхъ, если это возможно безъ особыхъ затрудненій, вообще слѣдуетъ опираться на общеизвѣстныя понятія. Посмотримъ, какимъ образомъ, исходя изъ приведеннаго грубаго указанія, можно получить истинное опредѣленіе математики, которое бы достойнымъ образомъ соотвѣтствовало важности, обширности и трудности самой науки.

Вопросъ объ *измѣреніи* величины представляется уму самъ по себѣ какъ простое непосредственное сравненіе этой величины съ другой, подобной ей, которая признается извѣстной и принимается за единицу всѣхъ величинъ того же рода. Поэтому, опредѣляя математику только какъ науку, имѣющую цѣлью измѣреніе величинъ, мы даемъ о ней весьма несовершенное понятіе, ибо изъ этого опредѣленія нельзя даже представить себѣ, какимъ образомъ простое измѣреніе величинъ могло послужить предметомъ какой бы то ни было науки вообще, а въ особенности такой обширной и глубокой, какою вполнѣ основательно считается математика. Вмѣсто колоссальнаго ряда обширныхъ трудовъ, дающихъ нашей умственной дѣятельности неистощимую пищу, на основаніи указаннаго опредѣленія оказалось бы, что математика состоитъ изъ простыхъ механическихъ процессовъ, предназначенныхъ для нахожденія, путемъ операцій, аналогичныхъ наложенію линій, отношеній измѣряемыхъ величинъ къ другимъ, съ помощью которыхъ мы желаемъ ихъ измѣрить. Тѣмъ не менѣе единственный дѣйствительный недостатокъ этого опредѣленія заключается въ его недостаточной глубинѣ: оно не вводитъ въ заблужденіе относительно истинной конечной цѣли математики, но представляетъ прямую цѣль, почти всегда являющуюся совершенно косвенной и поэтому совсѣмъ не даетъ возможности понять природу науки.

Чтобы достигнуть такого пониманія, надо прежде всего разсмотрѣть одинъ общій фактъ, весьма легко устанавливаемый: прямое измѣреніе величины, съ помощью наложенія или какого нибудь подобнаго пріема, для насъ чаще всего совершенно невозможно, такъ что, если бы мы не имѣли другого средства для опредѣленія величинъ, кромѣ непосредственнаго ихъ сравненія между собой, то намъ пришлось бы отказаться отъ изслѣдованія большинства интересующихъ насъ величинъ.

Всю справедливость этого замѣчанія можно понять, разсмотрѣвъ

*) Лагранжъ (Lagrange).

подробно только одинъ частный случай, представляющій наибольшее для этой цѣли удобство—измѣреніе одной прямой линіи при помощи другой, тоже прямой линіи. Это сравненіе, безъ сомнѣнія самое простое изъ всѣхъ, какія мы только можемъ себѣ вообразить, все таки почти никогда не можетъ быть исполнено непосредственно.

Размышляя о совокупности условій, необходимыхъ для того, чтобы прямая линія могла быть измѣрена непосредственно, мы увидимъ, что чаще всего эти условія не могутъ быть выполнены сразу по отношенію ко всѣмъ линіямъ, которыя мы желали бы знать. Первое и самое элементарное изъ этихъ условій—возможность пройти вдоль линіи съ одного конца до другого, чтобы послѣдовательно наложить единицу мѣры по всей длинѣ линіи—очевидно исключаетъ громадное большинство разстояній, измѣреніе которыхъ насъ наиболѣе интересуетъ: прежде всего разстоянія между различными небесными тѣлами, между ними и землей, а затѣмъ и большинство разстояній между земными предметами, часто оказывающимися недоступными для насъ.

Если это первое условіе удовлетворено, то необходимо еще, чтобы измѣряемая длина не была ни слишкомъ велика, ни слишкомъ мала, такъ какъ и въ этихъ случаяхъ измѣненіе будетъ невозможно: затѣмъ требуется, чтобы эта линія была удобно расположена и т. д. Самое простое обстоятельство, которое съ отвлеченной точки зрѣнія, повидимому, не должно было создавать никакихъ новыхъ затрудненій, въ дѣйствительности часто дѣлаетъ прямое измѣреніе совершенно невозможнымъ. Такъ, напримѣръ, достаточно, если линія, которую мы измѣрили бы точно безъ всякаго труда въ горизонтальномъ положеніи, окажется вертикальною, чтобы ея измѣреніе было уже совершенно невозможно. Однимъ словомъ, непосредственное измѣреніе прямой линіи представляетъ такое сцѣпленіе трудностей, въ особенности если при этомъ желательно соблюсти извѣстную точность, что мы почти никогда не встрѣчаемъ доступныхъ для прямого и точнаго измѣренія линій, по крайней мѣрѣ извѣстной длины, кромѣ совершенно искусственно построенныхъ нами именно ради непосредственнаго ихъ измѣренія, съ которыми мы и стремимся связать всѣ другія.

Все, что я указалъ относительно линіи, относится еще съ большимъ основаніемъ къ поверхностямъ, объемамъ, скоростямъ, промежуткамъ времени, силамъ и т. д., вообще ко всѣмъ другимъ величинамъ, поддающихся точному опредѣленію, но по своей природѣ по необходимости представляющихъ еще больше препятствій къ непосредственному измѣренію.

Поэтому безполезно останавливаться далѣе на этомъ положеніи и мы должны признать достаточно доказанной невозможность опредѣлить съ помощью прямого измѣренія большинство величинъ, которыя мы желаемъ знать. Этотъ общій фактъ, какъ мы увидимъ впослѣдствіи дѣлаетъ самое образованіе математическихъ наукъ необходимымъ: отказываясь почти во всѣхъ случаяхъ отъ непосредственнаго измѣренія величинъ, умъ человѣческій принужденъ былъ искать способы для косвеннаго ихъ опредѣленія, и такимъ образомъ пришелъ къ созданію математики.

Общій методъ, постоянно примѣняемый для опредѣленія неподдающихся совсѣмъ прямому измѣренію величинъ, очевидно единственный, который можно для этого придумать, состоитъ въ томъ, чтобы связать данныя величины съ другими, допускающими непосредственное измѣреніе; съ помощью послѣднихъ можно найти первыя на основаніи соотношеній, существующихъ между тѣми и другими. Таковъ дѣйствительный предметъ математики, разсматриваемой во всей ея совокупности. Чтобы составить себѣ достаточно широкое представленіе о ней, надо еще принять во вниманіе, что косвенное опредѣленіе величинъ можетъ быть косвеннымъ въ различной степени. Въ большомъ числѣ случаевъ, часто самыхъ важныхъ, величины, къ опредѣленію которыхъ приводится измѣреніе главныхъ изслѣдуемыхъ величинъ, сами не поддаются непосредственному измѣренію, и поэтому въ свою очередь становятся предметомъ подобной же задачи и т. д.; такимъ образомъ во многихъ случаяхъ умъ человѣческій долженъ установить длинный рядъ величинъ, промежуточныхъ между системой неизвѣстныхъ величинъ, представляющихъ конечную цѣль его изслѣдованіи, и системой величинъ, поддающихся прямому измѣренію, на основаніи которыхъ окончательно опредѣляются неизвѣстныя и которыя на первый взглядъ кажутся неимѣющими съ послѣдними никакой связи. Нѣсколькихъ примѣровъ будетъ достаточно, чтобы объяснить все то, что въ предыдущихъ общихъ положеніяхъ можетъ показаться слишкомъ отвлеченнымъ.

Разсмотримъ прежде всего вертикальное паденіе тяжелыхъ тѣлъ— весьма простое, естественное явленіе могущее однако послужить предметомъ математическаго изслѣдованія, имѣющаго дѣйствительныя приложенія.

Наблюдая это явленіе, даже наиболѣе чуждый математическимъ понятіямъ умъ тотчасъ же увидитъ, что двѣ величины, встрѣчающіяся здѣсь, т. е. высота и время паденія тѣла, непремѣнно связаны другъ съ другомъ, такъ какъ они измѣняются вмѣстѣ и одновременно же сохраняютъ опредѣленное значеніе, или выражаясь языкомъ геометровъ, такъ какъ они суть *функціи* другъ друга. Явленіе, разсматриваемое съ этой точки зрѣнія, даетъ, слѣдовательно, мѣсто математической задачѣ, которая и будетъ состоять въ томъ, чтобы замѣнить прямое измѣреніе одной изъ величинъ, если оно будетъ невозможно, измѣреніемъ другой; такимъ именно образомъ можно, напримѣръ, измѣрить глубину пропасти, ограничиваясь измѣреніемъ времени, необходимаго для паденія тѣла до дна ея; поступая надлежащимъ образомъ, можно эту недоступную глубину опредѣлить съ такой же точностью, какъ если-бы она была отложена на горизонтальной линіи, помѣщенной въ условія, наиболѣе благопріятныя для безпрепятственнаго и точнаго измѣренія. Въ другихъ случаяхъ легко будетъ опредѣлить высоту, съ которой тѣло упало, между тѣмъ какъ прямое измѣреніе времени паденія будетъ совершенно невозможно; тоже самое явленіе послужитъ предметомъ обратной задачи—опредѣлить время по высотѣ паденія,—какъ напримѣръ, въ случаѣ, если бы мы захотѣли опредѣлить время вертикальнаго паденія тѣла съ луны на землю.

Въ предыдущемъ примѣрѣ математическая задача весьма проста, по крайней мѣрѣ если мы не примемъ во вниманіе измѣненіе напряженія силы тяжести и сопротивленіе вещества, сквозь которое тѣло проходитъ при своемъ паденіи. Чтобы расширить вопросъ, достаточно будетъ разсмотрѣть тоже явленіе въ самомъ общемъ видѣ, предполагая паденіе наклоннымъ *), и принимая во вниманіе всѣ сопровождающія его главныя обстоятельства. Тогда вмѣсто двухъ перемѣнныхъ величинъ,

*) Т. е. предполагая, что падающему тѣлу первоначально сообщена скорость въ направленіи, несовпадающимъ съ вертикальнымъ (Пр. ред.).

связанныхъ между собою простымъ соотношеніемъ, явленіе представитъ нѣсколько: пройденное въ горизонтальномъ или вертикальномъ направленіи пространство, время пробѣга, скорость тѣла въ каждой точкѣ его пути, даже напряженіе и направленіе его первоначальнаго импульса, которыя также могутъ быть разсматриваемы какъ перемѣнныя, и наконецъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, если уже принять во вниманіе всѣ обстоятельства движенія, сопротивленіе среды и напряженіе силы тяжести. Всѣ эти различныя величины будутъ связаны другъ съ другомъ такимъ образомъ, что каждая послѣдовательно можетъ быть косвенно опредѣлена на основаніи другихъ; здѣсь, слѣдовательно возникнетъ столько различныхъ математическихъ изслѣдованій, сколько въ данномъ явленіи имѣется сосуществующихъ величинъ. Очень простое измѣненіе физическихъ условій задачи можетъ, какъ это дѣйствительно имѣетъ мѣсто въ указанномъ примѣрѣ, обратить математическое изслѣдованіе, первоначально весьма элементарное, въ одну изъ труднѣйшихъ задачъ, полное и точное рѣшеніе которой до сихъ поръ было непосильно для величайшихъ представителей человѣческаго ума.

Второй примѣръ возьмемъ изъ области геометрическихъ явленій. Пусть требуется опредѣлить разстояніе, не поддающееся прямому измѣренію; обыкновенно это разстояніе представляютъ себѣ, какъ часть *фигуры* или какой нибудь системы линій, выбранныхъ такимъ образомъ, чтобы всѣ другіе элементы ея могли быть подвергнуты непосредственному наблюденію; напримѣръ, въ самомъ простомъ случаѣ, къ которому въ концѣ концовъ можно привести всѣ другіе, подлежащее опредѣленію разстояніе разсматривается, какъ сторона треугольника, въ которомъ можно прямо измѣрить или одну сторону и два угла, или двѣ стороны и одинъ уголъ.

Поэтому искомое разстояніе не будетъ измѣрено прямо, а явится результатомъ математическаго изслѣдованія, которое будетъ состоять въ опредѣленіи разстоянія съ помощью извѣстныхъ элементовъ, на основаніи отношенія, связывающаго ихъ между собою. Эта работа можетъ послѣдовательно осложняться все болѣе и болѣе, если предпологаемые извѣстными элементы опредѣляются, въ свою очередь, какъ это чаще всего и бываетъ, только косвеннымъ путемъ, при помощи новыхъ системъ вспомогательныхъ величинъ, число которыхъ въ крупныхъ вопросахъ этого рода подъ конецъ становится иногда весьма значительнымъ. Если разстояніе опредѣлено, то одно это обстоятельство часто даетъ возможность получить новыя величины, служащія предметомъ новыхъ математическихъ задачъ. Напримѣръ, если извѣстно разстояніе, на которомъ находится предметъ, то простое наблюденіе его видимаго діаметра, всегда возможное, позволитъ, очевидно, несмотря на недоступность самаго предмета, косвенно опредѣлить его истинные размѣры, а затѣмъ, путемъ аналогичныхъ изслѣдованій, и его поверхность, объемъ, даже вѣсъ, и множество другихъ свойствъ, знаніе которыхъ казалось намъ безусловно недоступнымъ.

Съ помощью такихъ именно изслѣдованій и удалось человѣку узнать не только разстоянія небесныхъ тѣлъ отъ земли, а слѣдовательно и другъ отъ друга, но и ихъ дѣйствительную величину, ихъ истинную фигуру, даже неровности на ихъ поверхности, и — что кажется еще болѣе недоступнымъ нашимъ орудіямъ изслѣдованія—ихъ относительныя массы, среднія плотности, главныя обстоятельства паденія тѣлъ на каждой изъ нихъ и т. д.

Благодаря могуществу математическихъ теорій всѣ эти результаты и многіе другіе, относящіяся къ различнымъ классамъ естественныхъ явленій, потребовали въ концѣ концовъ непосредственное измѣреніе только очень незначительнаго числа прямыхъ линій, выбранныхъ надлежащимъ образомъ, и нѣсколько большаго числа угловъ.

Чтобы однимъ выраженіемъ охарактеризировать все значеніе математики, можно совершенно строго сказать, что если бы мы не боялись—и вполнѣ основательно—увеличивать безъ нужды число математическихъ операцій, и не были-бы поэтому принуждены пользоваться ими только для опредѣленія величинъ, совершенно неподдающихся прямому или достаточно точному измѣренію, то мы могли-бы въ концѣ концовъ привести опредѣленіе всѣхъ точно измѣримыхъ величинъ, связанныхъ съ различными классами явленій, къ непосредственному измѣренію одной прямой линіи и надлежащаго числа угловъ.

Итакъ намъ удалось теперь точно опредѣлить содержаніе математическихъ наукъ, признавъ цѣлью ихъ *косвенное* измѣреніе величинъ и утверждая, что въ нихъ постоянно предлагается *опредѣлять однѣ величины посредствомъ другихъ, на основаніи существующихъ между ними точныхъ соотношеній.* Это положеніе, вмѣсто того, чтобы давать только идею о нѣкоторомъ искусствѣ, какъ это дѣлаютъ всѣ обыкновенныя опредѣленія математики, характеризуетъ прямо истинную науку, и сразу показываетъ, что математика состоитъ изъ огромнаго ряда связанныхъ между собою логическихъ операцій, могущихъ очевидно оказаться весьма сложными вслѣдствіе множества промежуточныхъ соотношеній, которыя надо установить между неизвѣстными и допускающими прямое измѣреніе величинами, вслѣдствіе многочисленности перемѣнныхъ величинъ, одновременно входящихъ въ данный вопросъ, и вслѣдствіе самой природы соотвѣтствующихъ разсматриваемымъ явленіямъ зависимостей между этими различными величинами. Согласно этому опредѣленію, слѣдуя духу математики должно смотрѣть на всѣ величины, относящіяся къ какому-нибудь явленію, какъ на связанныя другъ съ другомъ, чтобы такимъ образомъ измѣрять однѣ съ помощью другихъ.

Очевидно, что нѣтъ ни одного явленія, которое не давало-бы мѣста соображеніямъ такого рода; отсюда вытекаетъ естественная неопредѣленность границъ математики и даже ея безусловная логическая всеобщность; далѣе однако мы постараемся, насколько возможно точно, ограничить ея дѣйствительный объемъ.

Предыдущія объясненія вполнѣ оправдываютъ названіе, принятое для обозначенія науки, которой мы теперь занимаемся. Это названіе, которое только что получило вполнѣ опредѣленный смыслъ, само по себѣ обозначаетъ просто *наука* вообще; оно было безусловно точно для грековъ, не имѣвшихъ другой истинной *науки*, и могло сохраниться въ новѣйшія времена только для обозначенія математики, какъ науки по преимуществу. И дѣйствительно, опредѣленіе математики, къ которому мы только что пришли, если изъ него исключить оговорку о точности измѣреній, есть опредѣленіе всякой истинной науки, ибо не есть ли необходимая цѣль каждой науки объясненіе однихъ явленій посредствомъ другихъ, на основаніи отношеній, существующихъ между ними? Всякая наука заключается въ согласованіи фактовъ, и если бы различныя наблюденія оставались совершенно изолированными, то не было бы совсѣмъ и науки. Можно даже сказать вообще, что наука по существу своему предназначена избавлять насъ, насколько это допускаютъ различныя явленія, отъ необходимости наблюдать непосредственно, позволяя изъ возможно меньшаго числа непосредственныхъ данныхъ получать возможно большее число выводовъ. Не въ этомъ ли состоитъ дѣйствительное примѣненіе открываемыхъ нами законовъ естественныхъ явленій въ умозрѣніи и въ практикѣ? Математика, такимъ образомъ, по отношенію къ предметамъ, входящимъ дѣйствительно въ ея область, доводитъ только до высшей степени совершенства, какъ въ качественномъ, такъ и въ количественномъ отношеніи, тотъ же самый родъ изслѣдованія, какимъ въ болѣе или менѣе совершенной формѣ пользуется каждая истинная наука въ своей сферѣ.

Итакъ, съ помощью изученія математики, и только съ его помощью можно правильно и глубоко понять, что такое *наука* вообще. Только въ ней слѣдуетъ искать точнаго познанія метода, который человѣческій умъ постоянно примѣняетъ въ своихъ положительныхъ изслѣдованіяхъ, ибо нигдѣ вопросы не разрѣшаются такъ полно, и дедукція не проводится такъ далеко и съ такой строгостью. Равнымъ образомъ въ математикѣ же нашъ разумъ далъ самыя сильныя доказательства своей мощи, ибо математическія идеи достигаютъ высшей степени отвлеченности, возможной для положительныхъ воззрѣній. Поэтому всякое научное образованіе, начатое не съ изученія этой науки, неизбѣжно неправильно въ самомъ своемъ основаніи.

До сихъ поръ мы разсматривали математику только во всей совокупности, не обращая никакого вниманія на ея подраздѣленія. Теперь, чтобы закончить этотъ общій обзоръ и составить себѣ правильное понятіе о философскомъ характерѣ науки, мы должны разсмотрѣть ея основное дѣленіе; второстепенныя же подраздѣленія будутъ установлены въ слѣдующихъ лекціяхъ.

Основное дѣленіе можетъ быть дѣйствительно раціональнымъ и вытекающимъ изъ самой природы предмета только при условіи, если оно проявится само собой, при точномъ анализѣ какой-нибудь полной математической задачи. Такимъ образомъ, опредѣливъ выше общую цѣль математическихъ работъ, постараемся теперь охарактеризировать со всей точностью главные виды входящихъ въ ихъ составъ изслѣдованій.

Полное рѣшеніе всякой математической задачи по необходимости разлагается на двѣ части, совершенно различныя по существу, но находящіяся въ неизмѣнномъ и опредѣленномъ соотношеніи.

Дѣйствительно, мы видѣли, что цѣлью всякаго математическаго изслѣдованія является опредѣленіе неизвѣстныхъ величинъ, на основаніи соотношеній, существующихъ между ними и величинами извѣстными; для этого, очевидно, необходимо прежде всего знать съ точностью отношенія, существующія между разсматриваемыми величинами.

Этотъ первый рядъ изслѣдованій составляетъ ту часть рѣшенія, которую я называю *конкретной*; когда она закончена, природа задачи измѣняется, и вопросъ затѣмъ приводится къ простому вычисленію, т. е. къ простому опредѣленію неизвѣстныхъ чиселъ, когда точно извѣстны отношенія, связывающія ихъ съ данными числами. Этотъ второй рядъ изслѣдованій я называю *абстрактной* частью рѣшенія. Отсюда происходитъ и основное дѣленіе всей математики на двѣ большія науки, абстрактную математику и конкретную математику. Указанный выше анализъ можетъ быть примѣненъ къ каждой полной математической задачѣ, какъ бы проста или сложна она ни была. Чтобы сдѣлать это положеніе вполнѣ понятнымъ, достаточно привести хотя бы одинъ примѣръ.

Принимая снова во вниманіе указанное выше явленіе вертикальнаго паденія тяжелаго тѣла, и разсматривая самый простой его случай, мы увидимъ, что для опредѣленія по времени паденія высоты его и наоборотъ мы должны начать съ розысканія точнаго соотношенія между этими двумя величинами, или, какъ выражаются геометры, *уравненія*, которому они удовлетворяютъ; пока это изслѣдованіе не будетъ закончено, всякая попытка выразить въ числахъ значеніе одной изъ этихъ величинъ при помощи другой будетъ очевидно преждевременной, такъ какъ у нея не будетъ никакого основанія. Недостаточно знать вообще, что эти величины находятся въ взаимной зависимости, какъ это сейчасъ же замѣтитъ каждый, но нужно еще опредѣлить, въ чемъ состоитъ эта зависимость: подобный вопросъ можетъ быть очень труденъ, и въ данномъ случаѣ дѣйствительно составляетъ самую важную часть задачи. Истинно-научный духъ очень молодъ и пока еще такъ мало распространенъ, что, вѣроятно, никто до Галилея не замѣтилъ даже увеличенія скорости тѣла при его паденіи; это обстоятельство, однако, совершенно исключаетъ гипотезу, что „высота пропорціональна времени",—гипотезу, къ которой естественнымъ образомъ пришелъ бы нашъ умъ, постоянно и невольно стремящійся въ каждомъ явленіи находить самыя простыя *функціи* по тому только, что онѣ гораздо легче усвоиваются. Однимъ словомъ, это первое изслѣдованіе привело къ открытію закона Галилея. Природа изслѣдованія совершенно измѣняется, какъ только конкретная часть его оказывается оконченной. Зная, что разстоянія, послѣдовательно пробѣгаемыя тѣломъ въ каждую секунду его паденія, возрастаютъ какъ рядъ нечетныхъ чиселъ, для опредѣленія на основаніи этого правила высоты по времени и наоборотъ, мы имѣемъ предъ собой чисто числовую и отвлеченную задачу, состоящую въ томъ, чтобы, исходя изъ установленнаго закона, доказать, что разстояніе есть кратное квадрата времени, и затѣмъ окончательно опредѣлить одну величину, когда другая дана.

Въ этомъ примѣрѣ конкретная задача труднѣе абстрактной. Мы нашли-бы обратное, если-бы стали разсматривать тоже явленіе въ самой общей формѣ, въ какой я уже представилъ его выше съ другой цѣлью. Въ отдѣльныхъ случаяхъ, главная трудность задачи будетъ заключаться то въ первой, то на второй ея части: иногда математическій законъ явленія самъ очень простъ, но его трудно установить; иногда-же онъ легко обнаруживается, но оказывается въ высшей степени сложнымъ: такимъ образомъ, сравнивая обѣ главныя части математики, въ полномъ ихъ объемѣ, слѣдуетъ признать ихъ совершенно равными какъ по обширности и трудности, такъ и по ихъ важности: это положеніе мы установимъ окончательно позже, разсматривая каждую изъ этихъ частей отдѣльно.

Обѣ указанныя части математики, столь существенно различныя, какъ видно изъ предыдущихъ объясненій, по цѣли, которую умъ человѣческій ставитъ себѣ въ нихъ, не менѣе различны и по природѣ изслѣдованій, входящихъ въ ихъ составъ.

Первая часть должна носить наименованіе *конкретной*, ибо она очевидно зависитъ отъ рода разсматриваемыхъ явленій и неизбѣжно должна видоизмѣняться при переходѣ къ новымъ явленіямъ, тогда какъ вторая совершенно не зависитъ отъ природы изслѣдуемыхъ явленій, и занимается исключительно существующими между ними численными отношеніями, что и заставляетъ назвать ее *абстрактной*. Однѣ и тѣ-же отношенія могутъ существовать для многихъ различныхъ явленій, и геометръ, не смотря на все различіе, будетъ разсматривать ихъ какъ одну аналитическую задачу, допускающую при самостоятельномъ изученіи ея общее для всѣхъ случаевъ рѣшеніе. Такъ напримѣръ, тотъ-же законъ, который опредѣляетъ зависимость между временемъ и пройденнымъ пространствомъ при вертикальномъ паденіи тѣла въ пустотѣ, можетъ найти примѣненіе и при другихъ явленіяхъ, не имѣющихъ ничего общаго ни съ паденіемъ тѣла, ни вообще между собою: такъ онъ выражаетъ отношеніе между поверхностью шара и длиной его діаметра, онъ-же опредѣляетъ уменьшеніе напряженія свѣта или теплоты по мѣрѣ удаленія свѣтящаго или грѣющаго тѣла и т. п.

Если общая всѣмъ этимъ математическимъ задачамъ абстрактная часть будетъ изучена для одной изъ нихъ, то тѣмъ самымъ она окажется изученной и для всѣхъ, тогда какъ конкретную часть по необходимости придется разсмотрѣть для каждой задачи отдѣльно, причемъ рѣшеніе нѣкоторыхъ изъ нихъ нисколько не облегчаетъ въ этомъ-же отношеніи рѣшенія другихъ. Невозможно установить дѣйствительно общіе методы, которые давали-бы опредѣленный и неизмѣнный путь для нахожденія во всѣхъ случаяхъ соотношеній, существующихъ между величинами, связанными съ различными явленіями; въ этомъ отношеніи возможны только особые методы для того или другого класса явленій геометрическихъ, механическихъ, термологическихъ и т. д. Наоборотъ, изъ какого-бы источника ни происходили разсматриваемыя величины, возможно установить однообразные методы для опредѣленія однѣхъ съ помощью другихъ, если предположить, что точныя соотношенія между ними извѣстны. Абстрактная часть математики по природѣ своей обладаетъ всеобщностью, конкретная-же должна быть спеціальной.

Чтобы представить это соображеніе съ новой точки зрѣнія, можно сказать, что конкретная математика имѣетъ философскій характеръ существенно экспериментальный, физическій, феноменальный, тогда какъ абстрактная математика—чисто логическій и раціональный. Здѣсь не мѣсто обстоятельно обсуждать пріемы, которыми человѣческій умъ пользуется, чтобы находить математическіе законы явленій: но вытекаетъ-ли законъ изъ точныхъ наблюденій, или-же, какъ это бываетъ чаще, послѣднія только подтверждаютъ законъ, построенный путемъ разсужденія на основаніи наиболѣе общихъ фактовъ, во всякомъ случаѣ очевидно, что этотъ законъ считается справедливымъ настолько, насколько онъ согласуется съ результатами прямого опыта. Такимъ образомъ конкретная часть каждой математической задачи всегда по необходимости основана на изслѣдованіи внѣшняго міра, и, какова-бы ни была роль разсужденія, она никогда не будетъ приведена къ простому ряду логическихъ комбинацій. Наоборотъ абстрактная часть, если она предварительно будетъ точно отдѣлена отъ конкретной, можетъ представлять только болѣе или менѣе длинные ряда послѣдовательныхъ дедукцій; ибо, если уравненіе явленія найдено, то опредѣленіе однихъ величинъ, входящихъ туда, съ помощью другихъ, какъ-бы трудно оно ни было, остается всецѣло въ области разсужденія. Уму предстоитъ вывести изъ этихъ уравненій результаты, въ нихъ очевидно заключающіеся, хотя иногда въ весьма неявномъ видѣ, и ему незачѣмъ вновь обращаться къ внѣшнему міру, разсмотрѣніе котораго становится уже неумѣстнымъ и даже должно быть старательно отстраняемо, чтобы привести изслѣдованіе къ дѣйствительно свойственной ему трудности.

Изъ этого общаго сравненія, указаніемъ на однѣ только главныя черты котораго я долженъ здѣсь ограничиться, видно, насколько естественно и глубоко установленное выше основное дѣленіе математическихъ наукъ.

Чтобы закончить общее объясненіе этого дѣленія, намъ остается только, съ возможной для этого перваго обзора точностью, отмѣтить границы каждаго изъ главныхъ дѣленій математики.

A priori можетъ казаться, что *конкретная математика*, имѣющая цѣлью нахожденіе *уравненій* явленій, должна состоять изъ столькихъ отдѣльныхъ наукъ, сколько существуетъ дѣйствительно различныхъ для насъ категорій естественныхъ явленій; но на самомъ дѣлѣ мы еще очень далеки отъ того, чтобы открыть математическіе законы явленій всѣхъ родовъ; сейчасъ мы увидимъ даже, что въ этомъ отношеніи большая часть ихъ по всей вѣроятности никогда не уступитъ нашимъ усиліямъ. Дѣйствительно, при современномъ состояніи человѣческаго духа, существуетъ только двѣ большихъ и общихъ категоріи явленій, уравненія которыхъ вообще извѣстны, именно сперва явленія геометрическія, а затѣмъ и явленія механическія. Такимъ образомъ конкретная часть математики состоитъ изъ геометріи и раціональной механики.

Правда, этого достаточно, чтобы придать ей вполнѣ характеръ логической универсальности, если разсматривать совокупность явленій съ наиболѣе высокой точки зрѣнія естественной философіи. Дѣйствительно, если-бы мы представили себѣ всѣ части міра неподвижными, то очевидно мы могли-бы наблюдать только геометрическія явленія, такъ какъ всѣ вопросы сводились-бы къ отношеніямъ формы, величины и положенія; если затѣмъ принять во вниманіе происходящія въ мірѣ движенія, то надлежитъ разсматривать еще и явленія механическія.

Примѣняя здѣсь упомянутую въ первой лекціи, хотя съ другой цѣлью, философскую мысль г. де-Бленвиля, уже достаточно обобщенную, можно установить, что съ статической точки зрѣнія міръ представляетъ только геометрическія явленія, а съ динамической—только механическія. Такимъ образомъ геометрія и механика сами по себѣ образуютъ двѣ основныя естественныя науки въ томъ смыслѣ, что всѣ явленія въ природѣ могутъ быть разсматриваемы какъ простые и необходимые результаты законовъ пространства или законовъ движенія.

Но, несмотря на полную логическую возможность такого взгляда, трудность заключается въ томъ, чтобы примѣнить его съ необходимой точностью и чтобы провести въ каждомъ общемъ случаѣ, представляющемся намъ при изученіи природы, т. е. въ томъ, чтобы каждый важный вопросъ естественной философіи по отношенію къ какому-нибудь опредѣленному классу явленій привести къ геометрической или механической задачѣ, къ которой его можно съ достаточнымъ основаніемъ считать приводимымъ. Это преобразованіе требуетъ предварительно большихъ успѣховъ въ изученіи каждаго класса явленій, и до сихъ поръ въ дѣйствительности было выполнено только для астрономическихъ явленій и нѣкоторыхъ изъ разсматриваемыхъ собственно земной физикой. Такимъ именно образомъ астрономія, акустика, оптика и т. д. въ концѣ концовъ сдѣлались простыми приложеніями математики къ извѣстнымъ разрядамъ наблюденій *).

---

*) Относящееся сюда примѣчаніе автора читатель найдетъ въ концѣ этой лекціи (пр. изд.).

Но такъ какъ предѣлы этихъ приложеній, по самой природѣ ихъ, установлены далеко не точно, то смѣшивать приложенія съ самой наукой значило-бы отвести математикѣ неопредѣленную и совершенно смутную область, какъ это дѣлается при обыкновенномъ, неправильномъ и во многихъ другихъ отношеніяхъ, дѣленіи математики на чистую и прикладную.

Поэтому мы будемъ по прежнему признавать, что въ составъ конкретной математики входятъ только геометрія и механика.

Что-же касается *абстрактной математики*, общее дѣленіе которой я разсмотрю въ слѣдующей лекціи, то ея природа опредѣлена ясно и точно. Она состоитъ изъ такъ называемаго *исчисленія*, понимая это слово въ самомъ широкомъ смыслѣ и включая туда и самыя простыя дѣйствія надъ числами, и самыя возвышенныя комбинаціи трансцендентнаго анализа.

Ближайшая цѣль *исчисленія* заключается въ рѣшеніи всѣхъ численныхъ задачъ. Его исходная точка всегда и по необходимости есть точно установленныя отношенія, т. е. *уравненія* между различными разсматриваемыми одновременно величинами, отношенія, составленіе коихъ есть конечная цѣль конкретной математики. Какъ-бы сложны и косвенны ни были эти отношенія, цѣль науки *исчисленія* всегда заключается въ опредѣленіи значеній неизвѣстныхъ величинъ на основаніи значеній величинъ извѣстныхъ. Наука исчисленія хотя и достигла наибольшаго сравнительно со всѣми другими совершенства, несомнѣнно въ дѣйствительности все-таки еще мало подвинулась впередъ, такъ что ея цѣль осуществляется съ удовлетворительной полнотой только въ рѣдкихъ случаяхъ. Тѣмъ не менѣе истинный характеръ исчисленія таковъ, какъ указано выше: чтобы ясно понимать дѣйствительную природу какой-нибудь науки, надо всегда предполагать, что она достигла своего совершенства.

Чтобы резюмировать вполнѣ философски высказанныя выше соображенія относительно основного дѣленія математики, важно замѣтить здѣсь, что это дѣленіе есть только приложеніе того-же общаго принципа классификаціи, который въ прошлой лекціи далъ намъ возможность установить раціональную іерархію положительныхъ наукъ.

Дѣйствительно, сравнивая съ одной стороны исчисленіе, а съ другой — геометрію и механику, можно по отношенію къ разсматриваемымъ въ каждой изъ этихъ двухъ главныхъ частей математики идеямъ провѣрить всѣ существенныя характеристическія черты нашего энциклопедическаго метода. Очевидно, что аналитическія понятія въ одно и тоже время болѣе отвлеченны, общи и просты, чѣмъ геометрическія или механическія. Хотя съ исторической точки зрѣнія главныя понятія математическаго анализа возникли подъ вліяніемъ соображеній геометріи и механики, съ успѣхомъ которыхъ тѣсно связанъ и прогрессъ исчисленія, однако анализъ съ логической точки зрѣнія по существу независимъ отъ геометріи и механики, тогда какъ послѣднія по необходимости опираются на него.

Итакъ, математическій анализъ, въ силу принципа, которому мы до сихъ поръ постоянно слѣдовали, является истиннымъ раціональнымъ основаніемъ всей системы нашихъ положительныхъ знаній, первой и наиболѣе совершенной изъ всѣхъ основныхъ наукъ. Понятія, которыми онъ занимается, наиболѣе общи, отвлеченны и просты изъ всѣхъ, дѣйствительно доступныхъ нашему уму. Въ этихъ трехъ отношеніяхъ равной важности нельзя идти далѣе, не впадая неизбѣжно въ метафизическія бредни. Какое въ самомъ дѣлѣ *substractum* можетъ остаться въ умѣ и служить положительнымъ предметомъ для разсужденія, если мы уничтожимъ еще хоть одинъ аттрибутъ въ понятіи о неопредѣленныхъ величинахъ, постоянныхъ или перемѣнныхъ, которымъ пользуются геометры, чтобы подняться, какъ это думаютъ онтологи, до мнимой высшей степени отвлеченности?

Указанная особенность природы математическаго анализа позволяетъ намъ легко объяснить себѣ, почему при правильномъ примѣненіи анализъ представляетъ такое могущественное средство не только, чтобы придать нашимъ познаніямъ бо́льшую точность — что понятно и само собой—но и чтобы установить безконечно болѣе совершенное согласованіе въ изученіи явленій, допускающихъ приложеніе анализа. Въ самомъ дѣлѣ, если понятія обобщены и упрощены насколько возможно и до такой степени, что абстрактное рѣшеніе одной аналитической задачи заключаетъ неявное рѣшеніе цѣлаго ряда разнородныхъ физическихъ задачъ, то отсюда для человѣческаго ума необходимо должна вытекать бо́льшая легкость познаванія отношеній между явленіями, сначала казавшимися совершенно отдѣльными другъ отъ друга,въ которыхъ затѣмъ удалось обнаружить все, что было въ немъ общаго, чтобы разсмотрѣть это общее отдѣльно. Такимъ образомъ изслѣдуя пути, пройденныя нашимъ умомъ при рѣшеніи важныхъ геометрическихъ и механическихъ задачъ, мы видимъ, что благодаря помощи анализа естественнымъ образомъ возникаютъ весьма часто совершенно неожиданныя сближенія между вопросами, которые сначала, казалось, не имѣли никакой связи, и которые затѣмъ мы часто признаемъ тождественными. Могли-ли бы мы, напримѣръ, безъ помощи анализа замѣтить хотя-бы малѣйшую аналогію между опредѣленіемъ направленія кривой въ каждой изъ ея точекъ и направленіемъ скорости тѣла въ каждый моментъ его движенія, т. е. между вопросами, въ глазахъ геометра составляющими, несмотря на все ихъ различіе, только одну задачу?

Сравнительно высокое развитіе математическаго анализа, обнаруживающееся при сопоставленіи его со всѣми другими отраслями нашихъ положительныхъ знаній, также легко понять, если хорошо выяснить себѣ его общій характеръ. Это совершенство не зависитъ, какъ то на основаніи поверхностнаго изслѣдованія предполагали метафизики, и въ особенности Кондильякъ, отъ природы знаковъ, чрезвычайно сжатыхъ и общихъ, употребляемыхъ въ качествѣ орудія мышленія. Въ этомъ отдѣльномъ важномъ случаѣ, какъ и во всѣхъ другихъ, вліяніе знаковъ было значительно преувеличено, хотя безъ сомнѣнія оно имѣло весьма реальное значеніе, какъ это признавали до Кондильяка, и притомъ въ болѣе точной формѣ, многіе геометры.

Въ дѣйствительности, всѣ главныя понятія анализа образовались безъ существенной помощи алгебраическихъ знаковъ, входившихъ въ употребленіе только, когда самыя понятія были уже составлены нашимъ умомъ. Высокимъ своимъ совершенствомъ наука исчисленія обязана, главнымъ образомъ, чрезвычайной простотѣ относящихся къ ней идей, какими-бы знаками послѣднія ни выражались; такимъ образомъ нѣтъ ни малѣйшей надежды какимъ нибудь ухищреніемъ научнаго языка, предполагая даже, что оно возможно, довести до той-же степени совершенства теоріи, которыя относятся къ болѣе сложнымъ понятіямъ и по самой природѣ своей необходимо осуждены на болѣе или менѣе низшее логически положеніе, сообразно съ классомъ разсматриваемыхъ ими явленій.

Предпринятое нами въ этой лекціи изслѣдованіе философскаго характера математики осталось-бы неполнымъ, если-бы, разсмотрѣвъ ея цѣль и составъ, мы не указали нѣсколькихъ общихъ соображеній относительно дѣйствительныхъ предѣловъ ея области.

Съ этою цѣлью и чтобы составить себѣ правильное понятіе объ истинной природѣ математики, надо прежде всего признать, что съ чисто логической точки зрѣнія эта наука сама по себѣ необходимо и строго универсальна, ибо нѣтъ ни одного вопроса, который въ концѣ концовъ нельзя было-бы себѣ представить состоящимъ въ опредѣленіи однихъ величинъ при помощи другихъ, на основаніи извѣстныхъ отношеній между ними, и слѣдовательно приводимымъ къ простому вопросу о числахъ. Это замѣчаніе станетъ понятнымъ, если обратить вниманіе, что при всѣхъ нашихъ изслѣдованіяхъ, къ какому-бы разряду явленій они ни относились, мы въ концѣ концовъ стремимся прійти къ числамъ и къ долямъ. Хотя мы чаще всего достигаемъ этого результата только очень грубымъ образомъ и съ помощью весьма ненадежныхъ пріемовъ, тѣмъ не менѣе очевидно, что въ этомъ дѣйствительно состоитъ цѣль всѣхъ нашихъ изслѣдованій. Такимъ образомъ, чтобы выбрать примѣръ изъ класса явленій, наименѣе доступныхъ математическому изслѣдованію, остановимся на явленіяхъ, свойственныхъ живымъ тѣламъ, разсматривая ихъ при томъ, для большаго осложненія, въ патологическомъ состояніи: не очевидно-ли здѣсь, что всѣ терапевтическіе вопросы можно признать состоящими въ опредѣленіи величинъ различныхъ воздѣйствующихъ на организмъ факторовъ, которые своимъ вліяніемъ должны привести его въ нормальное состояніе, допуская въ извѣстныхъ случаяхъ, какъ это дѣлаютъ геометры, нулевыя, отрицательныя и даже несовмѣстимыя между собой значенія для нѣкоторыхъ изъ этихъ величинъ? Безъ сомнѣнія, такой способъ представлять себѣ задачу въ дѣйствительности не можетъ быть, какъ мы это увидимъ, примѣненъ въ наиболѣе сложныхъ случаяхъ, гдѣ приложеніе его встрѣтитъ непреодолимыя трудности, но если вопросъ идетъ о томъ, чтобы понять отвлеченно все теоретическое значеніе науки, необходимо допустить, что она дѣйствительно получило то распространеніе, которое ей логически доступно.

Напрасно будетъ приводить въ видѣ возраженія противъ изложенной выше мысли общее дѣленіе человѣческихъ идей по двумъ категоріямъ Канта, т. е. по количеству и качеству, изъ которыхъ первая могла-бы выйти исключительно въ область математики. Самое развитіе этой науки давно уже положительно выяснило, какъ мало реальнаго въ этомъ поверхностномъ и метафизическомъ различіи, ибо уже основная концепція Декарта объ отношеніи конкретнаго къ абстрактному въ математикѣ доказала, что всѣ идеи качества могутъ быть приведены къ идеямъ количества. Эта концепція, установленная ея безсмертнымъ авторомъ только для геометрическихъ явленій, была затѣмъ на самомъ дѣлѣ распространена его послѣдователями на явленія механическія, а въ наше время и на явленія термологическія. Благодаря этому послѣдовательному обобщенію теперь уже нѣтъ геометра, который не признавалъ-бы, съ чисто теоретической точки зрѣнія, возможность примѣненія мысли Декарта къ какой угодно изъ нашихъ реальныхъ идей; такимъ образомъ всякое явленіе логически можетъ быть представлено *уравненіемъ*, подобно кривой или движенію; различіе существуетъ лишь въ трудности найти уравненіе и *рѣшить* его, т. е. въ задачахъ, которыя могутъ и часто дѣйствительно превосходятъ высшія силы человѣческаго духа.

Но если для того, чтобы составить себѣ правильное понятіе о математикѣ, слѣдуетъ считать ее одаренной по самой природѣ своей безусловной логической универсальностью, то не менѣе важно разсмотрѣть теперь значительныя естественныя ограниченія, которыя, благодаря слабости нашего разума, въ сильной степени уменьшаютъ дѣйствительную область ея распространенія по мѣрѣ осложненія и спеціализаціи явленій.

Безъ сомнѣнія, какъ мы это только что видѣли, можно признать, что всякій вопросъ приводится къ чисто ариѳметической задачѣ. Но дѣйствительная трудность изученія вопроса съ этой точки зрѣнія, т. е. трудность подобнаго преобразованія, въ различныхъ частяхъ естественной философіи тѣмъ больше, чѣмъ сложнѣе разсматриваемыя тамъ явленія, такъ что, за исключеніемъ самыхъ простыхъ и общихъ случаевъ, она становится скоро непреодолимой.

Мы легко поймемъ это замѣчаніе, если обратимъ вниманіе, что для введенія извѣстнаго вопроса въ область математическаго анализа нужно сначала открыть точныя отношенія между существующими въ данномъ явленіи величинами, такъ какъ установленіе уравненій явленій и даетъ необходимую исходную точку аналитическаго изслѣдованія. Очевидно, однако, что это условіе выполнить все труднѣе и труднѣе по мѣрѣ того, какъ явленія становятся болѣе частными, а потому и болѣе сложными.

Разсматривая съ этой точки зрѣнія установленныя въ предшествующей лекціи различныя основныя категоріи естественныхъ явленій, мы найдемъ, что, принявъ все во вниманіе, можно надѣяться въ самомъ лучшемъ случаѣ довести до такой высокой степени научнаго совершенства только три первыя категоріи, обнимающія всю *неорганическую физику*, по крайней мѣрѣ, если подобные предѣлы можно устанавливать съ точностью. Такъ какъ позже мнѣ придется разбирать этотъ вопросъ по отношенію къ каждой основной наукѣ отдѣльно, то здѣсь мнѣ достаточно сдѣлать самыя общія указанія.

Первое условіе, необходимое для того, чтобы явленія подчинялись математическимъ законамъ, которыя возможно было-бы открыть, состоитъ очевидно въ томъ, чтобы различныя величины, относящіяся къ явленіямъ, могли быть выражены опредѣленными числами. Сравнивая въ этомъ отношеніи обѣ главныя части естественной философіи, мы увидимъ, что вся *органическая физика*, и вѣроятно также и наиболѣе сложныя части неорганической по самой своей природѣ по необходимости недоступны нашему математическому анализу, благодаря крайней измѣнчивости чиселъ, относящихся къ соотвѣтствующимъ явленіямъ. Всякая опредѣленная мысль о точно установленныхъ числахъ въ явленіяхъ живыхъ тѣлъ совершенно неумѣстна, если къ ней обращаются не какъ къ средству облегченія вниманія, а съ другой цѣлью, и если придаютъ извѣстное значеніе точнымъ отношеніямъ между подлежащими величинами. Въ этомъ смыслѣ замѣчаніе Биша о злоупотребленіи математикой въ физіологіи вполнѣ справедливо: извѣстно къ какимъ заблужденіямъ приводитъ такой неправильный способъ изслѣдованія живыхъ тѣлъ.

Различныя свойства неорганическихъ тѣлъ, въ особенности самыя общія, проявляются въ каждомъ изъ нихъ въ почти одинаковой степени или, по крайней мѣрѣ, испытываютъ только простыя измѣненія, отдѣленныя другъ отъ друга большими промежутками однообразія, и вслѣдствіе этого могутъ быть подчинены точнымъ и постояннымъ законамъ. Такъ физическія качества неорганическаго, а въ особенности твердаго тѣла, его форма плотность, удѣльный вѣсъ, упругость и т. д. обладаютъ въ теченіе продолжительнаго времени въ числовомъ отношеніи удивительнымъ постоянствомъ, которое позволяетъ дѣйствительно съ пользой разсматривать явленія съ математической точки зрѣнія.

Извѣстно, что этого постоянства уже не существуетъ въ химическихъ явленіяхъ тѣхъ-же тѣлъ, такъ какъ послѣднія, какъ болѣе сложныя и находящіяся въ зависимости отъ большаго числа обстоятельствъ, представляютъ измѣненія болѣе широкія, болѣе частныя и поэтому менѣе правильные. Вмѣстѣ съ тѣмъ, на основаніи соображеній, которыя были уже указаны въ первой лекціи (стр. 20) и которыя будутъ подробно развиты въ третьемъ томѣ этого курса, теперь нельзя утверждать, даже вообще, что съ химіей можно связывать представленіе объ опредѣленныхъ числовыхъ зависимостяхъ, хотя-бы даже въ самомъ простомъ вопросѣ объ относительныхъ пропорціяхъ тѣлъ при соединеніи ихъ: обстоятельство это ясно показываетъ, какъ еще далекъ этотъ разрядъ явленій отъ подчиненія истиннымъ математическимъ законамъ.

Допустимъ однако въ этомъ случаѣ возможность и даже вѣроятность въ будущемъ подобнаго подчиненія, чтобы не дѣлать слишкомъ мелочнымъ обсужденіе общихъ предѣловъ, которые нужно здѣсь установить относительно дѣйствительно возможнаго расширенія истинной области математическаго анализа.

Въ этомъ отношеніи не возникнетъ ни малѣйшаго сомнѣнія, какъ только мы перейдемъ къ явленіямъ, которыя представляютъ тѣла, наблюдаемыя въ состояніи постояннаго внутренняго движенія молекулъ, составляющаго по существу то, что мы называемъ *жизнью*, понимая ее въ самомъ широкомъ смыслѣ, во всей совокупности существъ, ее проявляющихъ. Дѣйствительно, особенность, присущая явленіямъ физіологическимъ, которую болѣе точное изученіе ихъ дѣлаетъ нынѣ все замѣтнее и замѣтнее, состоитъ въ чрезвычайномъ непостоянствѣ численныхъ отношеній: это непостоянство они обнаруживаютъ, съ какой-бы точки зрѣнія ихъ не разсматривать, и, какъ мы увидимъ позже, когда естественный ходъ изложенія насъ приведетъ опять къ этому вопросу, такая неустойчивость есть необходимое слѣдствіе самого опредѣленія живыхъ тѣлъ. Намъ достаточно теперь отмѣтить неоспоримое положеніе, подтверждаемое всѣми фактами, что свойства органическихъ тѣлъ, геометрическія, механическія, химическія или жизненныя, подвержены громаднымъ и совершенно неправильнымъ числовымъ измѣненіямъ, слѣдующимъ другъ за другомъ черезъ весьма малые промежутки, подъ вліяніемъ множества обстоятельствъ, какъ внѣшнихъ, такъ и внутреннихъ, въ свою очередь тоже измѣняющихся. Такимъ образомъ всякая мысль объ опредѣленныхъ числахъ, а слѣдовательно и о математическихъ законахъ, которыя мы могли-бы надѣяться получить, находится въ явномъ противорѣчіи съ особой природой этого класса явленій. Такъ, если-бы мы пожелали точно опредѣлить хотя-бы только самыя простыя свойства живого существа, напримѣръ, его среднюю плотность или плотность одной изъ его главныхъ частей, его температуру, скорость внутренняго кровообращенія, пропорцію простыхъ элементовъ, входящихъ въ составъ твердыхъ и жидкихъ частей тѣла, количество поглощаемаго имъ въ опредѣленный промежутокъ времени кислорода и т. д. общую массу его поглощеніи, или постояннаго его выдыханія, а тѣмъ болѣе энергію его мускульныхъ силъ, напряженность его впечатлѣній, то, очевидно, не только нужно было-бы сдѣлать столько наблюденій, сколько есть видовъ и разрядовъ въ каждомъ видѣ, но пришлось-бы еще измѣрить весьма значительныя измѣненія, которыя испытываютъ указанныя величины при переходѣ отъ одного индивидуума къ другому и у одного и того-же индивидуума въ зависимости отъ возраста, состоянія здоровья, внутренняго расположенія, и вообще обстоятельствъ разнаго рода, непрерывно измѣняющихся, подъ вліяніемъ которыхъ индивидуумъ находится, какъ-то: состояніе атмосферы и т. д.

Какое значеніе могутъ имѣть всѣ мнимыя числовыя опредѣленія, такъ старательно зарегистрированныя, относящіяся къ разнымъ физіологическимъ и даже патологическимъ явленіямъ и выведенныя, въ самомъ лучшемъ случаѣ, изъ одного реальнаго измѣренія, тогда какъ ихъ слѣдуетъ имѣть множество? Они могутъ только вводить въ заблужденіе относительно настоящаго хода явленій и должны имѣть строго говоря только одно примѣненіе,—именно какъ мнемоническое, такъ сказать, средство для сообщенія опредѣленности идеямъ. Во всѣхъ этихъ случаяхъ очевидно совершенно невозможно когда-бы то ни было найти истинные математическіе законы. Тоже, и еще съ большимъ основаніемъ, относится къ соціальнымъ явленіямъ, которыя отличаются еще большей сложностью и вслѣдствіе этого еще большей измѣняемостью, какъ мы это подробно покажемъ въ четвертомъ томѣ этого курса.

Изъ предыдущаго не слѣдуетъ, однако, что мы должны отказаться, въ видѣ общаго философскаго тезиса, отъ мысли, что явленія всѣхъ классовъ сами по себѣ необходимо подчинены математическимъ законамъ, которые въ большинствѣ случаевъ только благодаря чрезвычайной сложности самыхъ явленій останутся для насъ навсегда неизвѣстными.

Дѣйствительно, нѣтъ никакого основанія думать, что въ этомъ отношеніи самыя сложныя явленія органическихъ тѣлъ были бы существенно другой природѣ, чѣмъ самыя простыя явленія неорганическихъ тѣлъ, ибо, если-бы мы могли совершенно отдѣлить каждую изъ простыхъ причинъ, вызывающихъ вмѣстѣ одно физіологическое явленіе, то все заставляетъ думать, что при этомъ выяснились бы присущіе ей, при данныхъ условіяхъ, извѣстный характеръ вліянія и извѣстный размѣръ воздѣйствія, столь же точно опредѣленные, какъ и во всеобщемъ тяготѣніи—истинномъ представителѣ всѣхъ основныхъ законовъ природы.

Безпорядочную измѣнчивость слѣдствій порождаетъ многочисленность различныхъ факторовъ, одновременно воздѣйствующихъ на одно и тоже явленіе; вслѣдствіе этого въ очень сложныхъ явленіяхъ, быть можетъ, не повторяется даже двухъ безусловно одинаковыхъ случая. Что-бы встрѣтить такого рода трудность, намъ не нужно даже обращаться къ явленіямъ живыхъ тѣлъ, такъ какъ подобныя затрудненія уже возникаютъ и по отношенію къ явленіямъ неорганическихъ тѣлъ, когда мы разсматриваемъ наиболѣе сложныя изъ нихъ, какъ напримѣръ, при изученіи метеорологическихъ явленій. Нѣтъ никакого сомнѣнія въ томъ, что въ отдѣльности каждый изъ факторовъ, производящихъ вмѣстѣ данное явленіе, подчиненъ математическимъ законамъ, хотя намъ и неизвѣстна большая часть ихъ; но многочисленность этихъ факторовъ дѣлаетъ наблюдаемыя слѣдствія ихъ настолько неправильными и измѣнчивыми, что каждый изъ нихъ кажется не подчиненной никакому точному закону.

Предыдущее разсужденіе заставляетъ насъ замѣтить второе обстоятельство, въ силу котораго и въ виду слабости нашего разума безусловно невозможно ввести изученіе наиболѣе сложныхъ явленій въ область приложеній математическаго анализа. Въ самомъ дѣлѣ, независимо отъ крайняго непостоянства дѣйствительныхъ результатовъ, проявляющагося въ наиболѣе частныхъ явленіяхъ и препятствующаго даже замѣтить для нихъ опредѣленныя числовыя нормы, изъ сложности явленій слѣдуетъ, что если-бы даже мы когда нибудь узнали математическіе законы, которымъ подчиненъ каждый факторъ въ отдѣльности, то при соединеніи такого большаго числа условій соотвѣтствующая математическая задача будетъ настолько превышать по своей трудности наши слабыя силы, что вопросъ чаще всего останется всетаки не разрѣшеннымъ. Этимъ путемъ, слѣдовательно, нельзя вести дѣйствительное и плодотворное изученіе большинства естественныхъ явленій.

Чтобы какъ можно точнѣе оцѣнить указанную выше трудность, посмотримъ, до какой степени осложняются математическія задачи, относящіяся даже къ самымъ простымъ явленіямъ неорганическихъ тѣлъ, если только мы попытаемся приблизить насколько возможно отвлеченное состояніе къ конкретному, принимая во вниманіе всѣ главныя условія, могущія оказать дѣйствительное вліяніе на результатъ явленія. Извѣстно напримѣръ, что весьма простое явленіе истеченія жидкости черезъ данное отверстіе подъ вліяніемъ одной только тяжести до сихъ поръ не имѣетъ полнаго математическаго рѣшенія, если при этомъ принять во вниманіе всѣ существенныя обстоятельства явленія. Тоже самое можно сказать относительно еще болѣе простаго движенія твердаго снаряда въ сопротивляющейся средѣ.

Почему математическій анализъ съ такимъ поразительнымъ успѣхомъ нашелъ себѣ примѣненіе для обстоятельнаго изученія небесныхъ явленій? Потому что эти явленія, не смотря на общепринятое мнѣніе, гораздо проще всѣхъ другихъ. Наиболѣе сложный вопросъ, возникающій при ихъ изученіи, относительно измѣненій, которыя производитъ въ движеніи двухъ тѣлъ, притягивающихся другъ къ другу въ силу тяготѣнія, третье тѣло, такимъ же образомъ дѣйствующее на первыя два, гораздо проще, чѣмъ самый простой вопросъ земной физики; а между тѣмъ и указанный вопросъ уже настолько труденъ, что до сихъ поръ мы имѣемъ только приближенныя рѣшенія его. При болѣе глубокомъ разсмотрѣніи предмета не трудно даже убѣдиться, что астрономія солнечной системы высокимъ совершенствомъ, достигнутымъ ею благодаря примѣненію математики, обязана въ сущности искусству, съ которымъ люди воспользовались всей особенной и, такъ сказать, случайной легкостью рѣшенія соотвѣтственныхъ задачъ,—легкостью, которую представляетъ особое и въ этомъ отношеніи весьма благопріятное для насъ строеніе нашей планетной системы. Дѣйствительно, входящія въ ея составъ планеты довольно малочислены, и, что особенно важно, обладаютъ массами, весьма неравными и значительно меньшими массы солнца; онѣ находятся на значительныхъ разстояніяхъ одна отъ другой, и имѣютъ почти сферическую форму; ихъ орбиты близки къ окружностямъ и представляютъ незначительныя взаимныя наклоненія, и т. д. Изъ всей этой совокупности обстоятельствъ слѣдуетъ, что возмущенія чаще всего незначительны, и что для ихъ вычисленія обыкновенно достаточно принять во вниманіе, кромѣ вліянія солнца на каждую отдѣльную планету, вліяніе еще одной только планеты, которая по своей величинѣ и близости можетъ вызвать замѣтное измѣненіе движенія. Но если бы, вмѣсто такого положенія вещей, наша солнечная система была составлена изъ болѣе значительнаго числа планетъ, сконцентрированныхъ въ меньшемъ пространствѣ и почти равныхъ по массѣ; если бы ихъ орбиты имѣли совершенно различныя наклоненія и большіе эксцентрицитеты; если бы эти тѣла обладали болѣе сложной формой, напримѣръ были бы эллипсоидами съ большими эксцентрицитетами и т. д., то, очевидно, исходя изъ того же закона тяготѣнія, мы не съумѣли бы подчинить изученіе небесныхъ явленій нашему математическому анализу, и, по всей вѣроятности, до сихъ поръ не могли бы даже установить основнаго закона.

Эти гипотетическія условія осуществились бы со всей полнотой въ явленіяхъ химическихъ, если бы мы захотѣли произвести относящіяся къ нимъ вычисленія на основаніи теоріи всеобщаго тяготѣнія.

Взвѣсивъ соотвѣтственнымъ образомъ всѣ предыдущія соображенія, можно, какъ я думаю, убѣдиться, что ограничивая въ будущемъ только нѣкоторыми частями неорганической физики дѣйствительно осуществимое распространеніе главныхъ приложеній математическаго анализа, я скорѣе преувеличиваю истинную область математики, чѣмъ съуживаю ее. Насколько для меня было важно показать безусловную логическую всеобщность математики, настолько же я считалъ нужнымъ отмѣтить и обстоятельства, которыя ограничиваютъ ея дѣйствительное распространеніе, чтобы тщетной погоней за невозможнымъ совершенствомъ не содѣйствовать уклоненію человѣческаго духа отъ истинно научнаго направленія въ дѣлѣ изученія наиболѣе сложныхъ явленій.

Итакъ, стараясь по возможности расширять область примѣненій математики, мы должны признать, что самыя трудныя науки по природѣ своей останутся на неопредѣленное время въ подготовительномъ состояніи, предшествующемъ въ другихъ наукахъ эпохѣ, когда онѣ становятся доступными математическимъ теоріямъ. Относительно наиболѣе сложныхъ явленій намъ слѣдуетъ довольствоваться точнымъ анализомъ обстоятельствъ ихъ возникновенія, приведеніемъ ихъ въ общую взаимную связь, опредѣленіемъ доли вліянія каждаго изъ главныхъ факторовъ и т. д., но не изучать ихъ съ точки зрѣнія количества, и поэтому не надѣяться внести въ соотвѣтственныя науки ту высокую степень совершенства, какую дастъ при изученіи болѣе простыхъ явленій правильное примѣненіе математики какъ въ отношеніи точности нашихъ познаній, такъ — что, можетъ быть, еще важнѣе — и въ отношеніи ихъ согласованія.

Построеніе положительной философіи началось съ математики, такъ какъ отъ нея мы получили *методъ*. Когда на всѣ другія основныя науки распространился тотъ-же способъ изслѣдованія, естественнымъ образомъ стали неизбѣжными попытки внести туда математическій духъ въ болѣе широкой мѣрѣ, чѣмъ то допускали соотвѣтствующія явленія; это вызвало затѣмъ болѣе или менѣе обширныя работы, въ родѣ трудовъ Бертоле по химіи, цѣлью которыхъ было освободиться отъ преувеличеннаго вліянія математики. Каждая наука въ своемъ развитіи внесла въ положительный методъ видоизмѣненія, зависѣвшія отъ явленій, подлежавшихъ ея изслѣдованію; этимъ опредѣлились особенности ея; она о томъ, что такое *уравненіе*, распространяя это названіе на всякое равенство между *какими бы то ни было* функціями разсматриваемыхъ величинъ. Ибо, хотя всякое уравненіе, очевидно, выражаетъ нѣкоторое равенство, но далеко не всякое равенство будетъ дѣйствительно *уравненіемъ* такого вида, который по природѣ своей допускаетъ примѣненіе аналитическихъ методовъ.

Указанная неточность логическаго опредѣленія столь важнаго для математики понятія влечетъ за собой то существенное неудобство, что дѣлаетъ почти необъяснимой, въ общемъ видѣ, громадную и серьезную трудность, испытываемую нами при установленіи отношенія конкретнаго къ абстрактному, которую обыкновенно — и съ полнымъ основаніемъ—отмѣчаютъ по отношенію къ каждому обширному математическому вопросу въ отдѣльности. Если бы значеніе слова *уравненіе* было дѣйствительно такъ широко, какъ обыкновенно предполагается при указанномъ опредѣленіи его, то, конечно, нельзя было бы понять, въ чемъ дѣйствительно заключается существенная трудность составленія уравненій для любой задачи; въ такомъ случаѣ, повидимому, все сводилось бы къ простому вопросу о формѣ, рѣшеніе котораго даже никогда не должно бы требовать особеннаго умственнаго напряженія, такъ какъ нельзя представить себѣ никакого точнаго соотношенія, непредставляющаго собой непосредственно равенства или не приводящагося къ нему очень быстро съ помощью весьма легкихъ преобразованій.

Поэтому, если допустить вообще въ опредѣленіе *уравненія* всякаго рода *функціи*, то останется совершенно не выясненной причина чрезвычайныхъ затрудненій, обыкновенно встрѣчающихся при приведеніи вопроса къ уравненію и очень часто вполнѣ сравнимыхъ съ трудностями, вызываемыми аналитическими изслѣдованіями уже полученнаго уравненія. Однимъ словомъ, обычное общее абстрактное представленіе объ *уравненіи* вовсе не соотвѣтствуетъ дѣйствительному значенію, которое геометры, соображаясь съ развитіемъ науки, связываютъ съ этимъ названіемъ. Въ упомянутомъ опредѣленіи есть логическая ошибка, недостатокъ соотношенія, который необходимо устранить.

Съ этой цѣлью, я прежде всего различаю два рода *функцій*:— функціи *абстрактныя* или аналитическія, и функціи *конкретныя*. Только первыя могутъ входить въ составъ дѣйствительныхъ *уравненій*, такъ что можно отнынѣ опредѣлять, точно и достаточно глубоко, всякое *уравненіе* какъ равенство между двумя *абстрактными* функціями разсматриваемыхъ величинъ. Чтобы уже не возвращаться болѣе къ этому основному опредѣленію, я долженъ сдѣлать здѣсь одно необходимое дополненіе, безъ котораго самая идея моя не имѣла бы достаточно общности, и указать, что эти абстрактныя функціи могутъ относиться не только къ величинамъ, непосредственно представляемымъ самой задачей, но и къ всевозможнымъ вспомогательнымъ величинамъ, связаннымъ съ первыми и вводимымъ часто въ видѣ простого математическаго преобразованія для облегченія составленія уравненій явленій. Приводя это объясненіе, я здѣсь только въ общихъ чертахъ напередъ сообщаю результатъ весьма важнаго и общаго изслѣдованія, которое будетъ изложено въ концѣ этой лекціи. Теперь возвратимся къ существу различія между функціями абстрактными и конкретными.

Указанное дѣленіе можетъ быть установлено двумя существенно различными, но взаимно дополняющими способами: *à priori* и *à posteriori*, т. е. или начиная съ общей характеристики особой природы каждаго разряда функцій, или перечисляя дѣйствительно, что вполнѣ возможно, всѣ нынѣ извѣстныя абстрактныя функціи, или, по крайней мѣрѣ, элементы, изъ которыхъ онѣ составлены.

A priori функціи, которыя я называю *абстрактными*, выражаютъ такого рода зависимости между величинами, какія можно представить себѣ только между числами, не прибѣгая къ указанію на тѣ явленія, въ которыхъ эти зависимости осуществляются. Наоборотъ, я называю *конкретными* функціи, выражающія такія зависимости между величинами, какія могутъ быть опредѣлены или поняты только при помощи извѣстнаго физическаго, геометрическаго, механическаго или какого нибудь другого явленія, въ которомъ онѣ дѣйствительно осуществляются.

Большинство функцій, даже представляющіяся нынѣ наиболѣе *абстрактными*, въ началѣ были *конкретными*; такимъ образомъ предыдущее различіе легко объяснить, указавъ только послѣдовательно на тѣ точки зрѣнія, съ которыхъ, по мѣрѣ роста науки, геометры разсматривали наиболѣе простыя аналитическія функціи. Я укажу для примѣра на степени, сдѣлавшіяся абстрактными функціями только послѣ трудовъ Віета и Декарта. Функціи x^2, x^3 въ современномъ анализѣ принимаются за чисто *абстрактныя*, но для древнихъ геометровъ были вполнѣ *конкретными*, выражающими только отношенія площади квадрата или объема куба къ длинѣ стороны или ребра. Въ ихъ глазахъ эти функціи имѣли настолько исключительно конкретный характеръ, что только съ помощью геометрическаго опредѣленія древніе геометры открыли элементарныя алгебраическія свойства этихъ функцій, относящіяся къ разложенію перемѣнной на двѣ части; эти свойства въ то время были только теоремами геометріи и числовое значеніе было связано съ ними значительно позже. Мнѣ сейчасъ же представится случай привести, но съ другой уже цѣлью, еще одинъ примѣръ, хорошо разъясняющій указанное мною основное различіе функцій; я имѣю въ виду круговыя функціи, прямыя и обратныя, которыя и теперь еще признаются то конкретными, то абстрактными, смотря потому, съ какой точки зрѣнія онѣ разсматриваются.

Установивъ общія характеристическія черты функцій конкретныхъ и абстрактныхъ, и разсматривая это дѣленіе функцій à posteriori, вопросъ о томъ, относится ли опредѣленная функція къ дѣйствительно абстрактнымъ и можетъ ли она поэтому войти въ составъ истиннаго аналитическаго уравненія, можно привести къ простому вопросу о фактѣ, такъ какъ мы сейчасъ же перечислимъ всѣ функціи этого рода.

На первый взглядъ такое перечисленіе кажется совершенно невозможнымъ, такъ какъ число отдѣльныхъ аналитическихъ функцій очевидно безконечно велико; но вся трудность вопроса исчезнетъ, если функціи раздѣлить на *простыя* и *сложныя*. Хотя число отдѣльныхъ функцій, разсматриваемыхъ математическимъ анализомъ, дѣйствительно безконечно велико, но эти функціи даже теперь состоятъ изъ очень небольшаго числа элементарныхъ функцій, которыя легко указать; перечисленія послѣднихъ очевидно достаточно для того, чтобы опредѣлить абстрактность или конкретность данной функціи, ибо она будетъ принадлежать къ первому или второму классу, смотря по тому, состоитъ ли она только изъ однихъ абстрактныхъ функцій, или же въ нее входятъ и другія.

Ниже слѣдуетъ таблица основныхъ элементовъ всѣхъ нашихъ аналитическихъ комбинацій, соотвѣтствующая современному состоянію науки. Очевидно достаточно привести съ этой цѣлью только функціи одной перемѣнной, такъ какъ функціи многихъ независимыхъ перемѣнныхъ постоянно, по самой своей природѣ, болѣе или менѣе *сложны.*

Пусть x есть независимая перемѣнная, y—соотвѣтствующая перемѣнная, зависящая отъ x. Различные виды простой абстрактной зависимости между x и y, которую мы только можемъ себѣ представить, выражаются слѣдующими десятью элементарными формулами, гдѣ каждая функція соединена съ *обратной*, т. е. съ такой, которая получилась бы изъ прямой функціи, если бы мы стали разсматривать зависимость x отъ y, а не y отъ x:

1-я пара	$1^0. y = a + x$	функція	*сумма*;
	$2^0. y = a - x$	„	*разность*;
2-я пара	$1^0. y = ax$	„	*произведеніе*;
	$2^0. y = \frac{a}{x}$	„	*частное*;
3-я пара	$1^0. y = x^a$	„	*степень*;
	$2^0. y = \sqrt[a]{x}$	„	*корень*;
4-я пара	$1^0. y = a^x$	„	*показательная*;
	$2^0. y = lx$	„	*логориѳмическая*;
5-я пара *)	$1^0. y = \sin x$	„	*круговая прямая*;
	$2^0. y = arc\ (\sin = x)$	„	*круговая обратная*;

*) Чтобы насколько возможно увеличить столь недостаточный объемъ и средства математическаго анализа, геометры включаютъ въ число аналитическихъ элементовъ и послѣднюю пару функцій. Хотя такое включеніе вполнѣ позволительно, однако надо замѣтить, что круговыя функціи не вполнѣ подходятъ къ остальнымъ элементарнымъ абстрактнымъ функціямъ. Между ними есть существенное различіе въ томъ отношеніи, что первыя четыре пары дѣйствительно абстрактны и просты, между тѣмъ какъ круговыя функціи могутъ проявлять или то, или другое свойство, смотря по тому, съ какой точки зрѣнія ихъ разсматриваютъ и какъ ихъ примѣняютъ, но онѣ никогда не бываютъ и простыми, и абстрактными вмѣстѣ.

Если функція $\sin x$ вводится въ анализъ въ качествѣ новой простой функціи, то она признается только какъ указаніе на геометрическое отношеніе, изъ котораго она проистекаетъ, но въ такомъ случаѣ она очевидно конкретная функція. Съ другой стороны, $\sin x$ аналитически удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ настоящей абстрактной функціи, если его разсматривать какъ сокращенное выраженіе формулы

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

или соотвѣтствующаго ряда; но съ послѣдней точки зрѣнія $\sin x$ совсѣмъ не новая аналитическая функція, такъ какъ она представлена состоящей изъ предыдущихъ.

Несмотря на это круговыя функціи обладаютъ нѣсколькими особыми свойствами, позволяющими оставить ихъ въ таблицѣ элементовъ математическаго анализа.

1) Сохраняя свой конкретный характеръ, круговыя функціи поддаются вычисленію, что даетъ возможность вводить ихъ въ уравненія, если онѣ относятся только къ даннымъ и если можно не принимать во вниманіе ихъ алгебраическое выраженіе;

2) Въ различныхъ круговыхъ функціяхъ, сравнивая ихъ только другъ съ другомъ, можно производить нѣкоторыя преобразованія, нетребующія также

Изъ этихъ весьма немногочисленныхъ элементовъ и составляются всѣ абстрактныя функціи, нынѣ извѣстныя. Какъ ни ограничено число ихъ, этихъ элементовъ очевидно достаточно, что образовать безконечное множество аналитическихъ комбинацій.

Ни одно раціональное соображеніе à priori не ограничиваетъ строго предыдущей таблицы, которая является только дѣйствительнымъ отраженіемъ современнаго состоянія науки. Наши аналитическіе элементы теперь болѣе многочисленны, чѣмъ они были во дни Декарта и даже Ньютона и Лейбница; прошло не болѣе столѣтіе съ тѣхъ поръ, какъ двѣ послѣднія пары функцій были введены въ анализъ трудами Жана Бернулли и Эйлера. Несомнѣнно, что впослѣдствіи будутъ допущены и новыя функціи: но, какъ я это укажу въ концѣ лекціи, мы не можемъ надѣяться, что онѣ будутъ очень многочисленны, такъ какъ дѣйствительное увеличеніе числа ихъ сопряжено съ большими трудностями.

Итакъ, теперь мы можемъ составить себѣ положительное и все-таки достаточно широкое понятіе о томъ, что геометры признаютъ за истинное *уравненіе*. Предыдущее объясненіе вполнѣ даетъ намъ возможность понять, какъ трудно на самомъ дѣлѣ составленіе *уравненій* явленій, которое возможно въ дѣйствительности только тогда, когда удастся математическіе законы явленій выразить при помощи функцій, составленныхъ исключительно изъ только что указанныхъ мною аналитическихъ элементовъ. Очевидно, дѣйствительно, что только при этомъ условіи задача становится вполнѣ *абстрактной* и приводится къ простому вопросу о числахъ, такъ какъ эти функціи—единственныя простыя соотношенія, которыя мы можемъ представить себѣ между числами, разсматривая ихъ самихъ въ себѣ. До этого пункта рѣшенія своего вопросъ въ сущности остается, каково ни было внѣшнее его положеніе, по прежнему конкретнымъ и не входитъ еще въ области *исчисленія*. Основная трудность перехода отъ *конкретнаго* къ *абстрактному*, вообще говоря, состоитъ главнымъ образомъ въ недостаточности указаннаго весьма небольшаго числа аналитическихъ элементовъ, находящихся въ нашемъ распоряженіи, съ помощью которыхъ, не смотря на малое разнообразіе ихъ, мы должны представить всѣ точныя отношенія, обнаруживаемыя различными явленіями природы. Въ виду безконечной измѣнчивости, которая въ этомъ отношеніи проявляется во внѣшнемъ

аналитическаго выраженія функцій. Изъ этого очевидно вытекаетъ возможность вводить эти функціи въ уравненія даже по отношенію къ неизвѣстнымъ, если только одновременно съ этимъ въ составъ уравненія не входятъ не-тригонометрическія функціи отъ тѣхъ-же перемѣнныхъ.

Поэтому только въ случаѣ, когда круговыя функціи, относящіяся къ неизвѣстнымъ величинамъ, связаны въ уравненіи съ абстрактными функціями другаго рода, для рѣшенія уравненія необходимо имѣть въ виду ихъ алгебраическое значеніе, вслѣдствіе чего онѣ перестаютъ считаться новыми простыми функціями. Но даже и тогда, если принять во вниманіе приведенное выше толкованіе, допущеніе этихъ функцій не лишитъ отношеній присущаго имъ характера настоящихъ аналитическихъ уравненій, что и составляетъ существенную цѣль нашего перечисленія абстрактныхъ элементарныхъ функцій.

Изъ указанныхъ въ примѣчаніе соображеній видно, что можно съ пользой включить въ число аналитическихъ элементовъ еще нѣкоторыя конкретныя функціи, если главныя условія, намѣченныя выше для круговыхъ функцій, выполнены. Такъ напр., труды Лежандра и въ послѣднее время Якоби объ эллиптическихъ функціяхъ дѣйствительно расширили поле анализа; то же самое можно сказать о нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интегралахъ, полученныхъ Фурье въ его теоріи теплоты.

мірѣ, мы легко поймемъ, какъ часто наши силы должны оказываться недостаточными для рѣшенія всѣхъ дѣйствительныхъ трудностей, въ особенности, если мы примемъ во вниманіе, что всѣ элементы анализа возникли первоначально изъ математическаго разсмотрѣнія самыхъ простыхъ явленій, такъ какъ всѣ они прямо или косвено ведутъ свое начало изъ геометріи; поэтому à priori мы не имѣемъ никакого раціональнаго основанія ожидать, чтобы они были въ состояніи выразить математическіе законы всякаго иного класса явленій. Я сейчасъ укажу одинъ общій глубокогеніальный пріемъ, съ помощью котораго человѣческій умъ сумѣлъ значительно уменьшить основную трудность, представляемую отношеніемъ конкретнаго къ абстрактному въ математикѣ, не увеличивая при этомъ числа аналитическихъ элементовъ.

Предыдущія объясненія точно опредѣляютъ истинный предметъ и область абстрактной математики; теперь я долженъ перейти къ изслѣдованію ея главныхъ подраздѣленій, ибо до сихъ поръ мы все время разсматривали *исчисленіе* во всемъ его объемѣ.

Первое прямое указаніе относительно состава науки исчисленія заключается въ дѣленіи ея на двѣ главныя вѣтви; этимъ вѣтвямъ, за неимѣніемъ болѣе удобныхъ терминовъ, я дамъ названія *алгебраическаго исчисленія* или *алгебры*, и *ариѳметическаго исчисленія* или *ариѳметики*, прося при этомъ понимать эти выраженія въ ихъ самомъ широкомъ логическомъ смыслѣ, а не въ томъ слишкомъ узкомъ значеніи, которое имъ обыкновенно дается.

Полное рѣшеніе каждаго вопроса *исчисленія*, начиная съ самаго элементарнаго и кончая самымъ сложнымъ, состоитъ по необходимости изъ двухъ послѣдовательныхъ частей, вполнѣ различныхъ по своей природѣ.

Задача первой части состоитъ въ такомъ преобразованіи предложенныхъ уравненій, которое указывало-бы способъ составленія неизвѣстныхъ величинъ съ помощью извѣстныхъ: это *алгебраическая* сторона вопроса.

Во второй части требуется *вычислить* полученныя въ первой части *формулы*, т. е. прямо опредѣлить значеніе искомыхъ чиселъ, выраженныхъ уже въ видѣ опредѣленныхъ явныхъ функцій отъ данныхъ чиселъ; въ этомъ состоитъ задача *ариѳметики* *).

---

*) Предположимъ, напримѣръ, что задача приводитъ къ слѣдующему уравненію, связывающему величину x съ двумя извѣстными величинами a и b,

$$x^3 + 3ax = 2b,$$

которое между прочимъ получается и при дѣленіи угла на три равныя части. Изъ уравненія видно, что зависимость x, съ одной стороны, и a и b съ другой вполнѣ опредѣлена, но пока уравненіе сохраняетъ свою первоначальную форму, совсѣмъ невозможно представить себѣ, какъ неизвѣстная величина получается изъ извѣстныхъ, а между тѣмъ именно это и надо найти, чтобы приступить къ вычисленію x. Въ этомъ и состоитъ предметъ алгебраической части задачи. Но когда, путемъ различныхъ преобразованій, послѣдовательно дѣлавшихъ происхожденіе неизвѣстнаго все болѣе и болѣе яснымъ, мы представимъ уравненіе въ видѣ

$$x = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 + a^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 + a^3}}$$

то задача алгебры кончается, и даже если для насъ окажется невозможнымъ

Понятно, что въ каждомъ дѣйствительно раціональномъ рѣшеніи задачи ариѳметическая часть слѣдуетъ за алгебраической и составляетъ ея необходимое дополненіе, такъ какъ, очевидно, необходимо сперва узнать происхожденіе неизвѣстныхъ чиселъ, чтобы затѣмъ опредѣлить дѣйствительныя значенія ихъ для каждаго отдѣльнаго случая; такимъ образомъ конецъ алгебраической части задачи становится исходнымъ пунктомъ ариѳметической.

Алгебраическое исчисленіе и исчисленіе *ариѳметическое* существенно отличаются, слѣдовательно, другъ отъ друга по цѣли, которую они себѣ ставятъ: они не менѣе отличаются и по той точкѣ зрѣнія, съ которой въ нихъ разсматриваются величины: въ алгебрѣ изслѣдуются соотношенія между ними, а въ ариѳметикѣ — численныя ихъ значенія. Истинный духъ *исчисленія* требуетъ вообще, чтобы назначеніе каждой части его было удержано съ самой строгой послѣдовательностью и чтобы линія раздѣла между обоими періодами рѣшенія была проведена настолько ясно, насколько это допускаетъ данный вопросъ. Внимательное соблюденіе этого правила, слишкомъ пренебрегаемаго, можетъ оказать большую услугу при рѣшеніи каждой отдѣльной задачи, направляя усилія нашего ума въ каждый моментъ рѣшенія задачи на истинныя трудности, которыя этому моменту соотвѣтствуютъ. Въ дѣйствительности, несовершенство науки исчисленія часто заставляетъ насъ, какъ я это объясню въ слѣдующей лекціи, смѣшивать при рѣшеніи одного и того-же вопроса соображенія алгебраическія съ соображеніями ариѳметическими. Хотя при этомъ нельзя раздѣлить всю работу на двѣ строго опредѣленныя части, одну чисто алгебраическую, а другую — чисто ариѳметическую, но пользуясь предыдущими указаніями, возможно избѣжать смѣшенія двухъ родовъ соображеній, какъ-бы ни была велика связь между ними.

Стараясь какъ можно короче резюмировать различіе, на которое я указалъ, можно въ общемъ *алгебру* опредѣлить какъ науку, имѣющую предметомъ *рѣшеніе уравненій*, и это опредѣленіе, которое сначала можетъ показаться слишкомъ узкимъ, будетъ однако достаточно широко, если указанныя выраженія понимать во всемъ ихъ логическомъ объемѣ, т. е. подразумѣвать подъ ними преобразованіе *неявныхъ* функцій въ эквивалентныя *явныя*. Такимъ же образомъ *ариѳметика* можетъ быть опредѣлена какъ наука, занимающаяся *вычисленіемъ* функцій. Сжимая эти опредѣленія насколько только возможно, мнѣ кажется, я могу дать дѣйствительно вѣрное понятіе объ дѣленіи исчисленія, сказавъ, какъ я это въ дальнѣйшемъ изложеніи и буду дѣлать во избѣжаніе объяснительныхъ перифразъ, что *алгебра* есть *исчисленіе функцій*, а *ариѳметика—исчисленіе численныхъ значеній*.

Легко теперь понять, насколько недостаточны и даже неправильны обыкновенныя опредѣленія. Чаще всего преувеличенное значеніе, придаваемое знакамъ, заставляетъ различать эти двѣ основныя вѣтви исчисленія по способу обозначенія предметовъ разсужденія въ каждой, что, конечно, является нелѣпымъ въ принципѣ и невѣрнымъ въ дѣйствительности. Даже знаменитое опредѣленіе, данное Ньютономъ, который

выполнить указанныя формулой ариѳметическія операціи, все таки полученный выводъ будетъ реальнымъ и часто очень важнымъ. Задача ариѳметики состоитъ теперь въ томъ, чтобы, исходя изъ этой формулы, найти x, когда значенія чиселъ a и b будутъ даны.

назвалъ *алгебру всеобщей ариѳметикой*, даетъ, конечно, очень ложное понятіе о природѣ и алгебры, и ариѳметики *).

Установивъ основное дѣленіе исчисленія на двѣ главныя отрасли, я долженъ сравнить вообще объемъ, значеніе и трудность этихъ двухъ частей исчисленія, чтобы затѣмъ остановиться только на исчисленіи функцій, которая должна быть главнымъ предметомъ нашего изслѣдованія.

Исчисленіе численныхъ значеній, или ариѳметика на первый взглядъ, казалось-бы, должно занимать такое же широкое поле, какъ и алгебра потому, что оно, повидимому, можетъ дать мѣсто стольким же отдѣльнымъ задачамъ, сколько можно представить себѣ различныхъ алгебраическихъ формулъ, подлежащихъ вычисленію. Но очень простого разсужденія достаточно, чтобы показать, что область ариѳметики по своей природѣ безконечно меньше, чѣмъ область исчисленія функцій: если раздѣлить функціи на *простыя* и *сложныя*, то, очевидно, умѣя *вычислять* простыя функціи, мы не встрѣтимъ никакого въ этомъ отношеніи затрудненія при разсмотрѣніи сложныхъ функцій. Съ алгебраической точки зрѣнія сложная функція играетъ роль, совершенно отличную отъ роли элементарныхъ функцій, входящихъ въ ея составъ; отсюда и вытекаютъ всѣ главныя трудности анализа; въ ариѳметикѣ дѣло стоитъ совсѣмъ иначе: тамъ число дѣйствительно различныхъ ариѳметическихъ операцій опредѣляется только числомъ элементарныхъ абстрактныхъ функцій, очень небольшую таблицу которыхъ я представилъ выше. Вычисленіе этихъ десяти функцій даетъ безусловную возможность вычислять все безконечное множество функцій, разсматриваемыхъ математическимъ анализомъ въ современномъ по крайней мѣрѣ его состояніи. Къ какимъ бы формуламъ не приводило насъ составленіе уравненій, новыя ариѳметическія операціи появятся только тогда, когда намъ удастся создать дѣйствительно новые аналитическіе элементы, а число ихъ во всякомъ случаѣ всегда останется очень малымъ. По самой своей природѣ область *ариѳметики* очень ограничена, тогда какъ область *алгебры*, строго говоря, безпредѣльна.

Важно однако замѣтить, что область ариѳметики въ дѣйствительности гораздо шире, чѣмъ это обыкновенно представляютъ себѣ, такъ какъ много чисто *ариѳметическихъ* вопросовъ, состоящихъ въ вычисленіи, обыкновенно не относятся къ ариѳметикѣ въ виду установившагося обычая разсматривать ихъ вмѣстѣ съ совокупностью болѣе или менѣе серьезныхъ аналитическихъ изслѣдованій; преувеличенное представленіе о важности знаковъ и здѣсь является главной причиной этого смѣшенія идей. Такимъ образомъ, не только построеніе таблицъ логориѳмовъ, но также и вычисленіе тригонометрическихъ таблицъ представляетъ чисто ариѳметическія операціи болѣе высокаго порядка. Можно указать какъ на относящіеся къ тому же разряду, хотя и къ совершенно иному и высшему классу, на всѣ пріемы, при помощи которыхъ

*) Я счелъ нужнымъ особенно указать на это опредѣленіе потому, что она служитъ основаніемъ усвоеннаго многими здравомыслящими лицами, незнакомыми съ математикой, взгляда на абстрактную часть этой науки, такъ какъ они не приняли во вниманіе, что въ эпоху, когда такое опредѣленіе было установлено, математическій анализъ не былъ достаточно развитъ, чтобы можно было правильно понять характеръ каждой изъ его главныхъ частей; этимъ именно и объясняется, какимъ образомъ Ньютонъ могъ предложить опредѣленіе, которое онъ навѣрно отбросилъ-бы теперь.

для каждой отдѣльной системы частныхъ значеній величинъ прямо опредѣляется численное значеніе зависящей отъ нихъ функціи, въ тѣхъ случаяхъ, когда невозможно найти общее выраженіе этой функціи въ явномъ видѣ. Съ этой точки зрѣнія *численное рѣшеніе* уравненій, *алгебраическое* рѣшеніе которыхъ неизвѣстно, а также и вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ, явныхъ выраженій которыхъ мы не знаемъ, въ дѣйствительности, не смотря на ихъ внѣшній видъ, принадлежатъ къ области *ариѳметики*, куда слѣдуетъ отнести всѣ операціи, имѣющія цѣлью *нахожденіе численныхъ значеній* функціи. Дѣйствительно, относящіяся сюда соображенія постоянно однообразны, какого бы рода ни были соотвѣтствующія *вычисленія*, и въ то же время постоянно отличаются отъ чисто *алгебраическихъ* соображеній.

Чтобы окончательно составить себѣ правильное понятіе о дѣйствительныхъ предѣлахъ исчисленія величинъ, къ нему надо отнести часть всей науки исчисленія, носящую въ настоящее время особое названіе *теоріи чиселъ*, но до сихъ поръ еще такъ мало разработанную. Цѣлью этой отрасли исчисленія, по природѣ своей весьма обширной, но неимѣющей большаго значенія въ общей системѣ науки, является опредѣленіе свойствъ, присущихъ различнымъ числамъ въ силу ихъ значеній, независимо отъ какой бы то ни было системы счисленія. Теорія чиселъ составляетъ нѣчто въ родѣ *трансцендентной ариѳметики* и къ ней дѣйствительно подходитъ опредѣленіе, которое Ньютонъ предложилъ для *алгебры*.

Итакъ, область *ариѳметики* въ дѣйствительности гораздо шире, чѣмъ это обыкновенно представляютъ себѣ; но, все таки, какое бы законное распространеніе мы ни допустили для нея, остается несомнѣннымъ, что въ совокупности абстрактной математики *исчисленіе величинъ* всегда будетъ, такъ сказать, только точкой по сравненіи съ *исчисленіемъ функцій*, составляющимъ существо науки. Правильность такой оцѣнки станетъ еще яснѣе, если принять во вниманіе соображенія, которыя мнѣ остается указать относительно истинной природы ариѳметическихъ вопросовъ вообще при болѣе глубокомъ разсмотрѣніи ея.

Желая опредѣлить точно, въ чемъ состоитъ собственно *вычисленіе*, легко убѣдимся, что оно представляетъ въ дѣйствительности только преобразованіе подлежащихъ вычисленію функціи, имѣющее, несмотря на свою спеціальную цѣль, собственно ту же природу, какъ и всѣ преобразованія, изучаемыя въ анализѣ. Съ этой точки зрѣнія, на *исчисленіе величинъ* можно смотрѣть просто какъ на приложеніе и особое примѣненіе *исчисленія функцій*, вслѣдствіе чего ариѳметика, какъ отдѣльная часть, такъ сказать, исчезаетъ изъ совокупности абстрактной математики.

Чтобы лучше понять это соображеніе, слѣдуетъ замѣтить, что если намъ предложено найти значеніе какого нибудь неизвѣстнаго числа, способъ образованія котораго намъ уже данъ, то это число при формулированіи самой ариѳметической задачи уже опредѣлено и выражено въ извѣстной формѣ; отыскивая его значеніе, мы только придаемъ его выраженію извѣстный видъ, въ которомъ обыкновенно точно выражается каждое отдѣльное число, т. е. представляемъ его съ помощью обычной системы *счисленія*. *Вычисленіе* состоитъ исключительно въ одномъ простомъ *преобразованіи* и, если первоначальное выраженіе числа соотвѣтствуетъ обычной системѣ счисленія, то, собственно говоря, нѣтъ и *вычисленія* или, другими словами, на вопросъ отвѣчаютъ сло вами вопроса же. Пусть, напримѣръ, предложено сложить два числа 30 и 7; отвѣтъ будетъ состоять въ повтореніи самой задачи, и тѣмъ не менѣе будетъ признано, что сумма *вычислена*; это означаетъ, что въ данномъ случаѣ первое выраженіе функціи не нуждается въ преобразованіи; иной результатъ будетъ при сложеніи 23 и 14, такъ какъ тогда сумма не будетъ сразу выражена въ формѣ, соотвѣтствующей занимаемому ею мѣсту въ опредѣленной общей системѣ счисленія.

Выражая предыдущее соображеніе съ возможной точностью, слѣдуетъ сказать, что *вычислить* величину, значитъ только выразить ее въ формѣ

$$a + b\beta + c\beta^2 + d\beta^3 + e\beta^4 \ldots\ldots + p\beta^m,$$

гдѣ β равно обыкновенно 10, а коэффиціенты a, b, c, d и т. д. должны быть по условію цѣлыя числа, меньшія β, иногда равныя нулю, но ни въ какомъ случаѣ не отрицательныя. Такимъ образомъ можно считать, что всякій ариѳметическій вопросъ состоитъ въ приведеніи къ указанной выше формѣ выраженія любой абстрактной функціи различныхъ величинъ, въ предположеніи, что послѣднія имѣютъ уже такую форму. Поэтому на всѣ ариѳметическія операціи можно смотрѣть просто какъ на частные случаи нѣкоторыхъ алгебраическихъ преобразованій, если, конечно, не принимать во вниманіе спеціальныхъ трудностей, возникающихъ вслѣдствіе особенностей коэффиціентовъ.

Изъ предыдущаго вытекаетъ, что абстрактная математика состоитъ главнымъ образомъ изъ *исчисленія функцій*, представляющаго очевидно самую важную, самую обширную и самую трудную часть ея; въ дальнѣйшемъ изложеніи это исчисленіе и будетъ единственнымъ предметомъ нашихъ аналитическихъ соображеній. Итакъ, не останавливаясь болѣе на *исчисленіи величинъ*, я прямо перейду къ основному дѣленію *исчисленія функцій*.

Въ началѣ этой лекціи мы опредѣлили, въ чемъ собственно заключается истинная трудность составленія *уравненія* для математическихъ вопросовъ; главнымъ образомъ вслѣдствіе ограниченности числа аналитическихъ элементовъ, находящихся въ нашемъ распоряженіи, такъ трудно установить отношеніе конкретнаго къ абстрактному. Попытаемся теперь объяснить съ философской точки зрѣнія общій пріемъ, посредствомъ котораго человѣческій духъ въ огромномъ числѣ важныхъ случаевъ сумѣлъ побѣдить это основное затрудненіе.

Разсматривая этотъ основной вопросъ въ его совокупности, мы естественнымъ образомъ придемъ къ первому пріему облегченія составленія уравненій явленій. Такъ какъ главное препятствіе въ данномъ случаѣ состоитъ въ ограниченности числа нашихъ аналитическихъ элементовъ, то, казалось, полное рѣшеніе заключалось-бы въ построеніи новыхъ. Но этотъ путь, сколь-бы естественнымъ онъ намъ ни казался, на самомъ дѣлѣ, при болѣе глубокомъ изслѣдованіи его, является иллюзіей; несмотря на несомнѣнную его пользу, легко убѣдиться въ неизбѣжной недостаточности его.

Дѣйствительно, построеніе совершенно новой элементарной абстрактной функціи сопряжено само по себѣ съ весьма большими трудностями; есть даже что-то такое въ этой мысли, что кажется противорѣчивымъ: ни одинъ новый аналитическій элементъ не отвѣчалъ-бы существеннымъ условія своего назначенія, если-бы его нельзя было немедленно *вычислить*; но, съ другой стороны, какъ вычислить новую дѣйствительно *простую* функцію т. е. функцію, не представляющую собою комбинаціи уже извѣстныхъ функцій? Это кажется почти невозможнымъ. Поэтому введеніе въ анализъ новой элементарной функціи, или скорѣй новой пары функцій (такъ какъ каждая функція сопровождается обратной), предполагаетъ одновременное созданіе новой ариѳметической операціи, что, конечно, очень трудно.

Если мы попытаемся составить себѣ понятіе о средствахъ, которыми человѣческій духъ могъ-бы воспользоваться для изобрѣтенія новыхъ аналитическихъ элементовъ, и изслѣдуемъ пріемы, уже примѣненные въ дѣйствительности при созданіи имѣющихся въ нашемъ распоряженіи функцій, то въ этомъ отношеніи наблюденіе оставитъ насъ въ полной неизвѣстности, такъ какъ ухищренія, употребленныя человѣчествомъ для этой цѣли уже, очевидно, исчерпаны. Чтобы убѣдиться въ этомъ, разсмотримъ послѣднюю пару простыхъ функцій, которыя были введены въ анализъ, и при образованіи которыхъ мы, такъ сказать, сами присутствовали, а именно четвертую пару, такъ какъ пятая, какъ я уже сказалъ, не содержитъ въ себѣ, собственно говоря, новыхъ аналитическихъ элементовъ. Функція a^x, а слѣдовательно и ея обратная функція, была построена путемъ представленія съ новой точки зрѣнія уже извѣстной ранѣе функціи—степени, когда понятіе о послѣдней было достаточно обобщено. Нужно было только разсмотрѣть степень по отношенію къ показателю вмѣсто того, чтобы обращать все вниманіе на измѣненіе основанія; отсюда и явилась простая и дѣйствительно новая функція, измѣненіе значеній которой слѣдовало совершенно новому закону. Но этотъ пріемъ, простой и геніальный, больше ничего дать не можетъ, такъ какъ, произведя тоже самое со всѣми существующими теперь аналитическими элементами, мы только приведемъ одни элементы къ другимъ.

Поэтому мы совсѣмъ не представляемъ себѣ, какимъ образомъ можно приступить къ построенію новыхъ абстрактныхъ элементарныхъ функцій, удовлетворяющихъ всѣмъ необходимымъ условіямъ. Это не значитъ, однако, что мы теперь дѣйствительно достигли уже предѣла, положеннаго въ этомъ отношеніи ограниченностью способностей нашего ума; несомнѣнно даже, что послѣдніе успѣхи математическаго анализа значительно расширили наши средства въ этомъ отношеніи, такъ какъ они ввели въ область исчисленія нѣкоторые опредѣленные интегралы, могущіе въ извѣстныхъ отношеніяхъ заступить мѣсто новыхъ простыхъ функцій, хотя они далеко не удовлетворяютъ всѣмъ необходимымъ условіямъ и поэтому не включены мною въ таблицу истинныхъ аналитическихъ элементовъ. Впрочемъ, послѣ зрѣлаго размышленія, я нахожу неоспоримымъ, что число этихъ элементовъ можетъ увеличиваться только крайне медленно. Такимъ образомъ, не въ указанномъ выше пріемѣ человѣческій духъ можетъ найти могущественное средство для возможно большаго облегченія составленія уравненій.

Если устранить этотъ первый пріемъ, то останется очевидно еще только одинъ: въ виду невозможности прямо найти уравненія между разсматриваемыми величинами, слѣдуетъ искать соотвѣтствующія уравненія между другими, вспомогательными величинами, связанными съ первыми извѣстными опредѣленными законами, чтобы затѣмъ, пользуясь ихъ взаимными отношеніями, переходить къ отношенію между основными величинами. Въ этомъ дѣйствительно и состоитъ въ высшей степени плодотворная концепція, созданная умомъ человѣческимъ и представляющая наиболѣе удивительное орудіе для математическаго изслѣдованія явленій природы, а именно *анализъ*, называемый *трансцендентнымъ*.

Съ общей философской точки зрѣнія, вспомогательныя величины, вводимыя вмѣсто основныхъ или одновременно съ послѣдними, могутъ быть связаны, для облегченія составленія уравненій, какимъ угодно образомъ съ непосредственными элементами задачи. Такимъ образомъ, идея трансцендентнаго анализа гораздо шире, чѣмъ обыкновенно ее представляютъ себѣ даже самые глубокіе геометры.

Въ высшей степени важно понять ее во всемъ ея логическомъ объемѣ, такъ какъ, можетъ быть, установивъ общій способъ *составленія производныхъ* функцій, отличный отъ того, которымъ до сихъ поръ ограничивались и который, очевидно, не есть единственно возможный, удастся современемъ внести существенное усовершенствованіе въ совокупность математическаго анализа и, слѣдовательно, создать для изслѣдованія законовъ природы средства болѣе сильныя, чѣмъ современные пріемы, могущіе притомъ, безъ сомнѣнія, истощиться.

Однако, если принять во вниманіе только современное состояніе науки, то единственными вспомогательными величинами, вводимыми обыкновенно въ трансцендентный анализъ вмѣсто основныхъ количествъ, являются или такъ называемые *безконечно малые* элементы,— *дифференціалы* различныхъ порядковъ, если этотъ анализъ разсматривать слѣдуя воззрѣніямъ Лейбница, или, если слѣдовать взгляду Ньютона, *флюксіи—предѣлы* отношеній одновременныхъ приращеній первоначальныхъ величинъ, сравниваемыхъ другъ съ другомъ, или короче, *первыя* и *послѣднія* отношенія этихъ приращеній, или, наконецъ, если слѣдовать за Лагранжемъ, собственно *производныя* этихъ величинъ, т. е. коэффиціенты при различныхъ членахъ соотвѣтственныхъ приращеній ихъ. Эти три главныхъ воззрѣнія на современный трансцендентный анализъ, а равно и всѣ другія, предложеныя въ разное время и менѣе опредѣленно формулированныя, по своей природѣ должны быть необходимо тождественны какъ въ теоріи, такъ и въ приложеніяхъ, что я выясню въ общихъ чертахъ въ шестой лекціи.

Что-же касается ихъ сравнительнаго достоинства, то мы увидимъ тамъ-же, что воззрѣнія Лейбница въ приложеніяхъ до сихъ поръ представляютъ неоспоримое превосходство, хотя ихъ логическое основаніе совершенно неправильно; идея Лагранжа, поразительная по своей простотѣ, по своему логическому совершенству, по тому философскому единству, которое она внесла въ общую систему математическаго анализа, раздѣлявшагося до того времени на два почти независимыхъ міра, представляютъ въ приложеніяхъ серьезныя неудобства, замедляя ходъ разсужденія. Взгляды Ньютона во всѣхъ этихъ отношеніяхъ занимаютъ среднее мѣсто; менѣе удобные для практики, но болѣе раціональные, чѣмъ воззрѣнія Лейбница, они уступаютъ идеямъ Лагранжа въ философскомъ отношеніи, но превосходятъ ихъ въ приложеніяхъ.

Здѣсь не мѣсто обстоятельно объяснять, какимъ образомъ разсмотрѣніе этихъ вспомогательныхъ величинъ, вводимыхъ въ уравненіе вмѣсто первоначальныхъ, дѣйствительно облегчаетъ аналитическое выраженіе законовъ явленій: шестая лекція будетъ спеціально посвящена этому важному предмету, который будетъ изслѣдованъ тамъ съ различныхъ общихъ точекъ зрѣнія, установившихся въ трансцендентномъ анализѣ. Теперь я ограничусь разсмотрѣніемъ этой идеи въ самомъ общемъ видѣ, чтобы вывести изъ нея основное дѣленіе *исчисленія функцій* на два существенно различныхъ исчисленія, послѣдовательное примѣненіе которыхъ при рѣшеніи математическихъ задачъ прочно установлено.

Въ этомъ отношеніи и слѣдуя естественному ходу мысли, на первомъ мѣстѣ надлежитъ по необходимости поставить трансцендентный анализъ, такъ какъ онъ имѣетъ общей цѣлью облегчить составленіе самыхъ уравненій, что, очевидно, должно предшествовать собственно *рѣшенію* этихъ уравненій, представляющему предметъ обыкновеннаго анализа. Но, хотя въ высшей степени важно именно въ такомъ видѣ представлять себѣ истинную связь между этими двумя частями анализа, однако, слѣдуя общепринятому обычаю, удобнѣе изучать трансцендентный анализъ только послѣ обыкновеннаго анализа; ибо, хотя въ сущности трансцендентный анализъ логически не зависитъ отъ обыкновеннаго, или, по крайней мѣрѣ, теперь возможно поставить его въ почти независимое положеніе, но все таки несомнѣнно, что при примѣненіи трансцендентнаго анализа къ рѣшенію различныхъ задачъ возникаетъ болѣе или менѣе настоятельная надобность въ дополненіи рѣшенія съ помощью обыкновеннаго анализа, и потому мы будемъ принуждены оставлять подобные вопросы въ сторонѣ, если предварительно не изучимъ обыкновеннаго анализа.

Итакъ изъ всего предъидущаго мы видимъ, что *исчисленіе функцій* или *алгебра*, въ самомъ широкомъ смыслѣ этого слова, состоитъ изъ двухъ существенно различныхъ частей; изъ нихъ одна занимается непосредственно *рѣшеніемъ* уравненій, когда эти уравненія составлены прямо между разсматриваемыми величинами, а другая, исходя изъ уравненій между величинами, только косвенно связанными съ относящимися къ задачѣ,—т. е. изъ уравненій, которыя вообще гораздо легче составить, имѣетъ своимъ прямымъ и постояннымъ назначеніемъ получать изъ нихъ, при помощи неизмѣнныхъ аналитическихъ пріемовъ, соотвѣтствующія уравненія между непосредственно разсматриваемыми величинами и приводитъ такимъ образомъ задачи въ область предыдущаго исчисленія. Первое исчисленіе чаще всего носитъ названіе *обыкновеннаго анализа*, или собственно *алгебры*; второе составляетъ то, что называется *трансцендентнымъ анализомъ*, и обозначалось различными названіями: *исчисленіе безконечно-малыхъ*, *исчисленіе флюксій и флюентъ*, *исчисленіе изчезающихъ* и т. д., смотря по той точкѣ зрѣнія, съ которой этотъ анализъ разсматривался. Чтобы отстранить всякаго рода посторонніе соображенія, я предлагаю назвать его *исчисленіемъ косвенныхъ функцій*, а обыкновенному анализу дать названіе *исчисленія прямыхъ функцій*. Эти выраженія, которыя я составляю главнымъ образомъ путемъ обобщенія и болѣе точной формулировки идей Лагранжа, должны просто и опредѣленно указывать дѣйствительный общій характеръ каждаго изъ этихъ двухъ родовъ анализа.

Установивъ такимъ образомъ основное дѣленіе математическаго анализа, я долженъ теперь разсмотрѣть въ полномъ объемѣ каждую изъ этихъ частей отдѣльно, начавъ съ *исчисленія прямыхъ функцій*, но имѣя въ виду съ большей подробностью остановиться на различныхъ отдѣлахъ *косвеннаго исчисленія функцій*.

Пятая лекція.

Общія соображенія объ исчисленіи прямыхъ функцій.

На основаніи общаго объясненія, приведеннаго въ концѣ прошлой лекціи, *исчисленія прямыхъ функцій* или собственно *алгебры* вполнѣ достаточно для рѣшенія математическихъ задачъ, если послѣднія настолько просты, что можно сразу составить уравненія между разсматриваемыми величинами, не вводя, вмѣсто нихъ или одновременно съ ними, какой-нибудь системы вспомогательныхъ величинъ, *производныхъ* отъ первыхъ. На самомъ дѣлѣ въ огромномъ большинствѣ случаевъ *исчисленіе косвенныхъ функцій*, предназначенное для облегченія составленія уравненій, должно предшествовать примѣненію прямого исчисленія и подготовлять его. Но, хотя въ такомъ случаѣ роль алгебры является только второстепенной, тѣмъ не менѣе она всегда принимаетъ по необходимости участіе въ полномъ рѣшеніи задачи, такъ что *исчисленіе прямыхъ функцій* по самой своей природѣ продолжаетъ оставаться основаніемъ всего математическаго анализа. По этому мы, прежде чѣмъ идти дальше, должны разсмотрѣть въ общихъ чертахъ истинный составъ этого исчисленія и степень развитія, котораго оно достигло въ настоящее время.

Такъ какъ окончательной цѣлью прямого исчисленія является собственно *рѣшеніе уравненій*, т. е. раскрытіе способовъ составленія неизвѣстныхъ величинъ съ помощью извѣстныхъ на основаніи существующихъ между ними *уравненій*, то прямое исчисленіе естественно имѣетъ столько различныхъ частей, сколько дѣйствительно различныхъ классовъ уравненій мы себѣ можемъ представить; слѣдовательно, его объемъ, строго говоря, безконеченъ, такъ какъ число аналитическихъ функцій, могущихъ войти въ уравненія, само по себѣ безконечно велико, не смотря на то, что всѣ эти функціи состоятъ изъ очень небольшого числа первоначальныхъ элементовъ.

Раціональная классификація уравненій должна, очевидно, опредѣляться природою входящихъ въ составъ уравненій аналитическихъ элементовъ; всякая другая классификація по существу своему не можетъ не быть произвольною. Въ этомъ отношеніи математики прежде всего дѣлятъ всѣ уравненія съ однимъ или многими перемѣнными на два главныхъ класса, смотря потому, заключаютъ-ли они только функціи первыхъ трехъ паръ (см. таблицу 4 лекціи стр. 70), или-же, кромѣ того, въ нихъ входятъ еще показательныя и круговыя функціи. Названіе функцій *алгебраическихъ* и *трансцедентныхъ*, которое обыкновенно даютъ этимъ двумъ главнымъ группамъ аналитическихъ элементовъ, несомнѣнно мало удовлетворительно; тѣмъ не менѣе общеустановленное дѣленіе соотвѣтствующихъ уравненій вполнѣ реально въ томъ смыслѣ, что рѣшеніе уравненій, заключающихъ такъ-называемыя трансцендентныя функціи, представляетъ по необходимости больше трудностей, чѣмъ рѣшеніе такъ-называемыхъ алгебраическихъ уравненій. Благодаря этому, первыя уравненія до сихъ поръ мало изучены, такъ что часто рѣшеніе самыхъ простыхъ уравненій этого рода намъ совершенно неизвѣстно *).

Наши аналитическіе методы относятся почти исключительно къ рѣшеніямъ уравненій второго рода. Разсматривая теперь только алгебраическія уравненія, нужно прежде всего замѣтить, что хотя они часто содержатъ въ себѣ какъ раціональныя, такъ и ирраціональныя функціи неизвѣстныхъ, но всегда возможно, съ помощью болѣе или менѣе легкихъ преобразованій, привести второй случай къ первому; такимъ образомъ математики для рѣшенія всякихъ алгебраическихъ уравненій могли ограничиться изученіемъ уравненій, заключающихъ только раціональныя функціи. При возникновеніи алгебры уравненія распредѣлялись по числу ихъ членовъ, но эта классификація была, очевидно, неправильна, такъ какъ она раздѣляла подобные въ дѣйствительности случаи и соединяла другіе, въ которыхъ общимъ звеномъ являлось не имѣющее реальнаго значенія обстоятельство **).

Такое дѣленіе сохранено только по отношенію къ двучленнымъ уравненіямъ, дѣйствительно допускающимъ одно свойственное только имъ общее рѣшеніе.

Классификація уравненій по признаку, который называется ихъ *степенью*, издавна и повсюду принятая математиками, наоборотъ, въ высшей степени естественна и заслуживаетъ упоминанія здѣсь; сравнивая только по степени соотвѣтствующія другъ другу по относительной сложности уравненія, мы можемъ сказать, что это дѣленіе строго опредѣляетъ большую или меньшую трудность ихъ рѣшенія. Такая послѣдовательность дѣйствительно замѣтна для всѣхъ уравненій, рѣшеніе которыхъ намъ извѣстно; но ее можно объяснить въ общемъ видѣ, независимо отъ результата самаго рѣшенія. Для этого достаточно обратить вниманіе, что уравненіе каждой степени въ самомъ общемъ его видѣ по необходимости заключаетъ въ себѣ всѣ уравненія различныхъ низшихъ степеней; тоже самое должно имѣть мѣсто и относительно формулы, опредѣляющей неизвѣстную. Слѣдовательно, какъ бы незначительна ни была, по предположенію à priori, соотвѣтствующая данной *степени* трудность рѣшенія, она должна увеличиваться по мѣрѣ возрастанія степени уравненій, ибо трудность данной степени неизбѣжно осложняется трудностью всѣхъ предыдущихъ *степеней*.

---

*) Какъ-бы просто ни казалось, напримѣръ, уравненіе

$$a^x + b^x = c^x,$$

рѣшеніе его до сихъ поръ еще неизвѣстно: этотъ примѣръ можетъ дать нѣкоторое понятіе о чрезвычайномъ несовершенствѣ указанной части алгебры.

**) Та-же ошибка была на нѣкоторое время допущена позже въ исчисленіе безконечно малыхъ относительно интегрированія дифференціальныхъ уравненій.

Возрастаніе трудности настолько велико, что до сихъ поръ рѣшеніе алгебраическихъ уравненій извѣстно намъ только для первыхъ четырехъ степеней. Въ этомъ отношеніи алгебра не сдѣлала замѣтнаго успѣха со времени работъ Декарта и итальянскихъ математиковъ XVI столѣтія, хотя въ послѣдніе два вѣка не было можетъ быть ни одного геометра, который не пытался-бы подвинуть впередъ рѣшеніе уравненій.—Даже уравненіе пятой степени въ общемъ видѣ до сихъ поръ не поддается всѣмъ усиліямъ.

Все возрастающая сложность, которую по необходимости должны представлять формулы для рѣшенія уравненій по мѣрѣ увеличенія степени ихъ, и крайнія затрудненія, возникающія при пользованіи формулой рѣшенія уравненія четвертой степени и дѣлающія ее почти неприменимой, заставили математиковъ по молчаливому соглашенію отказаться отъ продолженія подобныхъ изслѣдованій, хотя они далеко еще не считаютъ невозможнымъ получить современемъ рѣшеніе уравненій пятой и нѣкоторыхъ высшихъ степеней *). Въ этомъ отношеніи единственнымъ вопросомъ, представляющимъ дѣйствительно важное значеніе, по крайней мѣрѣ съ логической точки зрѣнія, являлось-бы общее рѣшеніе алгебраическихъ уравненій любой степени; но, чѣмъ болѣе мы будемъ размышлять объ этомъ предметѣ, тѣмъ болѣе мы согласимся съ Лагранжемъ, что эта задача превосходитъ силы нашего ума. Надо, кромѣ того, еще замѣтить, что формула, которая выражала-бы корень уравненія степени m, по необходимости должна-бы заключать въ себѣ радикалы порядка m (или функціи той-же многозначности) въ виду того, что она должна давать m значеній. Кромѣ того, какъ мы видѣли, эта формула должна еще заключать, какъ частные случаи, корни всѣхъ уравненій низшихъ степеней; по этому оказывается, что формула будетъ заключать въ себѣ еще радикалъ порядка $m-1$, порядка $m-2$ и т. д.; такимъ образомъ, если-бы даже удалось найти подобную формулу, она была-бы слишкомъ сложной и потому неудобопримѣнимой на практикѣ, если только не удалось бы упростить ее, сохранивъ при этомъ всю ея общность, введеніемъ новыхъ аналитическихъ элементовъ, о которыхъ мы пока не имѣемъ даже никакого понятія. Позволительно поэтому думать, что если мы въ этомъ отношеніи еще не достигли предѣловъ, положенныхъ намъ слабыми силами нашего разума, то мы очень скоро дойдемъ до нихъ, если будемъ дѣятельно и непрерывно продолжать такого рода изслѣдованія.

Кромѣ того важно замѣтить, что если-бы даже мы получили рѣшеніе *алгебраическихъ* уравненій любой степени, то мы закончили-бы изученіе только очень небольшой части собственно *алгебры*, т. е. исчисленія прямыхъ функцій, заключающаго рѣшеніе всѣхъ уравненій, которыя можно образовать съ помощью извѣстныхъ нынѣ аналитическихъ функцій. Наконецъ, чтобы окончательно выяснить философскую точку зрѣнія на этомъ предметъ, слѣдуетъ признать, что въ силу непреложнаго закона человѣческой природы мы обладаемъ гораздо большими средствами для постановки новыхъ вопросовъ, чѣмъ для рѣшенія ихъ, или, другими словами, человѣческій духъ болѣе способенъ воображать, чѣмъ

*) Мемуаръ Абеля „Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré", въ которомъ доказывается невозможность общаго алгебраическаго рѣшенія уравненій степени пятой и выше, былъ напечатанъ въ 1824 г., но какъ видно, не былъ извѣстенъ еще Конту. (*Прим. ред.*).

разсуждать; поэтому мы по необходимости всегда будемъ оставаться передъ неразрѣшимыми для насъ затрудненіями, до какой-бы степени развитія ни дошла наша умственная дѣятельность. Такимъ образомъ, даже если-бы когда нибудь мы нашли полное рѣшеніе всѣхъ нынѣ извѣстныхъ аналитическихъ уравненій, что послѣ нѣкотораго обсужденія должно быть признано совершенно неосуществимымъ, то несомнѣнно прежде чѣмъ будетъ достигнутъ этотъ результатъ и вѣроятно даже въ видѣ вспомогательнаго средства, мы побѣдимъ гораздо меньшую, но все таки весьма серьезную трудность, и построимъ новые аналитическіе элементы, введеніе которыхъ создастъ новые классы уравненій, о которыхъ мы теперь не имѣемъ ни малѣйшаго понятія. Вслѣдствіе этого настоящее относительное несовершенство алгебры останется въ прежнемъ видѣ, не смотря на несомнѣнное и весьма важное увеличеніе абсолютнаго объема нашихъ познаній.

При современномъ состояніи алгебры полное рѣшеніе уравненій двучленныхъ, нѣкоторыхъ особыхъ уравненій высшихъ степеней и небольшаго числа показательныхъ, логариѳмическихъ и круговыхъ уравненій представляетъ всѣ тѣ основные методы, которые исчисленіе прямыхъ функцій даетъ для рѣшенія математическихъ задачъ. Но и съ такими ограниченными средствами геометрамъ тѣмъ не менѣе удалось изслѣдовать, дѣйствительно поразительнымъ образомъ, весьма большее число важныхъ вопросовъ, какъ мы это увидимъ далѣе въ этомъ же томѣ. Общія усовершенствованія, введенныя въ теченіе этого вѣка въ систему всего математическаго анализа, отличались именно необычайно широкимъ развитіемъ приложеній небольшаго количества пріобрѣтенныхъ по исчисленіи прямыхъ функцій познаній, а не направлялись къ увеличенію ихъ. Въ этомъ отношеніи математики достигли такого успѣха, что чаще всего при полномъ рѣшеніи различныхъ задачъ изъ исчисленія прямыхъ функцій дѣйствительно примѣняются только самыя простыя части его, т. е. относящіяся къ уравненіямъ двухъ первыхъ степеней съ однимъ или нѣсколькими перемѣнными.

Крайнее несовершенство алгебры относительно рѣшенія уравненій заставило математиковъ заняться новымъ классомъ вопросовъ, истинный характеръ которыхъ очень важно указать здѣсь. Признавъ необходимымъ отказаться отъ дальнѣйшаго изслѣдованія способовъ рѣшенія алгебраическихъ уравненій степеней высшихъ, чѣмъ четвертая, математики занялись пополненіемъ этого огромнаго пробѣла, насколько то было возможно, и остановились на такъ называемомъ *численномъ рѣшеніи уравненій*. Не имѣя въ большинствѣ случаевъ возможности получить *формулу*, которая выражала бы, какой неявной функціей данныхъ чиселъ является неизвѣстная, математики, за отсутствіемъ этого единственнаго, чисто *алгебраическаго* рѣшенія, пытались по крайней мѣрѣ опредѣлить, независимо отъ формулы, *численное значеніе* каждаго неизвѣстнаго для той или другой системы частныхъ значеній данныхъ величинъ. Благодаря ряду работъ, эта неполная и, такъ сказать, незаконная операція, въ которой тѣсно соединены чисто алгебраическіе и чисто ариѳметическіе вопросы, можетъ быть выполнена дѣйствительно во всѣхъ случаяхъ для уравненій любой степени и даже любого вида. Въ указанномъ направленіи остается только упростить пріемы и сдѣлать ихъ дѣйствительно удобными для примѣненія, что, какъ можно надѣяться, и будетъ достигнуто впослѣдствіи. Принимая во вниманіе такое положеніе исчисленія прямыхъ функцій, при его примѣненіи стараются, на-

сколько это возможно, формулировать предложенные вопросы такимъ
образомъ, чтобы въ концѣ концовъ потребовалось только *численное*
рѣшеніе уравненій.

Какъ бы однако ни былъ драгоцѣненъ, за неимѣніемъ истиннаго
рѣшенія вопроса, такой результатъ, важно не забывать дѣйствительное
значеніе этихъ пріемовъ, которые математики признаютъ весьма несо-
вершенными съ алгебраической точки зрѣнія. Дѣйствительно, не достаетъ
очень многихъ условій, чтобы мы всегда имѣли возможность приводить
наши математическія задачи въ окончательномъ видѣ къ численному рѣше-
нію уравненій. Такое приведеніе возможно только для стоящихъ совершенно
отдѣльно вопросовъ или для имѣющихъ окончательное значеніе, т. е.
для самаго небольшого числа ихъ. Большинство же задачъ въ дѣйстви-
тельности имѣютъ только подготовительный характеръ и служатъ всту-
пленіемъ для рѣшенія другихъ.

Въ этомъ-же случаѣ очевидно важно найти не *численное значеніе*
неизвѣстнаго, а *формулу*, которая показывала-бы, какъ неизвѣстная
величина получается съ помощью другихъ разсматриваемыхъ величинъ.
Подобное обстоятельство, напримѣръ, всегда имѣетъ мѣсто въ очень
распространенномъ случаѣ, когда данная задача заключаетъ въ себѣ
одновременно нѣсколько неизвѣстныхъ величинъ. Какъ извѣстно, въ
такихъ вопросахъ прежде всего нужно отдѣлить перемѣнныя. Употребляя
для этого надлежащимъ образомъ весьма простой и общій пріемъ, удачно
найденный математиками и состоящій въ выраженіи одного неизвѣстнаго
при помощи другихъ, мы всегда уничтожали-бы трудность задачи, если-
бы постоянно могли рѣшать разсматриваемыя уравненія алгебраически,
тогда какъ численное рѣшеніе въ такомъ случаѣ совершенно безполезно.
Только благодаря нашему неумѣнію рѣшать уравненія съ однимъ не-
извѣстнымъ *алгебраически* мы должны разсматривать *исключеніе* не-
извѣстнаго изъ уравненія, какъ отдѣльную задачу, представляющую
одну изъ самыхъ крупныхъ и особыхъ трудностей обыкновенной алгебры.
Какъ ни сложны методы, при помощи которыхъ мы побѣждаемъ эту
трудность, они не могутъ быть примѣняемы совершенно однообразно
даже къ исключенію одного неизвѣстнаго изъ двухъ уравненій любой
формы.

Въ самыхъ простыхъ вопросахъ, когда мы должны рѣшить
только одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, численное рѣшеніе все
таки оказывается весьма несовершеннымъ пріемомъ, даже когда оно
строго говоря достаточно. Въ самомъ дѣлѣ, оно имѣетъ то серьезное
неудобство, что заставляетъ насъ передѣлывать снова всѣ операціи при
самомъ незначительномъ измѣненіи, которое можетъ послѣдовать въ
одной изъ данныхъ величинъ, хотя-бы отношенія ихъ и оставались
безъ измѣненія; при этомъ всѣ вычисленія, сдѣланныя въ одномъ
случаѣ, ни сколько не облегчаютъ намъ производства новыхъ вычисленій
въ другомъ, очень мало отличающемся отъ перваго, такъ какъ намъ
не удалось отвлечь и изслѣдовать отдѣльно чисто алгебраическую часть
вопроса, общую для всѣхъ случаевъ, возникающихъ вслѣдствіе простаго
измѣненія данныхъ чиселъ.

На основаніи предыдущихъ соображеній исчисленіе прямыхъ функ-
цій, разсматриваемое въ его современномъ состояніи, естественно раз-
дѣляется на двѣ совершенно различныя одна отъ другой части, смотря
по тому, останавливаемся ли мы на *алгебраическомъ* или-же *численномъ*
рѣшеніи уравненія. Первая часть, единственная дѣйствительно удовле-

творяющая насъ, къ сожалѣнію, весьма мало развита и вѣроятно навсегда останется въ крайнѣ узкихъ предѣлахъ; вторая, чаще всего недостаточная, имѣетъ однако предъ первой преимущество значительно большей общности. Необходимость строго различать эти двѣ части очевидна, такъ какъ цѣль, поставляемая себѣ каждой изъ нихъ, существенно различна, и вслѣдствіе этого отличается и точка зрѣнія, съ которой въ каждой части изслѣдуются величины. Кромѣ этого, если разсматривать эти части алгебры по отношенію къ методамъ, которымъ онѣ руководствуются, то мы придемъ къ совершенно различнымъ системамъ подраздѣленія. Дѣйствительно, первая часть должна дѣлиться согласно природѣ уравненій, рѣшеніе которыхъ извѣстно, и совершенно независимо отъ какихъ-бы то ни было соображеній о величинѣ неизвѣстныхъ. Во второй части, наоборотъ, пріемы рѣшенія естественно различаются не по *степенямъ* уравненій, такъ какъ они примѣнимы къ уравненіямъ любой степени, но по *численному значенію* самыхъ неизвѣстныхъ: чтобы вычислить эти величины прямо, не пользуясь формулами, которыя выражали-бы ихъ, очевидно нельзя прибѣгать къ однимъ и тѣмъже способамъ, независимо отъ того, могутъ-ли быть величины найдены только съ помощью ряда приближеній, всегда неполныхъ, или-же они могутъ быть получены совершенно точно. Различіе между соизмѣримыми и несоизмѣримыми корнями, имѣющее такое значеніе при численномъ рѣшеніи уравненій и требующее при опредѣленіи корней примѣненія совершенно особыхъ пріемовъ, утрачиваетъ свою важность при алгебраическомъ рѣшеніи уравненій, гдѣ *раціональность* или *ирраціональность* получаемыхъ чиселъ представляетъ простую случайность, не могущую оказать никакого вліянія на примѣняемые пріемы; однимъ словомъ это различіе имѣетъ чисто ариѳметическое значеніе. Тоже самое, хотя и въ меньшей степени, можно сказать о дѣленіи соизмѣримыхъ корней на цѣлыя и дробныя. Наконецъ тоже замѣчаніе относится, и еще съ большимъ основаніемъ, къ самому общему дѣленію корней на *вещественные* и *мнимые*. Всѣ послѣднія соображенія, имѣющія основное значеніе при численномъ рѣшеніи уравненій и не имѣющія никакого при рѣшеніи алгебраическомъ, яснѣе и яснѣе заставляетъ чувствовать существенное различіе этихъ двухъ главныхъ частей собственно алгебры.

Указанные два отдѣла алгебры, составляющіе непосредственный предметъ исчисленія прямыхъ функцій, подчинены третьему, чисто умозрительному, у котораго оба первые заимствуютъ свои наиболѣе могущественные пріемы и который весьма точно обозначенъ общимъ названіемъ *теоріи уравненій*, хотя эта теорія и касается только такъ называемыхъ *алгебраическихъ* уравненій. Численное рѣшеніе уравненій, какъ наиболѣе общее, особенно нуждается въ этой раціональной основѣ.

Эта послѣдняя и весьма важная часть алгебры естественно приводится къ двумъ классамъ вопросовъ: во-первыхъ, къ вопросамъ, относящимся къ составу уравненій, и во вторыхъ, къ вопросамъ объ ихъ преобразованіи; эти преобразованія имѣютъ цѣлью измѣненіе корней уравненія, остающихся неизвѣстными, слѣдуя какому нибудь данному закону, при условіи, что этотъ законъ однообразенъ по отношенію ко всѣмъ корнямъ *).

---

*) По поводу теоріи уравненій я долженъ указать здѣсь на неполненный извѣстнаго значенія пробѣлъ. Основной принципъ, на которомъ построена эта теорія и который такъ часто примѣняется во всемъ математическомъ ана-

Чтобы дополнить предыдущее краткое общее перечисленіе всѣхъ существенныхъ частей исчисленія прямыхъ функцій, я долженъ наконецъ особенно указать на одну изъ самыхъ плодотворныхъ и важныхъ теоріи собственно алгебры, именно на теорію преобразованія функцій въ ряды при помощи такъ называемаго метода неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Этотъ чисто аналитическій методъ долженъ быть признанъ однимъ изъ самыхъ замѣчательныхъ открытій Декарта; онъ конечно утратилъ часть

изъ, а именно разложеніе раціональныхъ и цѣлыхъ алгебраическихъ функцій любой степени на множителей первой степени, прилагается только къ функціямъ съ одной перемѣнной, и никто еще не изслѣдовалъ, можно-ли распространить его на функціи съ многими перемѣнными, что однако во всякомъ случаѣ не слѣдовало-бы оставлять неизвѣстнымъ. Что касается функцій съ двумя и тремя перемѣнными, то геометрическія соображенія ясно, хотя и косвенно, указываютъ, что разложеніе на множители обыкновенно невозможно, такъ какъ изъ такого разложенія слѣдовало-бы, что соотвѣтствующій классъ уравненій не можетъ представлять линію или поверхность sui generis, и его геометрическое мѣсто всегда входило-бы въ систему геометрическихъ мѣстъ, соотвѣтствующихъ уравненіямъ низшихъ степеней, такъ что въ концѣ концовъ каждое уравненіе представляло-бы только прямыя линіи или плоскости. Но именно вслѣдствіе подобнаго конкретнаго толкованія данная теорема, хотя и чисто отрицательная, имѣетъ, какъ мнѣ кажется, такое важное значеніе для аналитической геометріи, что я удивляюсь, какъ никто не попытался установить прямо это характеристическое различіе между функціями отъ одной или многихъ перемѣнныхъ. Я укажу здѣсь кратко на найденное мною абстрактное и общее доказательство теоремы, хотя его удобнѣе было бы помѣстить въ спеціальномъ сочиненіи:

1) Если бы $f(x, y)$ можетъ разлагаться на множители первой степени, то послѣдніе можно было бы получить, рѣшивъ уравненіе $f(x, y)=0$; изъ указанныхъ въ текстѣ соображеній видно, что это уравненіе, рѣшенное относительно x, дало бы формулы, въ которыхъ непремѣнно содержался бы y подъ знакомъ радикала. Находящіяся подъ знакомъ радикала функціи y, очевидно, не всегда были бы полными степенями, а между тѣмъ онѣ должны были бы быть такими, чтобы соотвѣтствующіе элементарные множители $f(x, y)$, первой степени относительно x, были тоже первой степени, или хотя бы просто раціональными относительно y.

Это обстоятельство можетъ имѣть мѣсто только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, когда коэффиціенты удовлетворяютъ болѣе или менѣе многочисленнымъ, но всегда опредѣленнымъ условіямъ исключенія радикаловъ. Тоже разсужденіе еще съ большей силой прилагается къ функціямъ съ тремя, четырьмя и болѣе перемѣнными.

2) Второе доказательство, весьма отличное по природѣ своей отъ перваго, вытекаетъ изъ измѣренія степени общности функцій со многими перемѣнными числами произвольныхъ постоянныхъ величинъ, входящихъ въ самое общее и простое выраженіе функцій. Я ограничусь указаніемъ только на функціи съ двумя перемѣнными, такъ какъ впослѣдствіи это доказательство легко будетъ распространить и на функціи съ большимъ числомъ перемѣнныхъ.

Извѣстно, что число произвольныхъ постоянныхъ, содержащихся въ общей формулѣ функціи степени m отъ двухъ перемѣнныхъ, равно $\frac{m(m+3)}{2}$; но если бы такая функція могла разлагаться хотя бы на два множителя, одинъ степени n, а другой степени $m-n$, то произведеніе ихъ заключало-бы число произвольныхъ постоянныхъ равное $\frac{n(n+3)}{2}+\frac{(m-n)\ (m-n+3)}{2}$, а такъ какъ это число, какъ легко убѣдиться, менѣе предыдущаго на $n(m-n)$, то, слѣдовательно, подобное произведеніе, менѣе общее, чѣмъ первоначальная функція, не можетъ представлять ее постоянно. Видно даже, что такое сравненіе потребовало бы существованія $n(m-n)$ особыхъ отношеній между коэффиціентами этой функціи, которое легко можно было бы найти, раскрывая тождество. Этотъ новый родъ доказательствъ, основанный на соображеніи, которымъ обыкновенно пренебрегаютъ, вѣроятно найдетъ себѣ съ пользой примѣненіе и въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ.

своего значенія со времени изобрѣтенія и развитія исчисленія безконечно малыхъ, которое съ такимъ успѣхомъ замѣняетъ его во многихъ частныхъ случаяхъ. Все возрастающее распространеніе трансцендентнаго анализа хотя и сдѣлало этотъ методъ, съ одной стороны, менѣе необходимымъ, съ другой стороны, однако, еще болѣе увеличило число приложеній и расширило его поле дѣйствія, такъ что благодаря полезному соединенію этихъ двухъ теорій примѣненіе неопредѣленныхъ коэффиціентовъ сдѣлалось теперь болѣе широкимъ, чѣмъ даже до открытія исчисленія косвенныхъ функцій.

Набросавъ общую картину алгебры въ собственномъ смыслѣ это слова, я долженъ изложить нѣкоторыя соображенія о главныхъ пунктахъ исчисленія прямыхъ функцій, понятія котораго могутъ быть съ пользой освѣщены философскимъ изслѣдованіемъ.

Трудности, относящіяся къ нѣкоторымъ отдѣльнымъ символамъ, созданнымъ алгебраическимъ исчисленіемъ, а именно къ такъ называемымъ *мнимымъ* выраженіямъ, были, какъ мнѣ кажется, значительно преувеличены чисто метафизическими соображеніями, которыя пытались примѣнить здѣсь вмѣсто изученія этихъ нѣсколько странныхъ результатовъ съ надлежащей точки зрѣнія, т. е. какъ простыхъ аналитическихъ фактовъ. Понимая ихъ такимъ образомъ, легко увидимъ, что такъ какъ вообще духъ математическаго анализа состоитъ въ разсмотрѣніи величинъ только съ точки зрѣнія ихъ взаимныхъ отношеній, независимо отъ всякаго представленія объ опредѣленномъ численномъ значеніи ихъ, то математики по необходимости должны допускать всякаго рода выраженія, которыя являются результатомъ алгебраическихъ комбинацій. Если-бы математики захотѣли отказаться хотя-бы отъ одного такого выраженія въ виду его кажущейся странности, которая всегда можетъ проявиться при извѣстныхъ частныхъ предположеніяхъ о значеніи разматриваемыхъ величинъ, то они были-бы принуждены измѣнить общность всѣхъ своихъ понятій и вводить въ каждое разсужденіе цѣлый рядъ совершенно чуждыхъ ему ограниченій; такимъ образомъ они лишили-бы математическій анализъ его главнаго и весьма характернаго преимущества-простоты и однообразія идей, которыя въ немъ комбинируются. Затрудненія, обыкновенно испытываемыя нашимъ умомъ по поводу этихъ странныхъ выраженій, происходятъ, мнѣ кажется, главнымъ образомъ отъ ошибочнаго и безсознательнаго смѣшенія понятій о *функціи* и съ понятіемъ *о численномъ значеніи*, или, что приводится къ тому же, отъ смѣшенія *алгебраической* точки зрѣнія съ *ариѳметической*.

Если-бы природа этого курса позволяла мнѣ развить этотъ вопросъ съ достаточной полнотой, то было-бы не трудно, какъ я думаю, пользуясь надлежащимъ образомъ указанными въ этой и двухъ предыдущихъ лекціяхъ соображеніями, разсѣять тотъ туманъ, которымъ ложный взглядъ на дѣло обыкновенно окружаетъ всѣ эти понятія. Подобное изслѣдованіе доказало-бы, что математическій анализъ по природѣ своей во многихъ отношеніяхъ, мною только-что упомянутыхъ, гораздо яснѣе, чѣмъ это обыкновенно думаютъ даже сами геометры, введенные въ заблужденіе неправильными замѣчаніями метафизиковъ.

Что-же касается отрицательныхъ величинъ, вызвавшихъ, благодаря тому-же метафизическому направленію, столько неумѣстныхъ разсужденій, лишенныхъ всякаго раціональнаго основанія и какой-бы то ни было научной пользы, то слѣдуетъ отличать, постоянно имѣя въ виду простой аналитическій фактъ, абстрактное значеніе этихъ величинъ отъ ихъ конкретнаго объясненія, которыя до сихъ поръ обыкновенно смѣшивали. Въ первомъ отношеніи теорія отрицательныхъ величинъ можетъ быть съ надлежащей полнотой установлена съ одной алгебраической точки зрѣнія. Необходимость допустить такого рода результаты наравнѣ со всѣми другими вытекаетъ изъ общаго соображенія, только-что мною указаннаго; употребленіе отрицательныхъ величинъ, какъ аналитическаго способа обобщенія формулъ, не можетъ создать въ дѣйствительности никакой серьезной трудности.

Итакъ можно считать, что абстрактная теорія отрицательныхъ величинъ не оставляетъ желать ничего существеннаго; въ дѣйствительности она представляетъ только тѣ затрудненія, которыя въ нее введены весьма не кстати съ помощью разныхъ софистическихъ соображеній; но далеко не въ такомъ положеніи находится конкретная теорія этихъ величинъ.

Съ этой точки зрѣнія значеніе отрицательныхъ величинъ главнымъ образомъ состоитъ въ удивительной способности знаковъ + и — аналитически представлять противоположеніе значеній, которыя могутъ получать нѣкоторыя величины. Эта общая теорема объ отношеніи конкретнаго къ абстрактному въ математикѣ есть одно изъ самыхъ блестящихъ открытій, которымъ мы обязаны генію Декарта, и сдѣлано имъ съ помощью простого правильно направленнаго философскаго наблюденія.

Съ тѣхъ поръ многіе геометры пытались установить прямо общія доказательства указанной теоремы, но до настоящаго времени всѣ ихъ усилія были безплодны, отчасти потому, что они пробовали уничтожить затрудненіе пустыми метафизическими соображеніями или слишкомъ рискованными сравненіями, отчасти потому, что они принимали простыя провѣрки въ частныхъ, болѣе или менѣе ограниченныхъ случаяхъ, за настоящія доказательства. Всѣ эти неудачныя попытки и смѣшеніе абстрактной и конкретной точекъ зрѣнія вызвали въ этомъ отношеніи такую путаницу, что здѣсь необходимо опредѣленно установить общій фактъ, независимо отъ того, захочетъ-ли кто удовольствоваться примѣненіемъ этого факта, или-же попытаться объяснить его. Самый фактъ, помимо какого-либо объясненія его, состоитъ въ слѣдующемъ: если въ какомъ-нибудь уравненіи, выражающемъ отношенія величинъ, могущихъ получать противоположныя значенія, одна или нѣсколько изъ нихъ будутъ подлежать отсчету въ сторону, противоположную той, въ которой они были приняты при первоначальномъ составленіи уравненія, то нѣтъ надобности для этого второго положенія явленія составлять непосредственно новое уравненіе, а достаточно въ первомъ уравненіи перемѣнить знаки у каждой изъ величинъ, измѣнившихъ значеніе; преобразованное такимъ образомъ уравненіе всегда будетъ строго совпадать съ тѣмъ уравненіемъ, которое мы нашли-бы, если-бы начали искать математическіе законы явленія для новаго случая. Въ этомъ-то постоянномъ и необходимомъ совпаденіи уравненій и состоитъ общая теорема. До сихъ поръ еще не удавалось дѣйствительно дать себѣ отчетъ въ этомъ положеніи; мы убѣдились въ справедливости его только путемъ большаго числа геометрическихъ и механическихъ повѣрокъ, достаточно многочисленныхъ и достаточно разнообразныхъ, чтобы для человѣка здравомыслящаго могло оставаться хотя какое-нибудь сомнѣніе въ точности и общности указаннаго существеннаго свойства; съ философской точки зрѣнія, однако, эти повѣрки все-таки не освобождаютъ насъ отъ обязанности искать объясненіе положенія такой высокой важности. Чрезвычайная общность теоремы указываетъ и на огромную трудность этого изслѣдованія, и на большую пользу, которую безъ сомнѣнія принесло-бы общее пониманіе этой великой истины для усовершенствованія математическихъ наукъ, такъ какъ, очевидно, духъ человѣческій могъ-бы достичь этого результата только поднявшись на такую точку зрѣнія, съ которой по необходимости открылся-бы ему цѣлый рядъ новыхъ идей, благодаря прямому и болѣе глубокому разсмотрѣнію отношенія конкретнаго къ абстрактному. Какъ-бы то ни было, несовершенство науки въ этомъ отношеніи нисколько не помѣшало геометрамъ воспользоваться указаннымъ свойствомъ въ самыхъ широкихъ размѣрахъ и въ самыхъ важныхъ случаяхъ во всѣхъ частяхъ конкретной математики, гдѣ потребность въ немъ чувствуется почти постоянно. Изъ одного простого разсмотрѣнія этого общаго факта, какъ я его описалъ выше, можно даже извлечь нѣкоторую логическую пользу. Такъ, напримѣръ, изъ него безъ всякаго доказательства слѣдуетъ, что указанное положеніе никогда не можетъ быть примѣняемо къ величинамъ, постоянно измѣняющимъ свое направленіе, но не дающимъ однако мѣста простому противоположенію значеній; въ этомъ случаѣ знакъ, который стоитъ передъ каждымъ результатомъ исчисленія, не можетъ имѣть никакого конкретнаго объясненія, и напрасно иногда пытаются установить его; указанное обстоятельство, между прочимъ, имѣетъ мѣсто въ геометріи для радіусовъ-векторовъ и въ механикѣ для силъ различныхъ направленій.

Вторая общая теорема объ отношеніи конкретнаго къ абстрактному въ математикѣ, о которой я считаю необходимымъ особо упомянуть здѣсь, обыкновенно называется *принципомъ однородности*: она несомнѣнно по своимъ приложеніямъ имѣетъ гораздо меньше значенія, чѣмъ предыдущая. Указанная теорема заслуживаетъ однако нашего вниманія особенно потому, что по самой своей природѣ можетъ получить болѣе широкое распространеніе, такъ какъ она одинаково примѣнима ко всѣмъ родамъ явленій, и еще потому, что часто приноситъ дѣйствительную пользу при провѣркѣ аналитическихъ законовъ явленій. Кромѣ того, я могу представить прямое и общее доказательство упомянутаго принципа, которое мнѣ кажется очень простымъ. Теорема основана на одномъ очевидномъ само собою наблюденіи: точность всякаго отношенія между какими угодно конкретными величинами не зависитъ отъ выбора единицъ, съ которыми сравниваютъ эти величины, чтобы выразить ихъ числами. Напримѣръ, отношеніе, существующее между тремя сторонами прямоугольника треугольника, не зависитъ отъ того, измѣряютъ ли стороны метрами, милями или дюймами.

Изъ этого общаго соображенія слѣдуетъ, что всякое уравненіе, выражающее математическій законъ какого нибудь явленія, должно обладать свойствомъ неизмѣняемости во всѣхъ случаяхъ, когда всѣ заключающіяся въ уравненіи величины одновременно подвергаются измѣненіямъ, соотвѣтствующимъ измѣненіямъ ихъ единицъ. Подобныя измѣненія, очевидно, состоятъ въ томъ, что всѣ величины каждаго вида сразу становятся въ m разъ меньше, если соотвѣтствующая имъ единица становится въ m разъ больше, или наоборотъ. Такимъ образомъ всякое уравненіе, выражающее какую нибудь конкретную зависимость, должно обладать тѣмъ свойствомъ, что оно остается безъ измѣненія при увеличеніи въ m разъ всѣхъ заключающихся въ немъ количествъ, выражающихъ величины, отношенія между которыми разсматриваются, исключая, конечно, числа, обозначающія просто взаимныя *отношенія* этихъ величинъ и остающіяся безъ перемѣны при измѣненіи единицъ. Въ этомъ свойствѣ и заключается законъ однородности въ самомъ его широкомъ значеніи, т. е. не смотря на то, изъ какихъ аналитическихъ функцій состоятъ уравненія.

Чаще всего однако разсматривается только тотъ случай, когда функціи принадлежатъ къ числу такъ называемыхъ *алгебраическихъ*, къ коимъ примѣнимо понятіе о *степени*. Въ такомъ случаѣ общее положеніе можно установить еще точнѣе, опредѣливъ аналитическій характеръ, которымъ необходимо должно обладать уравненіе, чтобы указанное свойство распространялось на него. Легко видѣть, дѣйствительно, что при указанномъ выше измѣненіи всѣ *члены* первой степени, каковъ-бы ни былъ ихъ видъ, раціональный или ирраціональный, цѣлый или дробный, сдѣлаются въ m разъ больше, всѣ члены второй степени въ m^2 разъ, всѣ члены третьей степени въ m^3 разъ больше и т. д.

Такимъ образомъ члены одной и той-же степени, какъ бы различенъ ни былъ ихъ составъ, будутъ измѣняться одинаково, а члены различныхъ степеней, какъ-бы ни было велико подобіе ихъ состава, будутъ измѣняться въ различныхъ отношеніяхъ: вслѣдствіе этого для ненарушимости уравненія необходимо, чтобы оно состояло изъ членовъ одной и той-же степени. Въ этомъ и состоитъ, собственно говоря, обыкновенная теорема объ *однородности*, и на этомъ основаніи общій законъ получилъ свое названіе, которое однако перестаетъ быть вполнѣ подходящимъ для всѣхъ другихъ классовъ функцій.

Чтобы разобрать этотъ вопросъ во всемъ его объемѣ, слѣдуетъ замѣтить одно существенное условіе, которое нужно имѣть въ виду при примѣненіи этого свойства въ томъ случаѣ, когда явленіе, выраженное уравненіемъ, заключаетъ величины различной природы. Дѣйствительно, можетъ случиться, что соотвѣтственныя единицы будутъ совершенно независимы другъ отъ друга, и въ такомъ случаѣ теорема объ однородности будетъ имѣть мѣсто по отношенію ко всѣмъ соотвѣтствующимъ классамъ величинъ, или по отношенію только къ одному или нѣсколькимъ классамъ, подлежащимъ разсмотрѣнію. Возможно, однако, что въ другихъ случаяхъ различныя единицы будутъ находиться въ взаимной зависимости, опредѣляемой природой самого вопроса; тогда необходимо принять во вниманіе это подчиненіе единицъ при повѣркѣ однородности, не существующей въ чисто алгебраическомъ смыслѣ и видъ которой будетъ измѣняться сообразно роду явленій. Такъ, напримѣръ, чтобы выразить мысль опредѣленнѣе, допустимъ, что въ аналитическомъ выраженіи геометрическихъ явленій мы разсматриваемъ одновременно линіи, поверхности и объемы; въ такомъ случаѣ надо замѣтить, что три соотвѣтствующія единицы по необходимости связаны другъ съ другомъ такимъ образомъ, что когда, согласно общему закону ихъ соподчиненія, первая единица увеличивается въ m разъ, то вторая увеличивается въ m^2 разъ, а третья въ m^3 разъ. Однородность можетъ имѣть мѣсто въ подобныхъ уравненіяхъ только съ указанными видоизмѣненіемъ, и въ этомъ случаѣ, если уравненіе алгебраическое, то нужно будетъ опредѣлять степень каждаго члена, удвоивая показателей величинъ, соотвѣтствующихъ площадямъ и утроивая—соотвѣтствующихъ объемамъ *).

Таковы главныя общія соображенія, относящіяся къ исчисленію прямыхъ функцій, конечно весьма недостаточныя, но которыми, однако, я принужденъ ограничиться, чтобы не выйти изъ естественныхъ предѣловъ этого курса. Теперь мы должны перейти къ философскому изслѣдованію исчисленія косвенныхъ функцій, особая важность и распространеніе котораго требуютъ болѣе подробнаго разсмотрѣнія.

---

*) Двѣнадцать лѣтъ тому назадъ, при ежедневномъ моемъ преподаваніи математики, я составилъ эту общую теорію однородности. Послѣ этого я узналъ, что г. Фурье въ своей обширной работѣ о теплотѣ, опубликованной въ 1822 г., слѣдовалъ со своей стороны подобному-же по существу пути. Несмотря на такое счастливое совпаденіе, къ которому естественно приводитъ прямое разсмотрѣніе такого простого вопроса, я не счелъ возможнымъ здѣсь сослаться на его доказательство, такъ какъ способъ, который я только что изложилъ, долженъ охватить всю совокупность предмета, не останавливаясь ни на какихъ спеціальныхъ приложеніяхъ.

Шестая лекція.

Сравнительное изложеніе различныхъ общихъ точекъ зрѣнія, съ которыхъ можно разсматривать исчисленіе косвенныхъ функцій.

Въ четвертой лекціи мы опредѣлили философскій характеръ трансцендентнаго анализа независимо отъ способа его пониманія, разсматривая только общую природу истиннаго его назначенія во всей совокупности математическихъ наукъ. Какъ извѣстно, этотъ анализъ былъ излагаемъ геометрами съ нѣсколькихъ точекъ зрѣнія, совершенно различныхъ, но, конечно, по необходимости равнозначущихъ и приводящихъ постоянно къ тождественнымъ результатамъ. Всѣ эти способы изложенія можно привести къ тремъ главнымъ — Лейбница, Ньютона и Лагранжа; всѣ другіе являются только ихъ второстепенными видоизмѣненіями. Въ современномъ состояніи науки каждая изъ этихъ трехъ общихъ системъ представляетъ свои существенныя и исключительныя преимущества, но до сихъ поръ еще не удалось построить единственный методъ, который соединялъ-бы характеристическія особенности всѣхъ системъ. Размышляя объ этомъ важномъ вопросѣ во всемъ его объемѣ, обыкновенно, какъ мнѣ кажется, приходятъ къ убѣжденію, что именно изъ идеи Лагранжа можетъ впослѣдствіи возникнуть подобная комбинація методовъ. Когда этотъ важный философскій трудъ, требующій полной переработки всѣхъ основныхъ математическихъ идей, будетъ надлежащимъ образомъ выполненъ, для ознакомленія съ трансцендентнымъ анализомъ можно будетъ ограничиться только изученіемъ этой послѣдней системы; остальныя будутъ тогда имѣть для насъ только историческій интересъ. До тѣхъ поръ, однако, въ этомъ отношеніи должно смотрѣть на математику какъ на науку, находящуюся въ переходной стадіи и требующую даже для догматическаго изложенія трансцендентнаго анализа одновременнаго разсмотрѣнія различныхъ общихъ пріемовъ, свойственныхъ исчисленію косвенныхъ функцій. Какъ бы мало удовлетворительной съ логической точки зрѣнія ни казалась эта множественность идей, относящихся къ совершенно тождественному предмету, несомнѣнно, что помимо указаннаго неизбѣжнаго условія въ настоящее время можно составить себѣ объ этомъ анализѣ понятіе только весьма несовершенное или само по себѣ, или въ особенности по отношенію къ примѣненіямъ его, какой-бы путь мы ни нашли нужнымъ выбрать. Этотъ недостатокъ системы въ самой важной части математическаго анализа совсѣмъ не покажется намъ страннымъ, если, съ одной стороны, принять во вниманіе ея громадный объемъ и чрезвычайную трудность и, съ другой стороны, непродолжительность ея существованія. Едва прошло одно поколѣніе геометровъ со времени первоначальнаго появленія идеи, которой несомнѣнно суждено систематизировать всю науку, для приданія ей твердаго и однообразнаго характера; такимъ образомъ въ этомъ отношеніи интеллектуальныя привычки не могли еще выработаться достаточно твердо.

Если-бы мы здѣсь захотѣли намѣтить раціональную исторію послѣдовательнаго образованія трансцендентнаго анализа, то намъ прежде всего слѣдовало-бы тщательно отдѣлить отъ исчисленія косвенныхъ функцій въ собственномъ смыслѣ слова первоначальную идею о методѣ безконечномалыхъ, идею, которая можетъ быть усвоена сама по себѣ, независимо отъ всякаго исчисленія. Въ такомъ случаѣ мы увидѣли-бы, что первый зародышъ этой идеи замѣтенъ уже въ методѣ, постоянно примѣнявшемся у греческихъ геометровъ и извѣстномъ подъ именемъ *метода исчерпыванія:* этотъ методъ служилъ для перехода отъ понятій, относящихся къ прямымъ линіямъ, къ понятіямъ, связаннымъ съ кривыми, и состоялъ, главнымъ образомъ, въ замѣнѣ кривой вспомогательнымъ вписаннымъ или описаннымъ многоугольникомъ, отъ котораго переходили къ самой кривой, выбирая надлежащимъ образомъ предѣлы первоначальныхъ отношеній.

Какъ-бы неоспорима ни была подобная преемственность идей, видѣть въ этомъ методѣ исчерпыванія истинный эквивалентъ новыхъ методовъ, какъ это дѣлали нѣкоторые геометры, значитъ чрезмѣрно преувеличивать его значеніе. Древніе совсѣмъ не имѣли раціональнаго и общаго пріема для опредѣленія указанныхъ предѣловъ, въ чемъ собственно и состоитъ обыкновенно наибольшая трудность задачи, и поэтому ихъ способы рѣшенія никогда не были подчинены абстрактнымъ и неизмѣннымъ правиламъ, однообразное примѣненіе которыхъ должно было-бы непремѣнно приводить къ искомому отвѣту, а въ этомъ то именно и заключается главная отличительная черта нашего трансцендентнаго анализа. Однимъ словомъ, нужно было обобщить идеи, примѣненныя древними, и въ особенности, разсматривая ихъ чисто абстрактнымъ образомъ, нужно было преобразовать ихъ въ исчисленіе, а это оказалось невозможнымъ для древнихъ. Первый шагъ въ этомъ новомъ направленіи въ дѣйствительности принадлежитъ нашему великому геометру Ферма́, и Лагранжъ справедливо считалъ, что именно Ферма́ намѣтилъ въ общихъ чертахъ построеніе трансцендентнаго анализа своимъ методомъ опредѣленія *наибольшихъ* и *наименьшихъ* значеній величинъ и нахожденія касательныхъ, ибо существенную часть его метода составляло введеніе въ разсмотрѣніе съ вспомогательной цѣлью относительныхъ приращеній данныхъ перемѣнныхъ, приращеній, которыя отбрасывались какъ равныя нулю послѣ того, когда уравненія уже подверглись надлежащимъ преобразованіямъ. Хотя Ферма́ первый смотрѣлъ на трансцендентный анализъ дѣйствительно абстрактнымъ образомъ, но его методъ далеко еще не составлялъ стройно разработаннаго общаго и опредѣленнаго исчисленія, имѣющаго свою собственную систему обозначеній, и въ особенности не былъ свободенъ отъ излишняго разсмотрѣнія членовъ, которые, осложнивъ въ высшей степени своимъ присутствіемъ всѣ операціи, въ концѣ концовъ въ анализѣ

Ферма совершенно отбрасывались. Эти недостатки весьма удачно устранилъ Лейбницъ полвѣка спустя, послѣ нѣкоторыхъ промежуточныхъ видоизмѣненій идей Ферма, введенныхъ Валлисомъ и въ особенности Барроу; такимъ образомъ Лейбницъ и былъ дѣйствительнымъ создателемъ трансцендентнаго анализа въ той формѣ, въ какой мы имъ пользуемся теперь.

Это важное открытіе, какъ и всѣ великія идеи человѣческаго ума, было настолько подготовлено въ моментъ его появленія, что Ньютонъ съ своей стороны одновременно или только немного раньше пришелъ къ безусловно равносильному методу, разсматривая трансцедентный анализъ съ совершенно иной точки зрѣнія, которая, хотя сама по себѣ и была гораздо раціональнѣе, однако въ дѣйствительности оказалась менѣе пригодной для того, чтобы сообщить основному методу широту и легкость, приданныя ему идеями Лейбница. Наконецъ, нѣсколько позже Лагранжъ, устранивъ разнородность соображеній, руководившихъ Лейбницемъ и Ньютономъ, обратилъ достигшій уже высокаго совершенства трансцендентный анализъ въ чисто алгебраическую систему, которой недостаетъ только большей удобопримѣнимости въ приложеніяхъ.

Послѣ такого краткаго обзора общей исторіи трансцендентнаго анализа перейдемъ къ догматическому изложенію трехъ главныхъ воззрѣній, чтобы точно оцѣнить ихъ характеристическія особенности и указать на необходимую тождественность вытекающихъ изъ нихъ методовъ. Начнемъ съ идей Лейбница.

Мысль Лейбница, какъ извѣстно, состоитъ въ томъ, что въ исчисленіе, ради облегченія установленія уравненій, вводятся безконечно малые элементы, составляющіе, по предположенію, тѣ величины, отношенія которыхъ требуется найти. Эти элементы или *дифференціалы* по необходимости постоянно находятся въ болѣе простыхъ и легче обнаруживаемыхъ отношеніяхъ, чѣмъ основныя величины; исходя изъ отношеній между дифференціалами, при помощи особаго исчисленія, имѣющаго цѣлью исключеніе этихъ вспомогательныхъ безконечно малыхъ величинъ, можно перейти къ искомымъ уравненіямъ, которыя чаще всего невозможно получить непосредственно. Указанный косвенный анализъ можетъ быть косвеннымъ въ различныхъ степеняхъ, такъ какъ иногда, если окажется, что составить уравненіе прямо между дифференціалами разсматриваемыхъ величинъ слишкомъ трудно, необходимо вторично прибѣгнуть къ примѣненію того-же общаго пріема и, обращаясь съ дифференціалами, какъ съ новыми основными величинами, искать отношеніе между ихъ безконечно малыми элементами, которые по отношенію къ основнымъ величинамъ задачи будутъ дифференціалами второго порядка и т. д.; это преобразованіе можетъ быть повторено любое число разъ съ непремѣннымъ условіемъ исключать въ концѣ концовъ весь постепенно возраставшій рядъ введенныхъ вспомогательныхъ безконечно малыхъ величинъ.

Лицу, незнакомому съ изложенными выше соображеніями, не сразу понятно, какимъ образомъ употребленіе этихъ вспомогательныхъ величинъ можетъ облегчить открытіе аналитическихъ законовъ явленій: такъ какъ безконечно малыя приращенія данныхъ въ задачѣ величинъ того-же рода, какъ и сами величины, то, казалось-бы, отношенія ихъ не должны-бы получаться легче, ибо въ самомъ дѣлѣ большее или меньшее численное значеніе величинъ не можетъ оказать никакого вліянія на изслѣдованіе, по самой своей природѣ совершенно независящее отъ какой-бы то ни было идеи о количествѣ. Тѣмъ не менѣе, очень нетрудно совершенно точно и вполнѣ общимъ образомъ объяснить себѣ, насколько такой пріемъ облегчаетъ рѣшеніе задачи. Для этого достаточно начать различать порядки безконечно малыхъ величинъ, порядки, о которыхъ можно составить себѣ точное понятіе, если принять во вниманіе, что они могутъ быть представленными или послѣдовательными степенями одной и той-же первоначальной безконечно малой величины или-же величинами, находящимися съ этими степенями въ опредѣленныхъ отношеніяхъ; такъ, напримѣръ, вторые, третьи и т. д. дифференціалы одной и той-же перемѣнной могутъ быть классифицированы какъ безконечно малыя величины втораго, третьяго и т. д. порядковъ, такъ какъ легко доказать, что они представляютъ произведенія конечныхъ множителей на вторую, третью и т. д. степени перваго дифференціала. Установивъ эти предварительныя понятія, можно сказать, что основная идея исчисленія безконечно малыхъ состоитъ въ томъ, что безконечно малыя величины по отношенію къ конечнымъ постоянно пренебрегаются и вообще пренебрегаются безконечно малыя любого порядка по отношенію къ безконечно малымъ-же низшаго порядка. Отсюда непосредственно видно, насколько такая возможность должна облегчать составленіе уравненій между дифференціалами величинъ, ибо вмѣсто этихъ дифференціаловъ можно подставлять любые болѣе простые элементы, соблюдая только единственное условіе, чтобы эти новые элементы отличались отъ предыдущихъ на безконечно малые по сравненіи съ ними величины. Такимъ именно образомъ и можно въ геометріи разсматривать кривыя линіи, какъ состоящія изъ безконечно большаго числа прямолинейныхъ элементовъ; кривыя поверхности, какъ состоящія изъ плоскихъ элементовъ, а въ механикѣ перемѣнное движеніе какъ безконечный рядъ равномѣрныхъ движеній, слѣдующихъ одно за другимъ въ безконечно малые промежутки времени. Въ виду важности этой удивительной концепціи, я считаю нужнымъ здѣсь краткимъ указаніемъ на нѣсколько главныхъ примѣровъ еще болѣе выяснить ея основной характеръ.

Предположимъ, что требуется опредѣлить направленіе касательной въ какой-нибудь точкѣ плоской кривой, уравненіе которой дано; общее рѣшеніе этой задачи и было первымъ предметомъ, который имѣли въ виду создатели трансцендентнаго анализа. При рѣшеніи задачи надо разсматривать касательную, какъ сѣкущую, соединяющую двѣ безконечно близкихъ другъ къ другу точки; затѣмъ, называя черезъ dy и dx безконечно малыя разности координатъ этихъ двухъ точекъ, изъ первыхъ-же элементовъ геометріи тотчасъ-же найдемъ уравненіе $t=\frac{dy}{dx}$ для тригонометрическаго тангенса угла, образуемаго осью x-овъ и искомой касательной; въ системѣ прямолинейныхъ координатъ это и есть простѣйшій способъ опредѣленія положенія касательной. Если это уравненіе, общее для всѣхъ кривыхъ, установлено, то вопросъ приводится къ простой аналитической задачѣ, состоящей въ исключеніи введенныхъ въ качествѣ вспомогательныхъ безконечно малыхъ величинъ dy и dx путемъ опредѣленія для каждаго частнаго случая, на основаніи уравненій данной кривой, отношенія dy къ dx; это въ свою очередь выполняется весьма простыми и однообразными пріемами.

Для втораго примѣра предположимъ, что требуется опредѣлить для какой-нибудь кривой длину дуги, принимая ее за функцію координатъ концовъ ея. Найти сразу уравненіе между дугой s и координатами концовъ ея невозможно, но очень легко найти соотвѣтствующее отношеніе между дифференціалами этихъ величинъ. Въ самомъ дѣлѣ, самыя простыя теоремы элементарной геометріи даютъ для безконечно малой дуги ds, разсматриваемой, какъ прямая линія, уравненія

$$ds^2 = dy^2 + dx^2, \text{ или } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

смотря потому, будетъ-ли данная кривая плоской или кривой двоякой кривизны. Въ томъ и другомъ случаѣ задача теперь принадлежитъ вполнѣ къ области анализа, который, на основаніи указаннаго отношенія, съ помощью исключенія дифференціаловъ, приведетъ къ зависимости, существующей между самыми конечными величинами, что собственно и представляетъ предметъ исчисленія косвенныхъ функцій.

Тоже самое можно сказать и о квадратурѣ криволинейныхъ площадей. Пусть кривая плоская и опредѣляется прямолинейными координатами; представимъ себѣ, что площадь A, заключенная между кривой, осью x'овъ и двумя крайними координатами, увеличилась на безконечно малую величину dA вслѣдствіе соотвѣтственнаго приращенія абсциссы. Въ такомъ случаѣ отношеніе этихъ двухъ дифференціаловъ получится непосредственно и очень легко, если криволинейный элементъ данной площади замѣнить прямоугольникомъ, образованнымъ крайней ординатой и приращеніемъ абсциссы; эти элементарныя площадки отличаются другъ отъ друга только на безконечно малую величину втораго порядка, вслѣдствіе чего, какова-бы ни была кривая, тотчасъ-же получится весьма простое дифференціальное уравненіе

$$dA = ydx,$$

изъ котораго исчисленіе косвенныхъ функцій даетъ возможность, если сама кривая опредѣлена, вывести конечное уравненіе, представляющее непосредственный предметъ задачи.

Подобнымъ-же образомъ въ динамикѣ, когда ищется выраженіе скорости, пріобрѣтаемой въ каждый моментъ тѣломъ, движущимся по какому-нибудь закону, то движеніе въ теченіи безконечно малаго элемента времени t слѣдуетъ разсматривать какъ равномѣрное, и въ такомъ случаѣ немедленно получается дифференціальное уравненіе $de = vdt$, въ которомъ v есть скорость, пріобрѣтенная тѣломъ во время пробѣга пути e; отсюда уже легко, при помощи простыхъ неизмѣнныхъ аналитическихъ пріемовъ, получить формулу, которая давала-бы, на основаніи соотвѣтствующаго соотношенія времени и пространства, скорость въ каждомъ частномъ случаѣ движенія, или, наоборотъ, которая указывала-бы, каково должно быть это отношеніе, если законъ измѣненія скорости по отношенію къ пространству или по отношенію ко времени былъ-бы извѣстенъ. Наконецъ, чтобы указать на задачи иного рода, замѣтимъ, что при изученіи термологическихъ явленій, какъ это удачно сдѣлалъ г. Фурье, подобнымъ-же образомъ можно весьма просто, какъ мы это позже увидимъ, составить общее дифференціальное уравненіе, выражающее измѣненіе въ распредѣленіи теплоты въ любомъ тѣлѣ, какимъ-бы условіямъ оно ни было подчинено; для этого достаточно воспользоваться однимъ соотношеніемъ, весьма легко устанавливаемымъ и показывающимъ распредѣленіе теплоты въ прямоугольномъ параллелепипедѣ, и разсматривать затѣмъ геометрически всякое тѣло, какъ состоящее изъ безконечно малыхъ элементовъ такой-же формы, и термологически истеченіе тепла, какъ постоянное въ теченіе безконечно малаго промежутка времени. Послѣ этого всѣ задачи, могущія встрѣтиться въ абстрактной термологіи, приводятся, какъ и въ геометріи и механикѣ, къ простымъ аналитическимъ задачамъ, которые всегда будутъ состоять въ исключеніи дифферанціаловъ, введенныхъ въ качествѣ вспомогательныхъ величинъ ради облегченія установленія уравненій.

Столь различныхъ по природѣ своей примѣровъ болѣе чѣмъ достаточно, чтобы дать ясное понятіе объ огромномъ значеніи основной идеи трансцендентнаго анализа въ той формѣ, какую придалъ ей Лейбницъ, идеи, представляющей, безъ сомнѣнія, величайшую изъ всѣхъ концепцій, до которыхъ когда-либо возвышался человѣческій духъ.

Изъ предыдущаго видно, что эта идея была необходима для завершенія основаній математики и дала возможность широкимъ и плодотворнымъ образомъ опредѣлять отношеніе конкретнаго къ абстрактному. Съ этой точки зрѣнія ее нужно разсматривать, какъ необходимое дополненіе великой идеи Декарта объ общемъ аналитическомъ представленіи естественныхъ явленій, идеи, достойно оцѣненной и правильно примѣняемой только со времени созданія анализа безконечно малыхъ, безъ котораго она даже въ геометріи не могла принести важныхъ результатовъ *).

Хотя въ предыдущихъ соображеніяхъ я считалъ необходимымъ особенно настаивать на удивительной легкости, которую по самой своей природѣ трансцендентный анализъ представляетъ для отысканія математическихъ законовъ всѣхъ явленій, я не могу не обратить вниманіе на второе основное свойство исчисленія, быть можетъ, столь-же важное, какъ и первое и не менѣе присущее анализу: я имѣю въ виду чрезвычайную общность дифференціальныхъ формулъ, выражающихъ каждое опредѣленное явленіе однимъ уравненіемъ, какъ-бы разнообразны ни были условія, при которыхъ оно разсматривается. Такимъ образомъ, съ точки зрѣнія анализа безконечно малыхъ, въ предыдущихъ примѣрахъ одно дифференціальное уравненіе даетъ касательныя ко всѣмъ кривымъ, другое—выпрямленіе ихъ дугъ, третье—квадратуры; одна неизмѣнная формула выражаетъ также математическій законъ всякаго перемѣннаго движенія и, наконецъ, одно уравненіе постоянно представляетъ распредѣленіе теплоты въ любомъ тѣлѣ и въ любомъ случаѣ.

Эта удивительная общность, служащая для геометровъ основаніемъ самыхъ сложныхъ соображеній, является счастливымъ, необходимымъ и почти непосредственнымъ слѣдствіемъ самаго духа трансцендентнаго анализа, особенно въ концепціи Лейбница; она вытекаетъ изъ того, что при замѣнѣ безконечно малыхъ элементовъ разсматриваемыхъ величинъ другими, болѣе простыми, которыя однѣ только и входятъ въ составъ дифференціальныхъ уравненій, послѣднія безконечно малыя ве-

*) Дѣйствительно, весьма замѣчательно, что даже такой мыслитель какъ Паскаль обратилъ такъ мало вниманія на основную идею Декарта и совершенно не предчувствовалъ того общаго переворота, который она непремѣнно должна была произвести во всей системѣ математическихъ познаній. Это обстоятельство объясняется тѣмъ, что безъ помощи трансцендентнаго анализа удивительный методъ Декарта не былъ въ состояніи привести къ какимъ-либо существеннымъ результатамъ, которыхъ нельзя было-бы получить почти такъ же хорошо при помощи геометрическихъ методовъ древнихъ.

Даже самые выдающіеся умы до сихъ поръ въ общихъ методахъ всегда менѣе цѣнили собственно ихъ философскій характеръ, чѣмъ тѣ дѣйствительныя знанія, которыя эти методы могли немедленно дать.

личины по самой своей природѣ постоянно остаются однѣ и тѣ-же для цѣлаго ряда задачъ, каковы-бы ни были отдѣльные предметы, входящіе въ составъ изучаемаго явленія. Такъ, напримѣръ, если разложить какую-нибудь кривую на прямолинейные элементы, то à priori видно, что отношеніе между этими однородными элементами должно по необходимости постоянно оставаться однимъ и тѣмъ-же для всякаго подобнаго геометрическаго явленія, хотя соотвѣтствующее этому дифференціальному закону конечное уравненіе и должно измѣняться при переходѣ отъ одной кривой къ другой. Очевидно, тоже обстоятельство имѣетъ мѣсто во всякомъ другомъ случаѣ; слѣдовательно анализъ безконечно малыхъ не только далъ общій способъ косвеннаго образованія уравненій, которыя было-бы невозможно составить прямо, но кромѣ того онъ представилъ еще возможность изслѣдовать при математическомъ изученіи естественныхъ явленій новый классъ законовъ, болѣе общихъ, имѣющихъ тѣмъ не менѣе ясный и точный смыслъ для всякаго привыкшаго къ ихъ толкованію ума. Эти законы остаются неизмѣнными для каждаго явленія въ какихъ бы предметахъ оно ни было изучаемо, и измѣняются только въ при переходѣ отъ одного явленія къ другому; изслѣдуя измѣненіе этихъ законовъ, можно было иногда получить, съ еще болѣе общей точки зрѣнія, положительныя сопоставленія отдѣльныхъ классовъ совершенно различныхъ явленій, пользуясь для этого аналогіей, представляемой дифференціальными выраженіями ихъ математическихъ законовъ. При философскомъ изученіи конкретной математики, я постараюсь точно оцѣнить это второе характеристическое свойство трансцендентнаго анализа, не менѣе удивительное, чѣмъ первое, и дающее возможность цѣлую систему такихъ громадныхъ наукъ, какъ геометрія и механика, привести къ небольшому числу аналитическихъ формулъ, изъ которыхъ человѣческій умъ, на основаніи извѣстныхъ неизмѣнныхъ правилъ, можетъ вывести рѣшеніе задачъ для всѣхъ частныхъ случаевъ.

Чтобы закончить общее изложеніе идеи Лейбница, мнѣ остается только разсмотрѣть само въ себѣ доказательство логическаго процесса, къ которому она приводитъ,—что, къ сожалѣнію, составляетъ наименѣе совершенную часть этого прекраснаго метода.

Первое время, послѣ открытія анализа безконечно малыхъ самые знаменитые геометры, къ числу которыхъ принадлежатъ два брата Бернулли, Иванъ и Яковъ, — справедливо обращали главное вниманіе на расширеніе и развитіе безсмертной идеи Лейбница и на увеличеніе числа ея примѣненій, и оставляли въ сторонѣ строгое установленіе логическихъ основъ, на которыхъ покоились методы этого новаго исчисленія *). Долгое время они довольствовались возможностью неожиданнымъ рѣшеніемъ самыхъ трудныхъ задачъ отвѣчать на ясно высказанныя возраженія большинства второклассныхъ геометровъ противъ прин-

*) Нельзя безъ глубокаго интереса видѣть наивный энтузіазмъ знаменитаго Гюйгенса по поводу этого удивительнаго творенія, хотя преклонный возрастъ названнаго ученаго не позволилъ ему лично воспользоваться новымъ важнымъ орудіемъ, безъ котораго ему, впрочемъ, удалось сдѣлать нѣсколько капитальныхъ открытій. „Я съ удивленіемъ и восхищеніемъ вижу“ писалъ онъ въ 1692 году маркизу Л'Опиталю, „широту и плодотворность этого искусства; куда-бы я ни посмотрѣлъ, я нахожу возможность новыхъ примѣненій его: наконецъ, тамъ я ожидаю безконечный прогрессъ и предметъ для размышленія“.

циповъ новаго анализа; они безъ сомнѣнія были убѣждены, вопреки общеустановившемся взглядамъ, что въ математикѣ болѣе, чѣмъ въ какой нибудь другой наукѣ, можно смѣло пользоваться новыми методами, даже если ихъ доказательство несовершенно, лишь-бы эти методы были плодотворны по своимъ результатамъ, такъ какъ ошибка, при облегченіи повѣрокъ и увеличеніи ихъ числа, не останется долго незамѣченной. Однако, послѣ перваго увлеченія, нельзя было оставаться въ такомъ положеніи, и надо было непремѣнно обратиться къ самымъ основамъ анализа Лейбница, чтобы въ общемъ видѣ установить безусловную точность употребляемыхъ пріемовъ, не смотря на очевидное противорѣчіе ихъ съ обыкновенными правилами разсужденія. Къ сожаленію, Лейбницъ поспѣшилъ отвѣтомъ и далъ совершенно ошибочное объясненіе, говоря, что онъ разсматриваетъ безконечно малыя величины, какъ величины *несравнимыя*, и что онъ пренебрегаетъ ими по отношенію къ конечнымъ величинамъ, какъ *отдѣльными песчинками по отношенію ко всему морю*. Это соображеніе совершенно исказило его анализъ, низводя послѣдній до степени простого приближеннаго исчисленія, имѣющаго въ этомъ отношеніи тотъ серьезный недостатокъ, что, вообще говоря, не давало бы возможности представить себѣ, до какой степени послѣдовательныя операціи увеличиваютъ первоначальныя ошибки, которыя, очевидно, могутъ достигнуть такимъ образомъ какихъ угодно размѣровъ. Лейбницъ слѣдовательно понималъ истинныя раціональныя основы созданнаго имъ анализа совершенно неправильнымъ образомъ. Его первые послѣдователи ограничивались сперва повѣркой точности анализа путемъ сравненія въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ результатовъ его съ выводами, полученными съ помощью обыкновенно алгебры или геометріи древнихъ, стараясь, на сколько это было возможно, найти рѣшеніе различныхъ задачъ на основаніи прежнихъ пріемовъ, послѣ того какъ оно было найдено по новому методу, единственному, съ помощью котораго сначала можно было придти къ рѣшенію. Когда-же этотъ громадной важности вопросъ подвергся обсужденію въ болѣе общей формѣ, то геометры, вмѣсто того, что-бы прямо обратиться къ дѣйствительной трудности его, предпочли, какъ напримѣръ, Эйлеръ и д'Аламберъ, до извѣстной степени уклониться отъ разрѣшенія ея, доказывая абстрактнымъ образомъ необходимое и постоянное согласіе идеи Лейбница, разсматриваемой во всѣхъ ея приложеніяхъ, съ другими основными идеями трансцендентнаго анализа, и въ особенности съ идеями Ньютона, точность которыхъ была внѣ всякаго спора. Подобная общая повѣрка, конечно, вполнѣ достаточна, чтобы разсѣять всякое сомнѣніе относительно права примѣнять анализъ Лейбница. Но методъ безконечно малыхъ такъ важенъ и почти во всѣхъ своихъ примѣненіяхъ обнаруживаетъ такое дѣйствительное превосходство надъ всѣми общими концепціями, послѣдовательно предложенными, что невозможность оправдать этотъ методъ самъ по себѣ и необходимость логически основывать его соображеніями иного рода, которыя затѣмъ не находили-бы себѣ примѣненія на практикѣ, показывали-бы несомнѣнное несовершенство самаго философскаго характера науки. Поэтому прямое и общее доказательство безусловной раціональности метода безконечно малыхъ представляется вопросомъ дѣйствительной важности. Послѣ различныхъ болѣе или менѣе несовершенныхъ попытокъ рѣшить этотъ вопросъ и послѣ того, какъ философскія работы Лагранжа обратили въ концѣ прошлаго вѣка вниманіе геометровъ на общую теорію анализа безконечно малыхъ, одинъ весьма почтенный геометръ, Карно, далъ наконецъ дѣйствительно прямое и логическое объясненіе метода Лейбница, доказавъ, что онъ основанъ на принципѣ необходимаго уравновѣшенія ошибокъ, что и представляетъ, вѣроятно, точное и ясное выраженіе того, что Лейбницъ неопредѣленно и смутно высказалъ, пытаясь установить раціональное основаніе своего анализа. Такимъ образомъ Карно оказалъ наукѣ серьезную услугу *), важность которой, какъ мнѣ кажется, еще недостаточно оцѣнена; однако, какъ мы увидимъ въ концѣ этой лекціи, всѣ эти логическія надстройки къ методу безконечно малыхъ, по всей вѣроятности, способны просуществовать только очень недолго, такъ какъ онѣ глубоко ошибочны въ основѣ. Тѣмъ не менѣе, я думаю, что для дополненія изложенія этого важнаго вопроса я долженъ разсмотрѣть здѣсь общее разсужденіе, предложенное Карно, чтобы прямо доказать анализъ Лейбница: вотъ въ чемъ заключается суть его.

Устанавливая дифференціальное уравненіе явленія, мы замѣняемъ непосредственные элементы разсматриваемыхъ величинъ другими, болѣе простыми безконечно малыми элементами, которые отличаются отъ первыхъ на безконечно малыя относительно ихъ величинъ; эта замѣна составляетъ главный пріемъ метода Лейбница, который помимо нея нисколько не облегчалъ-бы въ дѣйствительности составленія уравненій. Карно считаетъ, что эта гипотеза вноситъ дѣйствительно нѣкоторую ошибку въ полученное такимъ образомъ уравненіе, и поэтому оно называетъ послѣднее *несовершеннымъ*; очевидно, однако, эта ошибка должна быть безконечно мала; съ другой стороны, всѣ аналитическія операціи, производимыя надъ дифференціальными уравненіями, какъ при дифференцированіи, такъ и при интегрированіи съ цѣлью, по исключеніи введенныхъ въ качествѣ вспомогательныхъ безконечно малыхъ величинъ, придти къ конечнымъ уравненіямъ, точно также по самой своей природѣ вводятъ, какъ это не трудно видѣть, подобныя ошибки: такимъ образомъ въ окончательныхъ уравненіяхъ происходитъ точное уравновѣшеніе ошибокъ, и, по выраженію Карно, они становятся *совершенными*. Вѣрнымъ и неизмѣннымъ признакомъ дѣйствительнаго уравновѣшенія ошибокъ Карно считаетъ полное исключеніе всѣхъ безконечно малыхъ величинъ въ уравненіи, что и составляетъ на самомъ дѣлѣ конечную цѣль всѣхъ операцій трансцендентнаго анализа. Если мы ни разу не допустили ни одного нарушенія общихъ правилъ разсужденія, кромѣ вызываемыхъ самой природой метода безконечно-малыхъ, и такъ какъ полученныя такимъ образомъ безконечно малыя ошибки могли ввести во всѣ уравненія тоже только безконечно малыя ошибки, то отношенія, связывающія между собой однѣ конечныя величины, пріобрѣтутъ безусловную точность, ибо въ этихъ отношеніяхъ могутъ имѣть мѣсто только конечныя ошибки, а такихъ не могло возникнуть при указанныхъ операціяхъ. Все это общее разсужденіе основано на понятіи о безконечно-малыхъ величинахъ какъ о величинахъ безконечно уменьшающихся, тогда какъ величины, отъ которыхъ они происходятъ, признаются конечными.

---

*) Посмотрите замѣчательное сочиненіе, которое онъ опубликовалъ подъ заглавіемъ „Размышленія о метафизикѣ исчисленія безконечно малыхъ“, гдѣ можно найти ясное и полезное, хотя и нѣсколько поверхностное изложеніе всѣхъ главныхъ точекъ зрѣнія, съ которыхъ разсматривалась общая система исчисленія косвенныхъ функцій.

Чтобы пояснить однимъ примѣромъ это отвлеченное изложеніе, обратимся еще разъ къ задачѣ о касательныхъ, которую легче всего проанализировать вполнѣ. Допустимъ, что полученное выше уравненіе $t = \frac{dy}{dx}$ заключаетъ въ себѣ безконечно малую ошибку, такъ какъ оно безусловно вѣрно только для сѣкущей. Теперь, для окончательнаго рѣшенія задачи, надо найти, съ помощью уравненія каждой кривой, отношеніе между дифференціалами координатъ. Если уравненіе кривой, какъ я предполагаю, есть $y = ax^2$, то очевидно получится

$$dy = 2\ axdx + adx^2.$$

Въ этой формулѣ надлежитъ пренебречь членомъ adx^2, какъ безконечно малой величиной втораго порядка,

Затѣмъ съ помощью совокупности двухъ *несовершенныхъ* уравненій

$$t = \frac{dy}{dx}, \qquad dy = 2\ ax\,dx$$

можно совершенно исключить всѣ безконечно малыя, и окончательный результатъ

$$t = 2ax$$

будетъ по необходимости точнымъ вслѣдствіе полнаго уравновѣшенія двухъ сдѣланныхъ ошибокъ, такъ какъ въ результатѣ по самой природѣ его не должны заключаться безконечно малыя ошибки, единственныя, однако, которыя могли бы войти туда по характеру произведенныхъ надъ уравненіемъ операцій.

Легко было бы повторить тоже разсужденіе по отношенію ко всѣмъ другимъ общимъ приложеніямъ анализа Лейбница.

Изложенная замѣчательная теорія, конечно, окажется болѣе остроумной, чѣмъ основательной, если разсмотрѣть ее глубже. Въ дѣйствительности, она страдаетъ, однако, тѣмъ же логическимъ недостаткомъ, какъ и самый методъ безконечно малыхъ, и мнѣ кажется, что вся эта теорія является только естественнымъ развитіемъ и общимъ объясненіемъ указаннаго метода, такъ что ее можно признавать до тѣхъ поръ, пока будетъ допущено прямое примѣненіе метода.

Переходя теперь къ общему изложенію двухъ другихъ основныхъ концепцій трансцендентнаго анализа, я ограничусь по отношенію къ каждой указаніемъ основной идеи ея, такъ какъ философскій характеръ этого анализа достаточно выясненъ выше, при разсмотрѣніи воззрѣній Лейбница, на которыхъ я долженъ былъ остановиться съ особымъ вниманіемъ потому, что они позволяютъ легче схватить методъ во всемъ его объемѣ и описать его съ наибольшей быстротой.

Ньютонъ представилъ свои воззрѣнія на трансцендентный анализъ послѣдовательно въ нѣсколькихъ различныхъ формахъ; та изъ нихъ, которая теперь наиболѣе принята, по крайней мѣрѣ среди геометровъ на континентѣ, была названа Ньютономъ *методомъ первыхъ и послѣднихъ отношеній, или методомъ предѣловъ*; всего чаще употребляется теперь это послѣднее названіе.

Съ точки зрѣнія Ньютона общій духъ трансцендентнаго анализа состоитъ въ введеніи, вмѣсто основныхъ величинъ или одновременно съ ними, ради облегченія составленія уравненій, предѣловъ отношенія одновременныхъ приращеній основныхъ величинъ, или другими словами, послѣднія отношенія этихъ приращеній; эти предѣлы или послѣднія отношенія, какъ не трудно доказать, имѣютъ опредѣленныя и конечныя значенія. Особое исчисленіе, эквивалентное исчисленію безконечно малыхъ, имѣетъ цѣлью затѣмъ отъ уравненій между предѣлами переходить къ соотвѣтствующимъ уравненіямъ между первоначальными величинами. Облегченіе, вносимое анализомъ Ньютона въ составленіе выраженій математическихъ законовъ явленій вообще, заключается въ томъ, что это исчисленіе, занимаясь не самыми приращеніями данныхъ величинъ, а только предѣлами отношеній этихъ приращеній, даетъ намъ возможность постоянно замѣнять каждое приращеніе другой, болѣе простой величиной, съ тѣмъ условіемъ, чтобы ихъ послѣднее отношеніе было отношеніемъ равенства, или, другими словами, чтобы предѣлъ ихъ отношенія былъ равенъ единицѣ. Дѣйствительно, очевидно, что исчисленіе предѣловъ отъ такой замѣны ни въ чемъ не будетъ нарушено. Исходя изъ этого принципа, можно придти почти къ тѣмъ-же результатамъ, которые даетъ анализъ Лейбница, но понимая ихъ съ совершенно иной точки зрѣнія: кривыя разсматриваются здѣсь какъ предѣлы ряда прямолинейныхъ многоугольниковъ; неремѣнныя движенія, какъ предѣлы совокупности равномѣрныхъ, приближающихся другъ къ другу движеній и т. д.

Предположимъ, напримѣръ, что требуется опредѣлить направленіе касательной къ кривой. Будемъ разсматривать ее какъ предѣлъ, къ которому стремится сѣкущая, вращающаяся около данной точки такимъ образомъ, что вторая точка пересѣченія ея безконечно приближается къ первой. Называя разности координатъ двухъ точекъ черезъ Δy и Δx, во всякой моментъ для тангенса угла, который образуетъ сѣкущая съ осью абсцисъ, получимъ

$$t = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

а отсюда, взявъ предѣлы, для самой касательной получимъ слѣдующую общую формулу трансцендентнаго анализа

$$t = L\frac{\Delta y}{\Delta x}\ *),$$

на основаніи которой исчисленіе косвенныхъ функцій, во всякомъ частномъ случаѣ, когда дано уравненіе кривой, покажетъ намъ, какъ получить отношеніе между t и x, исключивъ введенныя выше вспомогательныя величины. Чтобы довести рѣшеніе задачи до конца, предположимъ, что

$$y = ax^2$$

есть уравненіе предположенной кривой; очевидно, получимъ

$$\Delta y = 2ax\,\Delta x + a\,(\Delta x)^2$$

откуда заключаемъ, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\,\Delta x.$$

Но, очевидно, предѣлъ, къ которому стремится второй членъ по мѣрѣ уменьшенія Δx, есть $2ax$. Итакъ съ помощью этого метода найдемъ, что

$$t = 2ax,$$

---

*) Я употребляю букву L для обозначенія предѣла.

какъ уже было получено выше для этого-же самаго случая съ помощью анализа Лейбница.

Подобнымъ-же образомъ, когда опредѣляется длина дуги кривой, нужно приращеніе дуги s замѣнить хордой приращенія; эти двѣ величины, очевидно, находятся въ такомъ отношеніи, что предѣлъ его есть единица; тогда, слѣдуя тому-же пріему, какимъ мы пользовались въ методѣ Лейбница, получимъ слѣдующее общее уравненіе для спрямленія дугъ

$$\left(L\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=1+\left(L\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

или

$$\left(L\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=1+\left(L\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(L\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2$$

смотря по тому, будетъ-ли кривая плоская или двоякой кривизны. Теперь для каждой отдѣльной кривой нужно перейти отъ этого уравненія къ уравненію между дугой и абциссой, что входитъ въ составъ трансцендентнаго анализа въ собственномъ смыслѣ слова.

Съ тою-же легкостью можно примѣнить методъ предѣловъ и ко всѣмъ другимъ общимъ задачамъ, рѣшеніе которыхъ по методу безконечно-малыхъ было указано выше.

Такова по существу принадлежащая Ньютону концепція трансцендентнаго анализа или, правильнѣе говоря, идея, которую Маклоренъ и д'Аламберъ, пытаясь опредѣленно установить и согласовать соображенія Ньютона по этому вопросу, представили, какъ самое раціональное основаніе его анализа.

Прежде чѣмъ перейти къ изложенію концепціи Лагранжа, я долженъ всетаки указать здѣсь еще на другую форму, въ которой Ньютонъ представилъ тотъ-же самый методъ; эта форма заслуживаетъ нашего особеннаго вниманія какъ по ея удивительной въ нѣкоторыхъ случаяхъ ясности, такъ и потому, что она дала наиболѣе удобную для разсматриваемаго способа пониманія трансцендентнаго анализа систему обозначеній, и, что, наконецъ, она до сихъ поръ служитъ особой формой исчисленія косвенныхъ функцій, принятой всѣми англійскими геометрами. Я имѣю въ виду здѣсь исчисленіе *флюксій* и *флюэнтъ*, основанное на общемъ понятіи о скорости.

Чтобы-бы легче выяснить основную идею исчисленія флюксій, будемъ разсматривать каждую кривую, какъ слѣдъ точки, одаренной перемѣннымъ движеніемъ, подчиненнымъ какому нибудь закону. Различныя величины, которыя связаны съ кривой, какъ-то абсцисса, ордината, дуга, площадь и т. д. можно тогда считать произведенными одновременно съ кривой въ различные моменты этого движенія; *скорость*, съ которой будетъ описана каждая изъ этихъ величинъ, будетъ называться *флюксіей* этого количества, носящаго въ свою очередь имя ея *флюэнты*. Согласно такому воззрѣнію весь трансцендентной анализъ будетъ состоять въ непосредственномъ составленіи уравненій между флюксіями данныхъ величинъ, чтобы затѣмъ при помощи спеціальнаго исчисленія находить отсюда уравненія между самими флюэнтами. Сказанное здѣсь о кривыхъ можетъ быть, конечно, примѣнено къ какимъ угодно величинамъ, предполагая, при помощи подходящихъ представленій, что однѣ изъ нихъ произведены движеніями другихъ.

Легко понять общую и необходимую тождественность этого метода, осложненнаго постороннимъ понятіемъ о движеніи, съ методомъ предѣловъ. Дѣйствительно, если, возвращаясь опять къ кривой, предположить, какъ это можно всегда сдѣлать, что движеніе описывающей кривую точки совершается равномѣрно въ извѣстномъ направленіи, напримѣръ, въ направленіи абсциссы, что флюксія абсциссы будетъ постоянной, какъ элементъ времени; для всѣхъ же остальныхъ производимыхъ движеніемъ величинъ оно можетъ считаться равномѣрнымъ только въ теченіе безконечно малого промежутка времени. Установивъ это и имѣя въ виду, что скорость по ея механическому смыслу есть отношеніи пройденнаго пространства ко времени, употребленному на его прохожденіе, и что, кромѣ того, время здѣсь пропорціонально возрастанію абсциссы, увидимъ, что флюксіи ординаты, дуги, площади и т. д., если отбросить промежуточное соображеніе о времени, дѣйствительно оказываются только послѣдними отношеніями приращеній этихъ различныхъ величинъ къ приращенію абсциссы.

Мётодъ флюксіи и флюэнтъ въ дѣйствительности есть только способъ представлять себѣ съ помощью механическихъ сравненій методъ первыхъ и послѣднихъ отношеній, который одинъ только и поддается исчисленію. Вслѣдствіе этого, методъ флюксіи, конечно, обладаетъ тѣми-же общими преимуществами во всѣхъ главныхъ примѣненіяхъ трансцендентнаго анализа, какъ и методъ предѣловъ, и намъ здѣсь незачѣмъ доказывать это особо.

Разсмотримъ, наконецъ, концепцію Лагранжа. Идея его, во всей удивительной простотѣ, заключается въ томъ, что трансцедентный анализъ представляется какъ алгебраическій пріемъ, на основаніи котораго, для облегченія составленія уравненій, вмѣсто первоначальныхъ функцій или одновременно съ ними, вводятся ихъ *производныя*, т. е., по опредѣленію Лангража, коэффиціенты при первомъ членѣ въ приращеніи функціи, разложенной по восходящимъ степенямъ приращеній независимой перемѣнной задачи. Исчисленіе косвенныхъ функцій, въ собственномъ смыслѣ слова, здѣсь, какъ и въ концепціи Лейбница и Ньютона, состоитъ въ исключеніи *производныхъ*, введенныхъ въ качествѣ вспомогательныхъ величинъ, съ цѣлью нахожденія на основаніи существующихъ между ними отношеній соотвѣтствующихъ уравненій между первоначальными величинами.

Такимъ образомъ трансцендентный анализъ является простымъ, но очень важнымъ распространеніемъ обыкновеннаго анализа. Уже давно обычнымъ для геометровъ пріемомъ было введеніе въ аналитическія соображенія вмѣсто величинъ, подлежавшихъ разсмотрѣнію, ихъ степеней, логориѳмовъ, синусовъ и т. д., съ цѣлью упростить уравненія или легче найти ихъ. Послѣдовательное *составленіе производныхъ* является общимъ пріемомъ того-же рода, обладающимъ только большей общностью и поэтому представляющимъ гораздо болѣе важное орудіе для достиженіи общей цѣли. Хотя безъ сомнѣнія à priori можно понять, что предварительное разсмотрѣніе производныхъ *можетъ* облегчить составленіе уравненій, однако не легко объяснить, почему этотъ результатъ *долженъ* получиться скорѣе именно при извѣстномъ способѣ составленія производныхъ, чѣмъ при всякомъ другомъ преобразованіи. Въ этомъ и состоитъ слабая сторона великой мысли Лагранжа. И дѣйствительно, до сихъ поръ не удалось выяснить въ общемъ и абстрактномъ видѣ, безъ разсмотрѣнія другихъ концепцій трансцендентнаго анализа, дѣйствительное значеніе, которое понимаемый такимъ образомъ анализъ долженъ имѣть при изслѣдованіи математическихъ законовъ явленій. Это значеніе можно только констатировать, изучая каждый главный вопросъ отдѣльно, но такая провѣрка становится даже затруднительной, если избрать сложный вопросъ.

Чтобы указать кратко, какъ изложенный способъ пониманія трансцендентнаго анализа можетъ быть дѣйствительно примѣненъ къ рѣшенію математическихъ задачъ, я ограничусь здѣсь разсмотрѣніемъ съ этой новой точки зрѣнія самой простой изъ изслѣдованныхъ выше задачъ, а именно задачи о касательныхъ.

Вмѣсто того, чтобы опредѣлять касательную, согласно воззрѣніямъ Лейбница, какъ продолженіе безконечно малаго элемента кривой, или какъ предѣльное положеніе сѣкущей, согласно воззрѣнію Ньютона, Лагранжъ останавливается на простомъ геометрическомъ свойствѣ ея, аналогичномъ съ опредѣленіемъ древнихъ, и разсматриваетъ касательную какъ прямую, проходящую на столько близко къ кривой, что между кривою и касательной черезъ точку касанія нельзя провести никакой другой прямой. Чтобы опредѣлить направленіе касательной, надо найти общее выраженіе разстоянія ея въ какомъ нибудь направленіи, напримѣръ, въ направленіи ординаты, до второй точки кривой отличной отъ первой, и затѣмъ произвольную постоянную, относящуюся къ наклоненію прямой и входящую по необходимости въ выраженіе разстоянія, подобрать такъ, чтобы сдѣлать его наименьшимъ. Такъ какъ разстояніе, очевидно, равно разности ординатъ точекъ кривой и прямой, соотвѣтствующихъ одной и той-же новой абсциссѣ $x+h$, то оно выразится формулой $(f'(x)-t)h+qh^2+rh^3+\ldots$ и т. д.
гдѣ t, какъ и выше, обозначаетъ неизвѣстный тангенсъ угла, образуемаго осью x съ искомой прямой, а $f'(x)$ есть производная отъ ординаты $f(x)$. Установивъ это положеніе, легко видѣть, что распоряжаясь t такъ, чтобы первый членъ предыдущей формулы обращался въ нуль, мы сдѣлаемъ разстояніе между двумя линіями наименьшимъ, такъ что всякая другая прямая, для которой t не будетъ имѣть опредѣленнаго указаннымъ образомъ значенія, по необходимости уклонится отъ кривой больше. Итакъ для направленія искомой касательный получается общее выраженіе

$$t=f'(x),$$

т. е. результатъ, совершенно совпадающій съ формулами, получаемыми съ помощью методовъ безконечно малыхъ и предѣловъ. Теперь остается для всякой отдѣльной кривой найти $f'(x)$, что является уже вопросомъ чисто аналитическимъ, совершенно тождественнымъ съ соотвѣтствующими вопросами, возникающими при примѣненіи другихъ методовъ.

Разсмотрѣвъ съ достаточною подробностью во всей ихъ совокупности главныя созданныя до настоящаго времени общія концепціи трансцендентнаго анализа, я не долженъ останавливаться на другихъ теоріяхъ, какъ, напримѣръ, на *исчисленіи исчезающихъ*, предложенномъ Эйлеромъ, такъ какъ всѣ онѣ являются только болѣе или менѣе важными и неимѣющими особыхъ приложеній видоизмѣненіями разсмотрѣнныхъ уже методовъ. Чтобы закончить все это изслѣдованіе, мнѣ остается теперь установить только сравнительную оцѣнку трехъ основныхъ методовъ; предварительно, однако, я долженъ въ общемъ видѣ доказать ихъ совершенное и необходимое согласованіе.

Изъ предшествующаго прежде всего видно, что съ точки зрѣнія дѣйствительнаго назначенія указанныхъ трехъ методовъ, независимо отъ лежащихъ въ ихъ основѣ идей, всѣ три представляютъ одинъ и тотъ-же общій логическій пріемъ, который я характеризовалъ въ четвертой лекціи, а именно, введеніе извѣстной системы вспомогательныхъ величинъ, однообразно связанныхъ съ составляющими предметъ самой задачи и замѣняющихъ послѣднія для облегченія аналитическаго выраженія математическихъ законовъ явленій, причемъ въ окончательномъ результатѣ введенныя величины должны быть исключены съ помощью особаго исчисленія. Это обстоятельство и заставило меня опредѣлить трансцендентный анализъ вообще какъ *исчисленіе косвенныхъ функцій*, чтобы отмѣтить его истинный философскій характеръ, отстранивъ всякое разсужденіе о наиболѣе правильномъ его пониманіи и примѣненіи.

Общая цѣль трансцендентнаго анализа, какой-бы методъ ни примѣнялся, состоитъ, слѣдовательно, въ томъ, чтобы скорѣе вводить всякую математическую задачу въ область исчисленія и въ значительной мѣрѣ уменьшать громадную трудность, представляемую обыкновенно переходомъ отъ конкретнаго къ абстрактному. Что-бы мы ни предпринимали, нельзя надѣяться, что когда-нибудь исчисленіе охватитъ всѣ вопросы естественной философіи, геометрическіе, механическіе, термологическіе и т. д., тотчасъ послѣ постановки ихъ, и такая надежда заключала-бы въ себѣ очевидное противорѣчіе. Во всякомъ вопросѣ всегда нужно совершить предварительно работу, которая по самой своей природѣ никогда не можетъ быть подчинена абстрактнымъ и неизмѣннымъ правиламъ и гдѣ исчисленіе не можетъ оказать никакой помощи; цѣль этой работы заключается въ составленіи *уравненій*, служащихъ необходимымъ исходнымъ пунктомъ всѣхъ аналитическихъ изслѣдованій; однако подобная предварительная работа въ высшей степени упрощается благодаря открытію трансцендентнаго анализа, ускорившему такимъ образомъ наступленіе эпохи, когда рѣшеніе большинства задачъ приведется къ однообразному и точному примѣненію общихъ и абстрактныхъ правилъ, такъ какъ этотъ анализъ ограничилъ во всѣхъ случаяхъ указанную спеціальную работу составленіемъ уравненій между вспомогательными величинами, отъ которыхъ исчисленіе тотчасъ-же приводитъ насъ къ уравненіямъ, имѣющимъ непосредственное отношеніе къ даннымъ величинамъ, вмѣсто прямаго, какъ это было до этого удивительнаго открытія, составленія послѣднихъ уравненій. Будутъ-ли эти косвенныя уравненія, въ соотвѣтствіи съ мыслью Лейбница, *дифференціальными*, или-же уравненіями *предѣльными*, согласно съ взглядомъ Ньютона, или, наконецъ, по теоріи Лагранжа, уравненіями между *производными*, общій пріемъ остается, очевидно, неизмѣннымъ.

Совпаденіе указанныхъ трехъ главныхъ методовъ не ограничивается тождественностью ихъ результатовъ; оно относится къ пріемамъ достиженія этихъ результатовъ. Дѣйствительно, во всѣхъ трехъ методахъ не только разсматриваются вмѣсто основныхъ извѣстныя вспомогательныя величины, но, кромѣ того, вводимыя такимъ образомъ величины совершенно одинаковы для всѣхъ ихъ и методы отличаются поэтому другъ отъ друга только способомъ разсмотрѣнія этихъ величинъ. Это положеніе легко установить, взявъ за исходную точку сравненія любую изъ трехъ концепцій, особенно концепцію Лагранжа, которая вполнѣ свободна отъ постороннихъ соображеній и потому лучше всего можетъ служить типомъ. Не очевидно-ли изъ самаго опредѣленія *производныхъ функцій*, что онѣ ничѣмъ не отличаются отъ того, что Лейбницъ называлъ *дифференціальными коэффиціентами*, т. е. отъ отношеній дифференціала каждой функціи къ дифференціалу соотвѣтствующей перемѣнной, такъ какъ, опредѣляя первый дифференціалъ, по самой природѣ метода безконечно малыхъ нужно ограничиться первымъ членомъ приращенія функціи, содержащимъ первую степень безконечно малаго приращенія перемѣнной? Такимъ-же образомъ не является-ли производная, тоже по самой своей природѣ, *предѣломъ*, къ которому по необходимости стремится отношеніе между приращеніемъ первоначальной функціи и приращеніемъ ея перемѣнной, по мѣрѣ того какъ эти приращенія неопредѣленно уменьшаются, такъ какъ производная, очевидно, выражаетъ значеніе этого отношенія въ предположеніи, что приращеніе перемѣнной становится равнымъ нулю. Функція, въ методѣ Лейбница обозначаемая черезъ $\frac{dy}{dx}$, которой въ методѣ Ньютона слѣдовало-бы присвоить знакъ $L\frac{\Delta y}{\Delta x}$, и которую, наконецъ, Лагранжъ выражаетъ черезъ $f'(x)$, есть постоянно одна и та-же функція, разсматриваемая съ трехъ различныхъ точекъ зрѣнія, причемъ соображенія Лейбница и Ньютона, собственно говоря, выставляютъ только на видъ два общихъ и необходимыхъ свойства производной функціи. Разсматриваемый абстрактно трансцендентный анализъ въ принципѣ своемъ постоянно остается однимъ и тѣмъ-же, какая бы концепція ни была нами избрана; пріемы исчисленія косвенныхъ функцій по необходимости остаются одинаковыми въ всѣхъ этихъ методахъ, которые поэтому при каждомъ примѣненіи должны приводить къ безусловно согласнымъ между собою результатамъ.

Если теперь мы попытаемся оцѣнить относительное значеніе этихъ трехъ равнозначущихъ идей, то въ каждой изъ нихъ найдемъ свойственныя ей преимущества и недостатки, не позволяющіе до сихъ поръ геометрамъ опредѣленнымъ образомъ принять одну изъ нихъ и разсматривать затѣмъ ее какъ окончательную. Безспорно, идея Лейбница во всѣхъ приложеніяхъ представляетъ ярко выраженное превосходство въ томъ отношеніи, что съ наибольшей быстротой и съ наименьшими усиліями ума приводитъ къ составленію уравненій между вспомогательными количествами; ея именно примѣненію обязаны мы тѣмъ высокимъ совершенствомъ, котораго, наконецъ, достигли всѣ общія теоріи геометріи и механики. Каковы бы ни были теоретическія мнѣнія геометровъ о методѣ безконечно малыхъ, разсматриваемомъ абстрактно, всѣ молчаливо соглашаются, какъ только имъ приходится изслѣдовать новый вопросъ, примѣнять преимущественно методъ Лейбница, чтобы не увеличивать естественныя трудности задачи чисто искусственнымъ препятствіемъ, которое возникало бы вслѣдствіе неумѣстнаго и упорнаго желанія пользоваться менѣе удобнымъ пріемомъ. Самъ Лагранжъ, перестроивъ на новыхъ основахъ весь трансцендентный анализъ, съ полной откровенностью, столь свойственный его генію, засвидѣтельствовалъ ясно и рѣшительно свое уваженіе къ характеристическимъ особенностямъ концепціи Лейбница, примѣняя только послѣднюю во всей системѣ своей *аналитической механики*. Такой фактъ освобождаетъ насъ отъ дальнѣйшаго обсужденія этого предмета.

Если однако разсматривать концепцію Лейбница саму по себѣ и только съ логической точки зрѣнія, то нельзя не согласиться съ Лагранжемъ, что она глубоко неправильна въ основѣ, такъ какъ—говоря словами Лагранжа—самое понятіе о безконечно малыхъ есть *идея лож-*

ная, которую на самомъ дѣлѣ невозможно усвоить ясно, хотя въ этомъ отношеніи и существуютъ нѣкоторыя иллюзіи. Трансцендентный анализъ въ концепціи Лейбница, по моему мнѣнію, представляетъ крупное философское несовершенство, ибо онъ оказывается основаннымъ по существу на тѣхъ самыхъ метафизическихъ принципахъ, отъ которыхъ человѣческій духъ съ такимъ трудомъ освободилъ свои положительныя теоріи. Въ этомъ отношеніи можно сказать, что анализъ безконечно малыхъ носитъ характерный отпечатокъ эпохи своего открытія и генія своего создателя. Можно, конечно, путемъ остроумной теоріи уравновѣшенія ошибокъ объяснить себѣ въ общемъ видѣ, какъ это сдѣлано выше, точность пріемовъ, входящихъ въ составъ метода безконечно малыхъ. Но не является-ли существеннымъ неудобствомъ самая необходимость различать въ математикѣ два класса разсужденій, изъ которыхъ одни совершенно строги, а въ другихъ намѣренно допускаются ошибки, подлежащія исключенію впослѣдствіи? Несомнѣнно, что приводящая къ такимъ страннымъ результатамъ идея должна быть признана мало удовлетворительной.

Сказать, какъ это иногда дѣлалось, что по отношенію къ каждой задачѣ можно методъ безконечно малыхъ въ собственномъ смыслѣ слова привести къ методу предѣловъ, обладающему безукоризненнымъ логическимъ характеромъ, значило-бы обходить затрудненіе, не разрѣшая его. Кромѣ того подобныя преобразованія почти совершенно лишаютъ идею Лейбница тѣхъ существенныхъ преимуществъ легкости и быстроты умственныхъ операцій, которыя такъ высоко ставятъ ее въ ряду другихъ методовъ.

Наконецъ, если даже и не обращать вниманія на указанныя уже выше соображенія, то всетаки очевидно, что методъ безконечно-малыхъ представлялъ-бы по своей природѣ тотъ существенный недостатокъ, что онъ нарушалъ-бы единство абстрактной математики, такъ какъ обосновывалъ-бы трансцендентное исчисленіе на принципахъ, весьма отличныхъ отъ тѣхъ, на которыхъ построенъ обыкновенный анализъ. Это дѣленіе анализа на двѣ совершенно независимыя области препятствуетъ образованію дѣйствительно общихъ аналитическихъ понятій. Чтобы вполнѣ оцѣнить слѣдствія этого обстоятельства, нужно мысленно представить себѣ состояніе, въ которомъ находилась наука, пока Лагранжъ не установилъ общую и окончательную гармонію между этими двумя огромными отраслями анализа.

Переходя къ концепціи Ньютона, мы должны, очевидно, признать, что, по самой своей природѣ, она стоитъ внѣ тѣхъ основныхъ логическихъ возраженій, которыя вызываетъ методъ Лейбница.

Понятіе о *предѣлахъ* дѣйствительно замѣчательно по своей ясности и правильности: въ трансцендентномъ анализѣ, представленномъ такимъ образомъ, уравненія считаются точными съ самаго начала, и общія правила разсужденія соблюдаются постоянно также строго, какъ и въ обыкновенномъ анализѣ. Но, съ другой стороны, этотъ методъ далеко не даетъ такихъ удобствъ при рѣшеніи задачъ, какъ методъ безконечно малыхъ. Налагаемое методомъ Ньютона требованіе не разсматривать самостоятельно и отдѣльно приращенія величинъ или ихъ отношенія, а принимать во вниманіе только предѣлы этихъ отношеній значительно замедляетъ ходъ мышленія при составленіи вспомогательныхъ уравненій. Можно даже сказать, что это требованіе сильно затрудняетъ чисто аналитическія преобразованія уравненій. Поэтому трансцендентное исчисленіе, разсматриваемое отдѣльно отъ его приложеніи, при этомъ методѣ далеко не обладаетъ той широтой и общностью, которую ему даетъ концепція Лейбница. Такъ, напримѣръ, только съ большимъ трудомъ удается распространить теорію Ньютона на функціи съ нѣсколькими независимыми перемѣнными. Какъ-бы то ни было, но сравнительно меньшая пригодность этой теоріи замѣтна особенно въ ея примѣненіяхъ.

Я не могу не замѣтить здѣсь, что многіе геометры на континентѣ, принимая методъ Ньютона, какъ болѣе раціональный, за основу трансцендентнаго анализа, скрыли отчасти неудобства этого метода съ помощью глубокой непослѣдовательности, примѣнивъ къ этому методу обозначенія, предложенныя Лейбницемъ для метода безконечно-малыхъ и свойственныя собственно только его методу. Обозначая черезъ $\frac{dy}{dx}$ величину, которую въ теоріи предѣловъ слѣдовало-бы, собственно говоря, обозначать черезъ $L\,\frac{\Delta y}{\Delta x}$, и распространяя на всѣ другія аналитическія понятія такое же перемѣщеніе знаковъ, геометры, конечно, задавались цѣлью соединить особыя преимущества обоихъ методовъ, но въ дѣйствительности достигли только неправильнаго смѣшенія, привычка къ которому не даетъ возможности создать себѣ ясное и точное представленіе о томъ или другомъ методѣ. При разсмотрѣніи этого пріема самого по себѣ не можетъ не показаться страннымъ, что геометры пытались установить дѣйствительное соединеніе двухъ столь различныхъ общихъ теорій путемъ однихъ обозначеній.

Наконецъ, методъ предѣловъ представляетъ, хотя и въ меньшей степени, серьезное неудобство, указанное мною выше при обзорѣ метода безконечно малыхъ, и состоящее въ томъ, что и имъ создается полное раздѣленіе между обыкновеннымъ и трансцендентнымъ анализомъ, такъ какъ понятіе о предѣлахъ, несмотря на всю его ясность и точность, тѣмъ не менѣе само по себѣ, какъ это замѣтилъ Лагранжъ, является идей совершенно посторонней, отъ которой аналитическія теоріи не должны были-бы зависѣть.

Совершенное единство анализа и чисто абстрактный характеръ его основныхъ понятій находитъ себѣ высшее выраженіе въ концепціи Лагранжа и только въ ней: по этой причинѣ она и является наиболѣе раціональной и наиболѣе философской изъ всѣхъ трехъ концепцій. Тщательно отбрасывая всякія постороннія соображенія, Лагранжъ придалъ трансцендентному анализу истинный свойственный ему характеръ, представивъ его какъ обширный классъ аналитическихъ преобразованій, при помощи которыхъ замѣчательно облегчается выраженіе условій различныхъ задачъ. Въ тоже время этотъ анализъ является простымъ расширеніемъ обыкновеннаго и сдѣлался только высшей алгеброй. Съ этого момента обѣ различныя, до тѣхъ поръ столь далекія одна отъ другой части абстрактной математики могутъ считаться составляющими одну систему.

Къ сожалѣнію, идея Лагранжа, обладающая, независимо отъ простоты и ясности входящихъ въ ея составъ понятій, столь важными свойствами и которая, благодаря ея высокому философскому превосходству надъ всѣми другими предложенными методами, безъ сомнѣнія, должнабы сдѣлаться окончательной теоріей трансцендентнаго анализа, въ современномъ своемъ состояніи представляетъ въ приложеніяхъ, по сравненію съ концепціей Ньютона и въ особенности Лейбница, слишкомъ много трудностей, и поэтому еще не можетъ быть принята окончательно Самому Лагранжу съ помощью своего метода только съ величайшемъ трудомъ удалось получить главныя результаты, уже найденные при рѣшеніи общихъ геометрическихъ и механическихъ задачъ по методу безконечно малыхъ: отсюда можно составить себѣ понятіе, съ какими трудностями придется бороться при изслѣдованіи съ помощью того-же метода дѣйствительно новыхъ и важныхъ вопросовъ. Правда, Лагранжъ во многихъ случаяхъ показалъ, что трудности, даже искусственныя, побуждаютъ людей геніальныхъ къ чрезвычайнымъ усиліямъ, которые могутъ привести къ болѣе широкимъ результатамъ. Такимъ именно образомъ Лагранжъ, пытаясь примѣнить свой методъ къ изученію кривизны линій, такъ мало поддававшейся, повидимому, приложенію этого метода, создалъ прекрасную теорію соприкасанія и тѣмъ усовершенствовалъ эту важную часть геометріи. Несмотря, однако, на такое счастливое исключеніе, методъ Лагранжа тѣмъ не менѣе до сихъ поръ остался, во всей совокупности своей, совершенно непригоднымъ для приложеній.

Окончательнымъ результатомъ общаго сравненія, только что набросаннаго мною и требующаго болѣе широкаго развитія, является указанный мною въ самомъ началѣ этой лекціи выводъ, что для дѣйствительнаго усвоенія трансцедентнаго анализа нужно не только разсмотрѣть его принципы съ точки зрѣнія трехъ различныхъ по своимъ основаніямъ концепцій, созданныхъ Лейбницомъ, Ньютономъ и Лагранжемъ, но, кромѣ того, необходимо привыкнуть рѣшать наиболѣе важные вопросы какъ исчисленія косвенныхъ функцій, такъ и его приложеній, при помощи всѣхъ трехъ методовъ и въ особенности при помощи перваго и послѣдняго. Я горячо рекомендовалъ-бы такой путь всѣмъ, кто пожелаетъ разсмотрѣть философски это удивительное созданіе человѣческаго духа, равно какъ и тѣмъ, кто пожелалъ-бы научиться легко и успѣшно пользоваться этимъ могущественнымъ орудіемъ. Во всѣхъ другихъ частяхъ математики изслѣдованіе различныхъ методовъ рѣшенія одного и того-же класса задачъ можетъ быть полезно, даже независимо отъ историческаго интереса, которое эти методы представляютъ, но тамъ оно не является необходимымъ; здѣсь же оно безусловно неизбѣжно.

Установивъ въ этой лекціи со всей точностью философскій характеръ исчисленія косвенныхъ функцій, на основаніи главныхъ концепцій, на которыхъ возможно построеніе его, я долженъ теперь разсмотрѣть въ слѣдующей лекціи раціональное дѣленіе и общій составъ этого исчисленія.

Седьмая лекція.

Общій обзоръ исчисленія косвенныхъ функцій.

Изъ изложенныхъ въ прошлой лекціи соображеній видно, что исчисленіе косвенныхъ функцій по необходимости дѣлится на двѣ части, или правильнѣе говоря, распадается на два совершенно различныхъ, но тѣсно связанныхъ по своей природѣ исчисленія; въ первомъ изъ нихъ требуется, исходя изъ существующихъ между соотвѣтственными основными величинами отношеній, найти отношенія между вспомогательными величинами, введеніе которыхъ представляетъ общую основную черту исчисленія косвенныхъ функцій,—во второмъ-же, наоборотъ, требуется открыть прямыя уравненія на основаніи непосредственно установленныхъ косвенныхъ. Такова въ дѣйствительности двойная цѣль, постоянно преслѣдуемая трансцендентнымъ анализомъ.

Два указанныя исчисленія получили различныя названія, въ зависимости отъ точки зрѣнія, съ которой разсматривалась вся совокупность этого анализа. Такъ какъ до сихъ поръ по изложеннымъ выше причинамъ наиболѣе употребителенъ методъ безконечно малыхъ въ собственномъ смыслѣ этого слова, то на континентѣ почти всѣ геометры для обозначенія этихъ двухъ родовъ исчисленія пользуются названіями *дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія*, предложенными Лейбницемъ и вытекающими совершенно раціонально изъ самой идеи его. Ньютонъ, слѣдуя своему методу, назвалъ первое—*исчисленіемъ флюксій*, а второе *исчисленіемъ флюэнтъ*, выраженія, принятыя вообще въ Англіи. Наконецъ, исходя изъ глубоко философской теоріи Лагранжа, можно ихъ называть первое—*исчисленіемъ производныхъ функцій*, а второе—*исчисленіемъ первообразныхъ функцій*. Я буду пользоваться терминами Лейбница, какъ наиболѣе удобными во французскомъ языкѣ для составленія различныхъ вспомогательныхъ выраженій, хотя, на основаніи приведенныхъ въ предыдущей лекціи объясненій, я буду вынужденъ одновременно обращаться къ различнымъ концепціямъ, слѣдуя на сколько возможно Лагранжу.

Очевидно, что дифференціальное исчисленіе есть раціональное основаніе интегральнаго, такъ какъ мы умѣемъ и можемъ непосредственно интегрировать только дифференціальныя выраженія, полученныя дифференцированіемъ простыхъ функцій, составляющихъ общіе элементы нашего анализа.

Искусство интегрированія состоитъ засимъ по существу въ приведеніи, насколько это возможно, всѣхъ остальныхъ случаевъ въ зависимость только отъ указаннаго небольшого числа основныхъ интегрированій.

Разсматривая всю совокупность трансцендентнаго анализа, какъ я его охарактеризировалъ въ прошлой лекціи, мы сначала можемъ и не видѣть, въ чемъ заключается собственно польза дифференціальнаго исчисленія, независимо отъ его отношенія къ интегральному, и намъ кажется, что послѣднее является единственнымъ прямо необходимымъ исчисленіемъ. Дѣйствительно, исключеніе безконечно малыхъ или производныхъ, введенныхъ въ качествѣ вспомогательныхъ величинъ для облегченія составленія уравненій, является, какъ мы видѣли, окончательной и неизмѣнной цѣлью исчисленія косвенныхъ функцій; поэтому естественно думать, что исчисленіе, которое учитъ насъ изъ уравненій между этими вспомогательными величинами выводить уравненія между основными, должно совершенно удовлетворять общимъ потребностямъ трансцендентнаго анализа, и на первый взглядъ незамѣтно, какое особенное и постоянное мѣсто можетъ занять въ такомъ анализѣ рѣшеніе обратной задачи. Было-бы совершенно неправильно объяснять, согласно принятому обычаю, прямое и необходимое назначеніе самаго дифференціальнаго исчисленія, указывая, что оно должно составлять дифференціальныя уравненія, отъ которыхъ интегральное исчисленіе переходитъ затѣмъ къ конечнымъ уравненіямъ, такъ какъ первоначальное составленіе дифференціальныхъ уравненій, собственно говоря, не служитъ и не можетъ служить цѣлью какого-бы то ни было исчисленія, а на оборотъ по самой своей природѣ является необходимой исходной точкой всякаго исчисленія. Какимъ образомъ, въ частности, дифференціальное исчисленіе, которое само по себѣ приводится къ указанію способовъ *дифференцированія* различныхъ уравненій, можетъ давать общій пріемъ для составленія этихъ уравненій? Во всѣхъ приложеніяхъ трансцендентнаго анализа составленіе уравненій облегчается *методомъ* безконечно малыхъ, а не *исчисленіемъ* безконечно малыхъ, совершенно отличнымъ отъ него, хотя и представляющимъ весьма важное его дополненіе. Указанное выше опредѣленіе давало-бы совершенно ложное понятіе объ особомъ назначеніи дифференціальнаго исчисленія, устанавливающемъ его мѣсто въ общей системѣ трансцендентнаго анализа.

Такимъ образомъ видѣть въ дифференціальномъ исчисленіи только простой предварительный пріемъ, не имѣющій никакой другой общей и существенной цѣли, кромѣ подготовленія необходимаго основанія для интегральнаго исчисленія, значило-бы весьма несовершеннымъ образомъ понимать истинную важность этой первой отрасли исчисленія косвенныхъ функцій. Такъ какъ, обыкновенно, по этому предмету понятія носятъ весьма туманный характеръ, то я считаю нужнымъ бѣгло указать здѣсь на важное соотношеніе частей анализа такъ, какъ я его понимаю, и выяснить, что при всякомъ примѣненіи трансцендентнаго анализа первая прямая и необходимая часть постоянно принадлежитъ дифференціальному исчисленію.

При составленіи дифференціальныхъ уравненія какого-нибудь явленія мы очень рѣдко ограничиваемся введеніемъ дифференціаловъ только тѣхъ величинъ, отношенія которыхъ мы ищемъ. Ставить себѣ такое условіе значило-бы безполезно ограничивать способы, предоставляемые намъ трансцедентнымъ анализомъ для выраженія математическихъ законовъ явленій. Чаще всего въ эти первоначальныя уравненія вводятся дифференціалы другихъ величинъ, отношенія которыхъ извѣстны или предполагаются извѣстными, и безъ разсмотрѣнія которыхъ иногда было-бы невозможно даже установить требуемыя уравненія. Такъ, напримѣръ, въ общей задачѣ о выпрямленіи кривыхъ, дифференціальное уравненіе

$$ds^2 = dy^2 + dx^2 \text{ или } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

устанавливается не только между искомой функціей s и независимой перемѣнной x, отношеніе къ которой требуется найти, но сюда въ тоже время, какъ необходимыя промежуточныя величины, введены еще и дифференціалы одной или двухъ функцій y и z, число коихъ равно числу данныхъ задачи; составить непосредственно уравненіе между ds dx было-бы невозможно, и притомъ оно относилось-бы только къ каждой отдѣльной изъ разсматриваемыхъ кривыхъ. Тоже самое можно сказать о большинствѣ задачъ. Но въ данномъ случаѣ видно, что дифференціальное уравненіе не можетъ быть интегрировано непосредственно. Прежде всего нужно, чтобы дифференціалы функцій, которыя предполагаются извѣстными и введены только въ качествѣ промежуточныхъ, были совершенно исключены и уравненія заключали-бы въ себѣ только дифференціалы одпихъ искомыхъ функцій и дѣйствительно независимыхъ перемѣнныхъ, послѣ чего рѣшеніе задачъ войдетъ на самомъ дѣлѣ въ область интегральнаго исчисленія. Такое подготовительное исключеніе различныхъ дифференціаловъ, имѣющее цѣлью уменьшить по возможности число безконечно малыхъ, составляетъ предметъ одного дифференціальнаго исчисленія, такъ какъ, очевидно, это исключеніе можетъ быть произведено съ помощью опредѣленія, на основаніи уравненіи между извѣстными по предположенію и взятыми въ качествѣ вспомогательныхъ функціями, отношеній ихъ дифференціаловъ другъ къ другу, а такое опредѣленіе представляетъ простой вопросъ дифференцированія. Такъ, напримѣръ, въ случаѣ выпрямленія дуги, нужно прежде всего вычислить dy или dy и dz, дифференцируя уравненіе или уравненія каждой данной кривой; на основаніи этихъ выраженій указанная выше общая дифференціальная формула будетъ заключать въ себѣ только ds и dx; послѣ такого преобразованія исключеніе безконечно малыхъ можетъ быть произведено съ помощью одного интегральнаго исчисленія.

Такимъ образомъ общее и необходимое назначеніе дифференціальнаго исчисленія при рѣшеніи разныхъ вопросовъ, требующихъ примѣненія трансцендентнаго анализа, представляется въ слѣдующемъ видѣ: подготовить, на сколько возможно, исключеніе безконечно малыхъ, т. е. во всякомъ частномъ случаѣ преобразовать первоначальныя дифференціальныя уравненія такъ, чтобы они заключали въ себѣ дифференціалы только дѣйствительно независимыхъ перемѣнныхъ и искомыхъ функцій; для этого нужно исключить, съ помощью дифференцированія, дифференціалы всѣхъ другихъ извѣстныхъ функцій, которыя могли быть введены какъ промежуточныя величины при составленіи дифференціальныхъ уравненій задачи.

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ, хотя и немногочисленныхъ, но, какъ мы увидимъ позже, очень важныхъ, искомыя величины входятъ въ первоначальныя дифференціальныя уравненія прямо, а не въ видѣ дифференціаловъ; эти уравненія заключаютъ въ такихъ случаяхъ только дифференціалы различныхъ извѣстныхъ функцій, играющихъ, на основаніи предыдущаго объясненія, роль промежуточныхъ величинъ. Это конечно самые благопріятные случаи, такъ какъ, очевидно, совершенно достаточно одного дифференціальнаго исчисленія для полнаго исключенія безконечно малыхъ, и для рѣшенія задачи нѣтъ надобности въ интегрированіи. Такіе случаи представляетъ, напримѣръ, задача о касательныхъ въ геометріи, задача о скоростяхъ въ механикѣ и т. д.

Наконецъ, нѣсколько другихъ задачъ, также очень малочисленныхъ и тѣмъ не менѣе весьма важныхъ, представляютъ второе исключеніе, по природѣ своей совершенно противоположное первому; это именно задачи, въ которыхъ дифференціальныя уравненія могутъ быть непосредственно интегрированы, такъ какъ съ самого начала они содержали только безконечно малыя, относящіяся къ искомымъ функціямъ или къ дѣйствительно независимымъ перемѣннымъ, и потому не было никакой надобности вводить какія-бы то ни было промежуточныя функціи. Если даже въ этомъ случаѣ и вводятся такія функціи—по предположенію прямо, а не въ видѣ дифференціаловъ—то съ помощью обыкновенной алгебры можно будетъ удалить ихъ и привести задачу къ виду, допускающему непосредственное примѣненіе интегральнаго исчисленія. Дифференціальное исчисленіе не играетъ тогда никакой особой роли въ рѣшеніи этихъ задачъ, цѣликомъ принадлежащихъ къ области интегральнаго исчисленія. Общая задача квадратуръ представляетъ въ этомъ отношеніи интересный примѣръ, такъ какъ соотвѣтствующее дифференціальное уравненіе

$$dA = ydx$$

будетъ подлежать непосредственному интегрированію, какъ только на основаніи уравненія данной кривой будетъ исключена промежуточная функція y, дифференціалы которой совершенно не входятъ въ задачу.

Тоже обстоятельство имѣетъ мѣсто въ отношеніи къ задачѣ о вычисленіи объемовъ и еще въ нѣсколькихъ другихъ, весьма существенныхъ случаяхъ.

На основаніи всѣхъ предъидущихъ соображеній математическія задачи, требующія примѣненія трансцендентнаго анализа, слѣдуетъ вообще раздѣлить на три класса: первый классъ долженъ заключать въ себѣ задачи, которыя могутъ быть вполнѣ рѣшены на основаніи одного дифференціальнаго исчисленія безъ всякой помощи интегральнаго; второй, наоборотъ, задачи, вполнѣ принадлежащія къ области интегральнаго исчисленія, такъ что дифференціальное исчисленіе не принимаетъ никакого участія въ рѣшеніи ихъ; наконецъ, въ третьемъ и самомъ обширномъ классѣ, представляющемъ нормальный случай, тогда какъ первые два являются только исключеніями, оба исчисленія послѣдовательно принимаютъ опредѣленное и необходимое участіе въ полномъ рѣшеніи задачъ, причемъ дифференціальное исчисленіе вводитъ въ первоначальныя дифференціальныя уравненія измѣненія, необходимыя для примѣненія къ нимъ интегральнаго исчисленія. Въ такомъ опредѣленномъ видѣ представляются общія отношенія этихъ двухъ исчисленій, понимаемыя обыкновенно недостаточно точно.

Бросимъ теперь общій взглядъ на раціональный составъ каждаго изъ указанныхъ исчисленій, начиная, какъ очевидно и слѣдуетъ дѣлать, съ дифференціальнаго исчисленія.

При изложеніи трансцендентнаго анализа обыкновенно принято къ чисто аналитической части, состоящей изъ абстрактнаго ученія о дифференцированіи и интегрированіи, присоединять изученіе главныхъ ея приложеній, особенно относящихся къ геометріи. Такое смѣшеніе идей является слѣдствіемъ дѣйствительнаго хода развитія науки и представляетъ въ догматическомъ отношеніи важныя неудобства потому, что препятствуетъ правильному пониманію анализа и геометріи. Такъ какъ здѣсь мнѣ нужно разсмотрѣть наиболѣе раціональную координацію наукъ, то въ нижеслѣдующемъ очеркѣ я буду касаться только исчисленія косвенныхъ функцій въ собственномъ смыслѣ этого слова, оставляя общій разборъ обширныхъ геометрическихъ и механическихъ приложеній до той части этого тома, которая посвящена философскому изученію конкретной математики *).

Главное дѣленіе собственно дифференціальнаго исчисленія, т. е. общаго ученія о дифференцированіи, основано на различіи между двумя случаями, а именно случаемъ, когда дифференцированію подлежатъ явныя аналитическія функціи и случаемъ, когда эти функціи неявны; происходящія отсюда двѣ части исчисленія обыкновенно обозначаются названіями дифференцированія *формулъ* и дифференцированія *уравненій*. Легко понять à priori важность этой классификаціи. Дѣйствительно, такое дѣленіе было бы совершенно безцѣльнымъ, если-бы обыкновенный анализъ былъ совершеннымъ, т. е. если-бы мы умѣли алгебраически рѣшать всѣ уравненія, такъ какъ тогда каждую *неявную* функцію можно было-бы сдѣлать *явной*; дифференцируя всѣ функціи только въ ихъ явной формѣ, мы вторую часть дифференціальнаго исчисленія привели бы непосредственно къ первой безъ всякаго особаго затрудненія. Но, какъ мы видѣли, алгебраическое рѣшеніе уравненій до сихъ поръ еще находится почти въ періодѣ дѣтства, а для большинства случаевъ совершенно неизвѣстно; поэтому вполнѣ понятно, что вопросъ стоитъ совершенно иначе и приходится, собственно говоря, дифференцировать функцію, не зная ея, хотя она и опредѣлена. Дифференцированіе неявныхъ функцій по самой своей природѣ оказывается, слѣдовательно, задачей вполнѣ отличной отъ той, которую представляютъ явныя функціи, и, конечно, гораздо болѣе сложной. Очевидно, вмѣстѣ съ тѣмъ, что слѣдуетъ начинать съ дифференцированія формулъ, чтобы затѣмъ при помощи нѣкоторыхъ неизмѣнныхъ аналитическихъ соображеній, на которыхъ здѣсь мнѣ не нужно останавливаться, привести къ этому первому случаю и дифференцированіе уравненій.

Указанные два общіе случая дифференцированія отличаются другъ отъ друга еще въ одномъ отношеніи, равно необходимомъ и слишкомъ важномъ, чтобы не указать здѣсь на него. Зависимость между дифференціалами, по сравненію съ зависимостью между конечными величинами, является постоянно болѣе косвенною при дифференцированіи неявныхъ функцій, чѣмъ при дифференцированіи явныхъ. Дѣйствительно, изъ соображеній, представленныхъ Лагранжемъ относительно составленія дифференціальныхъ уравненій, извѣстно, съ одной стороны, что одно и то же первоначальное уравненіе, смотря потому, какія постоян-

*) Я давно уже установилъ въ обыкновенномъ преподаваніи моемъ трансцендентнаго анализа указанный мною здѣсь порядокъ. Г. Матьё, новый профессоръ трансцендентнаго анализа въ Политехнической Школѣ, съ которымъ я имѣлъ удовольствіе встрѣчаться, принялъ въ этомъ году въ своемъ курсѣ подобный-же по существу порядокъ изложенія.

ныя величины исключаются, можетъ дать мѣсто большему или меньшему числу различныхъ по формѣ, хотя въ дѣйствительности и равнозначущихъ, производныхъ уравненій; это обстоятельство не имѣетъ мѣста при дифференцированіи явныхъ формулъ. Съ другой стороны, безконечная система первоначальныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ одному и тому же производному уравненію, представляетъ гораздо большее аналитическое разнообразіе, чѣмъ функціи, соотвѣтствующія одному и тому-же явному дифференціалу и отличающіяся другъ отъ друга только постояннымъ членомъ. Поэтому можно сказать, что неявныя функціи дѣйствительно болѣе измѣняются при дифференцированіи, чѣмъ явныя функціи. Это соображеніе мы скоро снова встрѣтимъ при разсмотрѣніи интегральнаго исчисленія, въ которомъ оно является особенно важнымъ.

Каждая изъ указанныхъ двухъ основныхъ частей дифференціальнаго исчисленія въ свою очередь дѣлится на двѣ совершенно различныя теоріи, смотря потому, предстоитъ ли дифференцировать функціи съ одной или съ нѣсколькими независимыми перемѣнными. Второй случай, по своей природѣ, совершенно отличенъ отъ перваго и очевидно болѣе сложенъ, если даже разсматривать только явныя функціи, не говоря уже о неявныхъ. Впрочемъ второй случай приводится вообще къ первому съ помощью одного весьма простого и неизмѣннаго принципа, состоящаго въ томъ, что полный дифференціалъ функціи, соотвѣтствующій одновременному приращенію различныхъ независимыхъ перемѣнныхъ, заключающихся въ ней, разсматривается какъ сумма частныхъ дифференціаловъ, которые получились-бы при послѣдовательномъ приращеніи каждой перемѣнной отдѣльно, если бы всѣ другія перемѣнныя оставались постоянными. Кромѣ того, здѣсь надо со вниманіемъ отмѣтить новое понятіе, вводимое въ систему трансцендентнаго анализа вслѣдствіе различія между функціями съ одной и многими перемѣнными, а именно понятіе о частныхъ производныхъ функціи по отношенію къ каждой отдѣльной перемѣнной; число производныхъ возрастаетъ по мѣрѣ увеличенія порядка ихъ и числа перемѣнныхъ. Изъ этого слѣдуетъ, что дифференціальныя отношенія функцій съ нѣсколькими перемѣнными по самой своей природѣ и болѣе косвенны и, въ особенности, гораздо менѣе опредѣленны, чѣмъ отношенія функцій съ одной перемѣнной. Это обстоятельство особенно замѣтно относительно неявныхъ функцій, гдѣ вмѣсто произвольныхъ постоянныхъ, исключаемыхъ при составленіи дифференціальныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ функціямъ съ одной перемѣнной, исключаются произвольныя функціи данныхъ перемѣнныхъ; отсюда при интегрированіи проистекаютъ особыя затрудненія.

Наконецъ, чтобы дополнить этотъ общій обзоръ главныхъ существенныхъ частей дифференціальнаго исчисленія въ собственномъ смыслѣ этого слова, я долженъ добавить, что при дифференцированіи неявныхъ функцій съ одной или нѣсколькими перемѣнными нужно еще отличать случаи, когда требуется сразу дифференцировать различныя функціи этого рода, входящія одновременно въ извѣстныя первоначальныя уравненія, отъ случаевъ, когда всѣ эти функціи отдѣлены одна отъ другой.

Дѣйствительно, въ первомъ случаѣ функціи очевидно будутъ еще болѣе неявны, чѣмъ во второмъ, если мы примемъ во вниманіе, что несовершенство обыкновеннаго анализа, препятствующее обращенію всякой неявной функціи въ соотвѣтствующую ей явную, не позволяетъ также и отдѣлить функціи, входящія одновременно въ какую нибудь систему уравненій. Въ этомъ случаѣ приходится дифференцировать, не только не умѣя рѣшать первоначальныя уравненія, но даже и не имѣя возможности произвести въ нихъ необходимыя исключенія, что и вызываетъ новыя трудности.

Такова естественная связь и раціональное распредѣленіе главныхъ теорій, входящихъ въ составъ общаго ученія о дифференцированіи. Изъ этого видно, что такъ какъ дифференцированіе неявныхъ функцій вытекаетъ изъ дифференцированія явныхъ съ помощью одного постояннаго принципа, и такъ какъ другой опредѣленный принципъ приводитъ дифференцированіе функцій съ нѣсколькими перемѣнными къ дифференцированію функцій съ одной перемѣнной, то, въ концѣ концовъ, все дифференціальное исчисленіе основано на дифференцированіи явныхъ функцій съ одной перемѣнной, единственномъ дифференцированіи, непосредственно выполнимомъ. Легко понять, что эта первоначальная теорія, необходимое основаніе всей системы, состоитъ только въ дифференцированіи десяти простыхъ функцій, представляющихъ общіе элементы всѣхъ нашихъ аналитическихъ комбинацій и заключающихся въ помѣщенной въ четвертой лекціи (стр. 70) таблицѣ, ибо очевидно, что дифференцированіе сложныхъ функцій непосредственно и необходимымъ образомъ вытекаетъ изъ дифференцированія составляющихъ ихъ простыхъ функцій. Итакъ, все ученіе о дифференцированіи, собственно говоря, состоитъ въ установленіи этихъ первыхъ основныхъ дифференціаловъ и двухъ выше упомянутыхъ принциповъ, съ помощью которыхъ всѣ возможные случаи приводятся къ простѣйшимъ. Изъ сопоставленія этихъ различныхъ соображеній видно, какъ проста и вмѣстѣ съ тѣмъ совершенна система собственно дифференціальнаго исчисленія, представляющаго несомнѣнно самое интересное съ логической точки зрѣнія явленіе, какое только можетъ дать нашему уму математическій анализъ.

Общая картина, которую я только что набросалъ, заключала-бы тѣмъ не менѣе весьма существенный пропускъ, если-бы не указать здѣсь отдѣльно еще на одну теорію, по своей природѣ составляющую необходимое дополненіе ученія о дифференцированіи, а именно на теорію, которая постоянною своей цѣлью имѣетъ преобразованіе производныхъ, соотвѣтствующее замѣнѣ однихъ независимыхъ перемѣнныхъ другими: эта теорія даетъ возможность относить къ новымъ перемѣннымъ всѣ общія дифференціальныя формулы, установленныя сперва для другихъ перемѣнныхъ. Указанный вопросъ, какъ и всѣ, составляющіе дифференціальное исчисленіе, разрѣшенъ теперь самымъ полнымъ и простымъ образомъ. Не трудно понять общее значеніе, которое указанная теорія должна имѣть при различныхъ примѣненіяхъ трансцендентнаго анализа; на нее надо смотрѣть, какъ на новое и важное орудіе этого анализа, такъ какъ она позволяетъ для облегченія составленія дифференціальныхъ уравненій выбирать систему независимыхъ перемѣнныхъ, кажущуюся наиболѣе удобною, хотя-бы позже ее нужно было отбросить. Такъ, напримѣръ, большинство главныхъ геометрическихъ задачъ рѣшается гораздо легче, если линіи и поверхности отнесены къ прямолинейнымъ координатамъ, а указанная теорія даетъ возможность примѣнять рѣшеніе этихъ задачъ къ формамъ, выраженнымъ аналитически при помощи *полярныхъ* координатъ или какимъ нибудь другимъ образомъ: можно поэтому начинать дифференціальное рѣшеніе задачи, пользуясь постоянно прямолинейной системой координатъ, однако, только какъ вспомогательной; отъ нея, на основаніи указанной нами выше теоріи, мы перейдемъ къ окончательной системѣ, которую иногда невозможно разсматривать прямо.

Вполнѣ естественно, если будетъ сдѣлана попытка указать на весьма важный пропускъ въ раціональной классификаціи всей совокупности дифференціальнаго исчисленія, только что изложенной мною, такъ какъ я не подраздѣлилъ каждую изъ четырехъ главныхъ частей на основаніи другого общаго соображенія, которое можетъ показаться сначала весьма серьезнымъ, а именно на основаніи порядка дифференцированія. Легко однако понять, что такое различіе не имѣютъ никакого дѣйствительнаго значенія въ дифференціальномъ исчисленіи, такъ какъ оно не создаетъ никакихъ новыхъ трудностей. Въ самомъ дѣлѣ, если-бы дифференціальное исчисленіе не было вполнѣ закончено, т. е. если-бы мы не умѣли дифференцировать безусловно всякую функцію, то дифференцированіе второго или вообще высшаго порядка каждой опредѣленной функціи могло бы вызвать особыя затрудненія; но полная универсальность дифференціальнаго исчисленія, очевидно, даетъ намъ увѣренность въ возможности составить дифференціалы любого порядка всѣхъ извѣстныхъ аналитическихъ функцій, такъ какъ задача приводится вполнѣ къ дифференцированію перваго порядка, повторенному послѣдовательно нѣсколько разъ. Такимъ образомъ разсмотрѣніе различныхъ порядковъ дифференціаловъ можетъ, конечно, привести насъ къ болѣе или менѣе важнымъ замѣчаніямъ, въ особенности относительно образованія дифференціальныхъ уравненій и послѣдовательныхъ частныхъ производныхъ функцій со многими перемѣнными, но, очевидно, не создастъ новой общей задачи въ ученіи о дифференцированіи. Мы сейчасъ-же увидимъ, что это различіе, неиграющее, такъ сказать, никакой роли въ дифференціальномъ исчисленіи, наоборотъ, пріобрѣтаетъ весьма важное значеніе въ интегральномъ исчисленіи, благодаря крайнему несовершенству послѣдняго.

Наконецъ, хотя я вообще нахожу, что здѣсь я совсѣмъ не долженъ бы разсматривать главныхъ приложеній дифференціальнаго исчисленія, тѣмъ не менѣе слѣдуетъ сдѣлать исключеніе относительно рѣшенія чисто аналитическихъ вопросовъ, такъ эти приложенія вполнѣ раціонально можно помѣстить сейчасъ за самымъ ученіемъ о дифференцированіи въ собственномъ смыслѣ слова вслѣдствіе очевидной однородности лежащихъ въ ихъ основѣ соображеній. Эти вопросы можно привести къ тремъ главнымъ группамъ: 1) разложеніе въ ряды функцій съ одной или нѣсколькими перемѣнными или, въ болѣе общемъ видѣ, преобразованіе функцій, представляющее самое лучшее и самое важное приложеніе дифференціальнаго исчисленія къ общему анализу и заключающее въ себѣ, кромѣ основнаго ряда, открытаго Тэйлоромъ, еще и весьма замѣчательные ряды, найденные Маклореномъ, Иваномъ Бернулли, Лагранжемъ и другими; 2) общая теорія значеніи maxima и minima функцій съ одной или нѣсколькими перемѣнными, которая представляетъ одну изъ самыхъ интересныхъ задачъ анализа,—хотя теперь она сдѣлалась совершенно элементарной—и къ рѣшенію которой дифференціальное исчисленіе прилагается совершенно естественнымъ образомъ; 3) наконецъ, общее опредѣленіе истиннаго значенія функцій, представляющихся въ неопредѣленномъ видѣ при нѣкоторыхъ частныхъ предположеніяхъ относительно значеній соотвѣтствующихъ перемѣнныхъ; этотъ вопросъ является наименѣе обширнымъ и наименѣе важнымъ изъ всѣхъ трехъ, но все-таки заслуживаетъ быть отмѣченнымъ здѣсь.

Безъ сомнѣнія первый вопросъ слѣдуетъ признать самымъ важнымъ во всѣхъ отношеніяхъ; вмѣстѣ съ тѣмъ впослѣдствіи онъ можетъ пріобрѣсти дальнѣйшее распространеніе, въ особенности, если дать дифференціальному исчисленію болѣе широкое примѣненіе при преобразованіи функцій, чѣмъ это дѣлалось до сихъ поръ,—предметъ, по которому Лагранжъ оставилъ нѣсколько драгоцѣнныхъ указаній, до нынѣ еще не обобщенныхъ и не принятыхъ во вниманіе.

Мнѣ очень жаль, что размѣры этого труда заставляютъ меня ограничиться столь краткими и недостаточными указаніями на различные предметы, только что упомянутые, природа которыхъ допускаетъ болѣе широкое развитіе, невыходящее притомъ изъ предѣловъ общности идей, соотвѣтствующей нашему курсу. Теперь я перехожу къ такому же бѣглому обзору общей системы интегральнаго исчисленія въ собственномъ смыслѣ этого слова, т. е. абстрактнаго ученія объ интегрированіи.

Основное дѣленіе интегральнаго исчисленія основано на томъ же принципѣ, какъ и выше указанное дѣленіе дифференціальнаго, т. е. на различіи интегрированія явныхъ дифференціальныхъ формулъ и дифференціальныхъ уравненій. Такое отдѣленіе этихъ двухъ случаевъ имѣетъ по отношенію къ интегрированію еще болѣе глубокое значеніе, чѣмъ по отношенію къ дифференцированію. Дѣйствительно, въ дифференціальномъ исчисленіи это дѣленіе основывается, какъ мы видѣли, только на крайнемъ несовершенствѣ обыкновеннаго анализа. Наоборотъ, легко видѣть, что если бы даже всѣ уравненія могли быть рѣшены алгебраически, дифференціальныя уравненія тѣмъ не менѣе представляли бы случай интегрированія, совершенно отличный отъ интегрированія явныхъ дифференціальныхъ формулъ. Напримѣръ, если для большей простоты ограничиться дифференціалами перваго порядка и одной функціей y перемѣнной x и предположить, что какое нибудь дифференціальное уравненіе между x, y, и $\frac{dy}{dx}$ рѣшено относительно $\frac{dy}{dx}$, то задача интегрированія по природѣ своей останется безъ измѣненія, такъ какъ выраженіе производной будетъ обыкновенно содержать въ себѣ ту самую первообразную функцію, которую мы ищемъ, и рѣшеніе подвинется въ дѣйствительности только въ томъ отношеніи, что данное дифференціальное уравненіе будетъ преобразовано въ уравненіе первой степени по отношенію къ производной, что само по себѣ имѣетъ мало значенія. Зависимость дифференціала по отношенію къ интегрированію останется почти столь-же *неявной*, какъ и прежде, и будетъ предоставлять тѣ-же самыя характеристическія трудности. Алгебраическое рѣшеніе уравненій можетъ привести разсматриваемый нами случай къ простому интегрированію явныхъ дифференціаловъ только въ томъ весьма частномъ случаѣ, когда данное дифференціальное уравненіе не будетъ заключать въ себѣ самой первообразной функціи; это обстоятельство дастъ, конечно, возможность при рѣшеніи уравненія выразить $\frac{dy}{dx}$ въ функціи одного x и такимъ образомъ привести всю задачу къ квадратурамъ.

Только что указанное мною по отношенію къ самымъ простымъ дифференціальнымъ уравненіямъ соображеніе будетъ, очевидно, имѣть еще большее значеніе для уравненій высшихъ порядковъ или уравненій, одновременно содержащихъ различныя функціи нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Такимъ образомъ интегрированіе дифференціаловъ, опредѣленныхъ только неявнымъ образомъ, по самой своей природѣ и совершенно независимо отъ состоянія алгебры, представляетъ случай, совершенно отличный отъ интегрированія дифференціаловъ, выраженныхъ явно въ функціи независимыхъ перемѣнныхъ. Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій слѣдовательно по необходимости сложнѣе интегрированія явныхъ дифференціаловъ, съ изученія котораго началось интегральное исчисленіе, и къ которому затѣмъ, по мѣрѣ возможности, старались привести всѣ другіе случаи. Дѣйствительно, цѣлью различныхъ аналитическихъ пріемовъ, предложенныхъ до сихъ поръ для интегрированія дифференціальныхъ уравненій, какъ-то отдѣленія перемѣнныхъ, метода множителя и т. д., является приведеніе интегрированія уравненій къ интегрированію дифференціальныхъ формулъ, которое одно по своей природѣ можетъ быть выполнено прямо.

Къ сожалѣнію, какъ ни несовершенно это необходимое основаніе всего интегральнаго исчисленія, способы приведенія къ нему интегрированія дифференціальныхъ уравненій еще менѣе подвинулись впередъ.

Каждая изъ двухъ основныхъ вѣтвей интегральнаго исчисленія подраздѣляется затѣмъ на двѣ другія, какъ и въ дифференціальномъ исчисленіи, и притомъ по совершенно аналогичнымъ соображеніямъ (которыя по этому я и не буду излагать вновь), именно смотря потому, разматриваются-ли функціи съ одной или съ нѣсколькими независимыми перемѣнными. Я укажу только, что это дѣленіе, какъ и предыдущее, въ интегральномъ исчисленіи имѣетъ еще большее значеніе, чѣмъ въ дифференціальномъ. Это обстоятельство особенно замѣтно относительно дифференціальныхъ уравненій. Дѣйствительно, дифференціальныя уравненія съ нѣсколькими независимыми перемѣнными могутъ, очевидно, представлять характерную и гораздо болѣе высокаго порядка трудность, такъ какъ искомая функція опредѣляется дифференціально простымъ соотношеніемъ между ея различными частными производными по различнымъ отдѣльно взятымъ перемѣннымъ. Отсюда и возникаетъ самая трудная и самая обширная часть интегральнаго исчисленія, называемыя обыкновенно *интегрированіемъ уравненій въ частныхъ производныхъ* и созданная д'Аламберомъ: въ ней, по справедливому замѣчанію Лагранжа, геометры должны были-бы видѣть дѣйствительно совершенно новое исчисленіе, философскій характеръ котораго оцѣнемъ еще недостаточно точно. Наиболѣе важное различіе между этимъ случаемъ и интегрированіемъ уравненій съ одной независимой перемѣнной состоитъ, какъ я уже замѣтилъ выше, въ введеніи, для приданія соотвѣтствующимъ интеграламъ всей возможной общности, произвольныхъ функцій вмѣсто простыхъ произвольныхъ постоянныхъ.

Едва-ли я долженъ указывать, что эта важная часть трансцендентнаго анализа находится вполнѣ въ періодѣ своего дѣтства, такъ какъ даже въ самомъ простомъ случаѣ, а именно въ случаѣ уравненія перваго порядка съ частными производными одной функціи съ двумя независимыми перемѣнными, мы до сихъ поръ совсѣмъ еще не умѣемъ окончательно привести задачу къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Интегрированіе, относящееся къ функціямъ съ нѣсколькими перемѣнными, подвинулось значительно впередъ въ несравненно болѣе простомъ случаѣ, когда дифференціальныя формулы имѣютъ явный видъ. Въ этомъ случаѣ дѣйствительно возможно, если формулы удовлетворяютъ надлежащимъ условіямъ интегрируемости, привести ихъ интегрированіе къ квадратурамъ.

Новый признакъ различія, на основаніи котораго можно установить дальнѣйшія подраздѣленія интегрированія явныхъ и неявныхъ дифференціаловъ съ одной или со многими перемѣнными, заключается въ болѣе или менѣе высокомъ порядкѣ дифференцированія, хотя въ дифференціальномъ исчисленіи этотъ порядокъ, какъ мы видѣли, не создаетъ особыхъ трудностей. Относительно явныхъ дифференціаловъ съ одной или нѣсколькими перемѣнными необходимость различать ихъ по порядку объясняется только крайнимъ несовершенствомъ интегральнаго исчисленія. Дѣйствительно, если-бы всегда можно было проинтегрировать всякую дифференціальную формулу перваго порядка, то интегрированіе формулы второго и всякаго другого порядка не составило-бы, очевидно, новой задачи, такъ какъ послѣ одного интегрированія получилось-бы дифференціальное выраженіе ближайшаго порядка; а отсюда, рядомъ соотвѣтствующихъ аналогичныхъ интегрированій, можно было-бы навѣрно дойти наконецъ до первообразной функціи, что и составляетъ основной предметъ подобнаго изслѣдованія. Но ограниченность нашихъ познаній объ интегрированіи перваго порядка измѣняетъ положеніе вопроса, и болѣе или менѣе высокій порядокъ дифференціаловъ создаетъ новыя затрудненія; относительно дифференціальныхъ формулъ порядка выше перваго можетъ случиться, что, умѣя интегрировать ихъ одинъ или нѣсколько разъ подъ рядъ, все таки мы не будемъ въ состояніи дойти до первообразной функціи, если предварительныя интегрированія введутъ въ дифференціалъ низшаго порядка такія выраженія, интегралы которыхъ неизвѣстны. Это обстоятельство будетъ встрѣчаться тѣмъ чаще, что послѣдовательные интегралы вообще, какъ извѣстно, очень отличаются отъ производныхъ, изъ коихъ они получены, а число извѣстныхъ намъ интеграловъ весьма незначительно.

По отношенію къ неявнымъ дифференціаламъ различіе порядка еще важнѣе, такъ какъ, кромѣ указанной выше причины, вліяніе которой здѣсь очевидно одинаково и даже еще замѣтнѣе, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ, легко видѣть, что повышеніе порядка дифференціальныхъ уравненій по необходимости выдвигаетъ совершенно новые вопросы. Дѣйствительно, если бы даже возможно было интегрировать безусловно всякое уравненіе перваго порядка съ одной функціей, то этого было бы еще недостаточно, чтобы получить окончательные интегралы уравненій любого порядка, такъ какъ не каждое дифференціальное уравненіе можно привести къ уравненію ближайшаго низшаго порядка. Если, напримѣръ, нужно опредѣлить функцію y перемѣнной x на основаніи отношенія между x, y, $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, то первымъ интегрированіемъ нельзя будетъ непосредственно получить соотвѣтствующее дифференціальное отношеніе между x, y и $\frac{dy}{dx}$, изъ котораго вторымъ интегрированіемъ можно было-бы дойти до первоначальнаго уравненія. Если не вводить новыхъ вспомогательныхъ функцій, то такой результатъ будетъ непремѣнно имѣть мѣсто только въ случаѣ, если данное уравненіе второго порядка совершенно не заключаетъ въ себѣ искомой функціи y одновременно съ ея производными. Вообще слѣдуетъ признать, что дифференціальныя уравненія представляютъ случаи тѣмъ болѣе неявной зависимости, чѣмъ выше ихъ порядокъ; эти уравненія могутъ быть приведены одно къ другому только при посредствѣ спеціальныхъ методовъ, разработка которыхъ составляетъ совершенно новый классъ вопросовъ, до сихъ поръ почти совершенно неизслѣдованныхъ даже по отношенію къ функціямъ съ одной перемѣнною *).

Наконецъ, при болѣе глубокомъ разсмотрѣніи этого различія дифференціальныхъ уравненіи по ихъ порядку, мы найдемъ, что оно могло бы входить въ послѣднее общее раздѣленіе дифференціальныхъ уравненій, на которое я еще долженъ указать. Дѣйствительно, дифференціальныя уравненія съ одной или нѣсколькими независимыми перемѣнными могутъ заключать въ себѣ только одну функцію или же, въ очевидно болѣе сложномъ и неявномъ случаѣ, соотвѣтствующемъ дифференцированію неявныхъ совокупныхъ функцій, намъ будетъ предстоять опредѣлить въ одно и тоже время нѣсколько функцій на основаніи дифференціальныхъ уравненій, въ которыхъ эти функціи входятъ вмѣстѣ другъ съ другомъ и съ различными своими производными. Ясно вполнѣ, что такая постановка вопроса представляетъ собою новую особую трудность, а именно—отдѣлить искомыя функціи другъ отъ друга, составивъ для каждой, на основаніи данныхъ дифференціальныхъ уравненій, отдѣльное дифференціальное уравненіе, не заключающее въ себѣ ни другихъ функцій, ни ихъ производныхъ. Эта предварительная работа, аналогичная исключенію неизвѣстныхъ въ алгебрѣ, очевидно, необходимо должна предшествовать всякой попыткѣ интегрировать уравненіе прямо, такъ какъ, за исключеніемъ искусственныхъ пріемовъ, которые очень рѣдко могутъ быть прилагаемы, нельзя одновременно пытаться непосредственно опредѣлить нѣсколько различныхъ функціи.

Легко установить точное и необходимое совпаденіи этого новаго дѣленія съ предыдущимъ, основаннымъ на порядкѣ дифференціальныхъ уравненіи. Дѣйствительно, извѣстно, что общій способъ отдѣленія функцій въ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ состоитъ главнымъ образомъ въ составленіи дифференціальныхъ уравненіи для каждой функціи отдѣльно, причемъ порядокъ новыхъ уравненій равенъ суммѣ порядковъ всѣхъ данныхъ уравненій. Такое преобразованіе можно всегда выполнять. Съ другой стороны всякое дифференціальное уравненіе любого порядка, относящееся только къ одной функціи, очевидно, всегда можно привести къ уравненію перваго порядка, вводя надлежащее число вспомогательныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, заключающихъ въ себѣ различныя производныя низшихъ порядковъ, принимаемыя за новыя подлежащія опредѣленію функціи. Этотъ пріемъ нѣсколько разъ былъ примѣненъ съ успѣхомъ, хотя вообще онъ представляется неестественнымъ.

Итакъ, въ общей теоріи дифференціальныхъ уравненій существуетъ два рода по необходимости равнозначущихъ условій, а именно:

*) Единственный случай такого рода, который былъ вполнѣ разработанъ, представляетъ общее интегрированіе линейныхъ уравненій любого порядка съ постоянными коэфиціентами; но и здѣсь интегрированіе оказывается въ концѣ концовъ въ зависимости отъ алгебраическаго рѣшенія уравненій степени, равной порядку дифференцированія.

совокупность большаго или меньшаго числа функцій и болѣе или менѣе высокій порядокъ дифференцированія отдѣльной функціи. Повышая порядокъ дифференціальныхъ уравненій можно отдѣлить всѣ функціи, а искусственно увеличивая число функцій, можно всѣ уравненія привести къ уравненіямъ перваго порядка. Поэтому въ томъ и другомъ случаѣ трудность одна и таже, только она разсматривается съ двухъ различныхъ точекъ зрѣнія; но какъ бы мы ее однако ни разсматривали, эта новая общая обоимъ случаямъ трудность дѣйствительно существуетъ и по своей природѣ образуетъ вполнѣ точно опредѣленную границу между интегрированіемъ уравненій перваго порядка и уравненій высшаго порядка. Я предпочитаю указать на дѣленіе въ послѣдней формѣ, какъ болѣе простой, болѣе общей и болѣе раціональной.

Изъ выше указанныхъ различныхъ соображеній о раціональной зависимости главныхъ частей интегральнаго исчисленія видно, что интегрированіе явныхъ дифференціальныхъ формулъ перваго порядка съ одной перемѣнной есть необходимое основаніе всѣхъ другихъ интегрированій, которыя могутъ быть выполнены какъ разъ настолько, насколько ихъ можно привести къ этому элементарному случаю, очевидно, единственному, поддающемуся по своей природѣ непосредственному изслѣдованію. Указанному простому и основному интегрированію часто присвоивается удобное названіе *квадратуры* въ виду того, что всякій интегралъ этого рода $\int f(x)\,dx$, можно въ дѣйствительности разсматривать, какъ площадь кривой, уравненіе которой въ прямолинейныхъ координатахъ есть $y = f(x)$.

Разсмотрѣнный классъ задачъ соотвѣтствуетъ элементарному дифференцированію явныхъ функцій съ одной перемѣнной въ дифференціальномъ исчисленіи; но задача интегральнаго исчисленія, по самой своей природѣ, гораздо сложнѣе и особенно гораздо шире, чѣмъ задача дифференціальнаго исчисленія, которая, въ концѣ концовъ, какъ мы уже видѣли, приводится къ дифференцированію первыхъ десяти простыхъ функцій, составляющихъ элементы всѣхъ разсматриваемыхъ въ анализѣ функцій. Наоборотъ интегрированіе сложныхъ функцій совсѣмъ не вытекаетъ непремѣнно изъ интегрированія простыхъ функцій, и каждая новая комбинація послѣднихъ представляетъ, съ точки зрѣнія интегральнаго исчисленія, особыя трудности. Отсюда естественнымъ образомъ вытекаетъ неограниченность объема и чрезвычайное разнообразіе и сложность вопроса о квадратурахъ, относительно которыхъ наши познанія, не смотря на всѣ усилія математиковъ, до сихъ поръ еще такъ не полны.

Раздѣляя задачу о квадратурахъ, какъ это и слѣдуетъ дѣлать, сообразно съ формой производной, прежде всего надлежитъ отличать алгебраическія функціи отъ функцій трансцендентныхъ. Истинное аналитическое интегрированіе послѣдняго класса выраженій до сихъ поръ весьма мало подвинулось впередъ, какъ для показательныхъ функцій, такъ и для функцій логариѳмическихъ и круговыхъ. До настоящаго времени изслѣдовано только очень небольшое число случаевъ послѣднихъ трехъ родовъ, причемъ были выбраны самые простые, и тѣмъ не менѣе и эти случаи приводили обыкновенно къ высшей степени труднымъ выкладкамъ. Съ философской точки зрѣнія по этому предмету мы должны особенно замѣтить, что различные методы квадратуръ не исходятъ изъ какой-нибудь общей теоріи интегрированія и состоятъ изъ простыхъ преобразованій, совершенно не-связанныхъ другъ съ другомъ и очень многочисленныхъ, благодаря тому, что приложенія каждаго изъ нихъ крайне ограничены. Я долженъ однако указать здѣсь на одинъ изъ такихъ пріемовъ, который, не составляя въ дѣйствительности метода интегрированія, тѣмъ не менѣе замѣчателенъ по своей общности: я говорю о пріемѣ, предложенномъ Иваномъ Бернулли и извѣстнымъ подъ названіемъ *интегрированія по частямъ*, посредствомъ котораго можно всякій интегралъ привести къ другому, иногда легче интегрируемому, чѣмъ первый. Это остроумное открытіе заслуживаетъ упоминанія еще въ другомъ отношеніи: оно впервые дало идею преобразованія еще неизвѣстныхъ интеграловъ однихъ въ другіе, идею, въ послѣднее время получившую болѣе широкое развитіе, которою въ особенности такъ оригинально и съ такимъ успѣхомъ воспользовался Фурье въ аналитическихъ задачахъ, поставленныхъ теоріей теплоты.

Что-же касается интегрированія *алгебраическихъ* функцій, то оно подвинулось больше впередъ. Однако до сихъ поръ еще почти ничего неизвѣстно относительно ирраціональныхъ функцій, интегралы которыхъ были получены только въ весьма небольшомъ числѣ случаевъ, и то послѣ преобразованія этихъ функцій въ раціональныя.

Интегрированіе раціональныхъ функцій до сихъ поръ составляетъ въ интегральномъ исчисленіи единственную теорію, дѣйствительно вполнѣ разработанную; съ логической точки зрѣнія она является наиболѣе удовлетворительной, но, быть можетъ, и наименѣе важной частью всего исчисленія. Чтобы получить правильное представленіе о крайнемъ несовершенствѣ интегральнаго исчисленія, важно отмѣтить, что даже эта столь ограниченная часть задачи рѣшена въ совершенствѣ только относительно собственно интегрированія, разсматриваемаго абстрактно, тогда какъ на практикѣ, не говоря уже о сложности вычисленія, теорія очень часто совсѣмъ не можетъ быть примѣнена благодаря несовершенству обыкновеннаго анализа, ибо здѣсь интегрированіе ставится въ зависимость отъ алгебраическаго рѣшенія уравненій, что крайне ограничиваетъ примѣненіе ея.

Чтобы въ общемъ видѣ понять характеръ различныхъ пріемовъ, съ помощью коихъ выполняются квадратуры, мы должны признать, что по природѣ своей они могутъ быть основаны только на дифференцированіи десяти простыхъ функцій: результаты этого дифференцированія, разсматриваемое съ обратной точки зрѣнія, представляютъ столько-же непосредственныхъ теоремъ интегральнаго исчисленія, единственныхъ получаемыхъ непосредственно, ибо, какъ я уже объяснилъ въ началѣ этой лекціи, все искусство интегрированія состоитъ въ приведеніи, на сколько это возможно, всѣхъ другихъ квадратуръ къ небольшому числу элементарныхъ квадратуръ, приведеніи, къ сожалѣнію, чаще всего остающемся невыполнимымъ для насъ.

Въ предыдущемъ послѣдовательномъ перечисленіи существенныхъ частей интегральнаго исчисленія въ соотвѣтствіи съ ихъ взаимными логическими отношеніями, я намѣренно, чтобы не прерывать связи разсужденія, оставилъ безъ отдѣльнаго разсмотрѣнія весьма важную теорію, образующую неявно часть общей теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій, на которую я здѣсь долженъ указать особо, ибо она, такъ сказать, стоитъ внѣ самаго интегральнаго исчисленія и тѣмъ не менѣе представляетъ огромный интересъ, какъ по своему логическому совершенству, такъ и по обширности приложеній. Я имѣю въ виду такъ называемыя *особыя* рѣшенія дифференціальныхъ уравненій, иногда неправильно называемыя также *частными* рѣшеніями, бывшія предметомъ весьма замѣчательныхъ работъ Эйлера и Лапласа, прекрасную и простую общую теорію которыхъ далъ намъ Лагранжъ. Какъ извѣстно, Клеро, замѣтившій первый ихъ существованіе, видѣлъ здѣсь парадоксъ интегральнаго исчисленія, ибо характеристической особенностью этихъ рѣшеній является то, что, удовлетворяя дифференціальнымъ уравненіямъ, они тѣмъ не менѣе не входятъ въ составъ соотвѣтствующихъ общихъ интеграловъ. Позже Лагранжъ въ высшей степени остроумно и вполнѣ удовлетворительно объяснилъ этотъ парадоксъ, показавъ, что особенныя рѣшенія всегда получаются изъ общаго интеграла съ помощью варьяціи постоянныхъ произвольныхъ; онъ-же впервые правильно оцѣнилъ важность этой теоріи и вполнѣ основательно посвятилъ ей такъ много мѣста въ своихъ *лекціяхъ объ исчисленіи функцій*. Съ раціональной точки зрѣнія указанная теорія дѣйствительно заслуживаетъ всего нашего вниманія вслѣдствіе присущаго ей характера безусловной общности, ибо Лагранжъ установилъ неизмѣнные и весьма простые пріемы для нахожденія особеннаго рѣшенія всякаго дифференціальнаго уравненія, если оно допускаетъ такое рѣшеніе и—что не менѣе замѣчательно—показалъ, что эти пріемы не требуютъ интегрированія, а состоятъ исключительно въ дифференцированіи и потому всегда примѣнимы. Благодаря этому искусному пріему дифференцированіе стало орудіемъ, исправляющимъ, при извѣстныхъ обстоятельствахъ, несовершенство интегральнаго исчисленія. Дѣйствительно, нѣкоторыя задачи требуютъ по самой природѣ своей нахожденія именно такого рода особенныхъ рѣшеній, какъ напримѣръ въ геометріи всѣ задачи, гдѣ нужно опредѣлить кривую на основаніи какого-нибудь свойства ея касательной или соприкасающейся окружности. Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ, послѣ того какъ данныя свойства выражены дифференціальнымъ уравненіемъ, съ аналитической точки зрѣнія *особенныя* рѣшенія являются наиболѣе важнымъ предметомъ изслѣдованія, такъ какъ только эти рѣшенія даетъ искомыя кривыя; искать-же общій интегралъ становится совершенно излишнимъ потому, что онъ даетъ только систему касательныхъ или соприкасающихся окружностей данной кривой. Изъ этого замѣчанія легко понять всю важность указанной теоріи, какъ мнѣ кажется, еще не достаточно оцѣненной большинствомъ геометровъ.

Наконецъ, чтобы закончить описаніе всей обширной области аналитическихъ изслѣдованій, составляющихъ интегральное исчисленіе въ собственномъ смыслѣ слова, мнѣ остается указать на весьма важную по своимъ примѣненіямъ во всемъ трансцендентномъ анализѣ теорію, которую я долженъ былъ поставить внѣ общей системы, такъ какъ она въ дѣйствительности не предназначается собственно для интегрированія, а наоборотъ, имѣетъ цѣлью замѣнить нахожденіе дѣйствительно аналитическихъ интеграловъ, чаще всего неизвѣстныхъ. Легко видѣть, что я говорю объ *опредѣленныхъ интегралахъ*.

Выраженіе интеграловъ въ видѣ безконечныхъ рядовъ, всегда возможное, на первый взглядъ кажется удачнымъ общимъ средствомъ исправленія послѣдствій крайняго несовершенства интегральнаго исчисленія. Но употребленіе такихъ рядовъ, благодаря ихъ сложности и трудности опредѣлить законъ образованія ихъ членовъ, обыкновенно приноситъ очень мало пользы въ алгебраическомъ смыслѣ, хотя иногда этимъ путемъ и удается вывести весьма существенныя соотношенія.

Этотъ пріемъ пріобрѣтаетъ большую важность особенно съ ариѳметической точки зрѣнія, какъ средство вычисленія такъ называемыхъ *опредѣленныхъ* интеграловъ, т. е. значеній искомыхъ функцій для данныхъ опредѣленныхъ значеній соотвѣтствующихъ перемѣнныхъ.

Подобныя изслѣдованія въ трансцендентномъ анализѣ точно соотвѣтствуютъ численному рѣшенію уравненій въ обыкновенномъ анализѣ. Не имѣя возможности, чаще всего, получить истинное значеніе интеграла, ради противоположенія называемое *общимъ* или *неопредѣленнымъ* интеграломъ, т. е. такую функцію, которая послѣ дифференцированія даетъ основную дифференціальную формулу, математики должны были ограничиться по крайней мѣрѣ опредѣленіемъ частныхъ численныхъ значеній функціи, остающейся вообще неизвѣстной, при нѣкоторыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ. Это, очевидно, есть рѣшеніе ариѳметической задачи, получаемое независимо отъ предварительнаго рѣшенія соотвѣтствующаго алгебраическаго вопроса, чаще всего именно и являющагося самымъ важнымъ. Этотъ родъ анализа по природѣ своей такъ-же несовершененъ, какимъ оказалось при разсмотрѣніи численное рѣшеніе уравненій; онъ, какъ и послѣднее, представляетъ неправильное смѣшеніе ариѳметической точки зрѣнія съ алгебраической; отсюда и въ логическомъ отношеніи, и на практикѣ вытекаютъ аналогичныя-же неудобства. Поэтому я могу не повторять здѣсь соображеній, изложенныхъ относительно алгебры въ пятой лекціи. Однако, понятно также, что въ виду невозможности для насъ въ большинствѣ случаевъ находить истинные интегралы, въ высшей степени важно имѣть хотя такое неполное и по необходимости недостаточное рѣшеніе. Къ счастью, такое рѣшеніе можно теперь получить во всѣхъ случаяхъ, такъ какъ вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ приведено къ совершенно общимъ методамъ, въ большомъ числѣ случаевъ оставляющимъ желать только упрощенія вычисленій, — цѣль, къ которой нынѣ направлены всѣ спеціальныя преобразованія математиковъ. Если эту *трансцендентную ариѳметику* признать совершенною, то вся трудность примѣненія ея существеннымъ образомъ будетъ состоять въ концѣ концовъ въ приведеніи даннаго изслѣдованія въ зависимость отъ простого вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ, что, очевидно, не всегда удастся, какія-бы усилія анализа ни были употреблены для полученія такого искусственнаго преобразованія.

Изъ всѣхъ указанныхъ въ этой лекціи соображеній видно, что если дифференціальное исчисленіе по своей природѣ представляетъ собою опредѣленную и совершенную систему, къ которой ничего существеннаго не остается прибавить, то интегральное исчисленіе въ собственномъ смыслѣ слова, т. е. простое ученіе объ интегрированіи по необходимости представляетъ неистощимое поле для дѣятельности человѣческаго духа, независимо отъ безконечнаго множества приложеній, очевидно, доступныхъ для трансцендентнаго анализа. Общія соображенія, которыми я старался въ пятой лекціи выяснить невозможность когда-бы то ни было найти алгебраическое рѣшеніе уравненій всякой степени и всякаго вида, конечно, имѣютъ еще больше значенія относительно полученія единственнаго неизмѣннаго и примѣнимаго ко всѣмъ случаямъ пріема интегрированія. *Это*, говоритъ Лагранжъ, *одна изъ тѣхъ задачъ, на общее рѣшеніе которыхъ нельзя надѣяться*. Чѣмъ больше мы будемъ размышлять объ этомъ предметѣ, тѣмъ сильнѣе будемъ убѣждаться — я не боюсь утверждать это — что подобное изслѣдованіе представляетъ совершенно пустую мечту, такъ какъ оно превосходитъ слабыя силы нашего разума, хотя труды геометровъ несомнѣнно увеличатъ современемъ совокупность пріобрѣтенныхъ нами познаній объ интегрированіи и создадутъ болѣе общіе пріемы.

Трансцендентный анализъ еще слишкомъ близокъ къ періоду своего рожденія и, особенно, прошло слишкомъ мало времени съ тѣхъ поръ, какъ его поняли дѣйствительно раціональнымъ образомъ, чтобы мы могли создать себѣ правильное представленіе о томъ, чѣмъ онъ станетъ современемъ. Но каковы-бы ни были наши законныя надежды въ этомъ отношеніи, не будемъ забывать прежде всего предѣлы, налагаемые на насъ силами нашего ума, предѣлы, которые хотя и не могутъ быть установлены точно, но тѣмъ не менѣе дѣйствительно существуютъ.

Я думаю, что вмѣсто стремленія дать исчисленію косвенныхъ функцій, какъ мы его теперь понимаемъ, какое-то несбыточное совершенство, геометры, исчерпавъ всѣ наиболѣе важныя примѣненія существующаго теперь трансцендентнаго анализа, скорѣе создадутъ новые методы, измѣнивъ способъ составленія вспомогательныхъ величинъ, вводимыхъ для облегченія установленія уравненій; указанныя вспомогательныя величины могутъ быть построены съ помощью безконечнаго множества другихъ законовъ, отличныхъ отъ весьма простого отношенія, избраннаго за основаніе указанной мною въ четвертой лекціи концепціи. Подобныя средства мнѣ кажутся сами по себѣ болѣе плодотворными, чѣмъ одно стремленіе подвинуть впередъ наше современное исчисленіе косвенныхъ функцій. Эту мысль я отдаю на судъ геометровъ, размышленія которыхъ обращены на общую философію анализа.

Наконецъ, хотя въ общемъ изложеніи, представлявшемъ дѣйствительный предметъ этой лекціи, я долженъ былъ указать на то состояніе крайняго несовершенства, въ которомъ нынѣ находится интегральное исчисленіе, однако мы получили-бы ложное понятіе объ общемъ значеніи трансцендентнаго анализа, если-бы придали указанному соображенію слишкомъ большое значеніе. Дѣйствительно здѣсь, какъ и въ обыкновенномъ анализѣ, человѣчество съумѣло въ безконечныхъ предѣлахъ воспользоваться весьма малымъ числомъ основныхъ свѣдѣній о рѣшеніи уравненій. Какъ-бы мало ни двинулась впередъ до сихъ поръ наука интегрированія, геометры тѣмъ не менѣе извлекли изъ столь малаго числа абстрактныхъ понятій рѣшеніе множества первостепенной важности задачъ въ геометріи, механикѣ, термологіи и т. д. Философское объясненіе этого общаго двойного факта основывается на важности и необходимомъ преимуществѣ абстрактныхъ понятій, изъ которыхъ самое узкое соотвѣтствуетъ массѣ конкретныхъ случаевъ: человѣкъ для послѣдовательнаго расширенія своихъ интеллектуальныхъ орудій не имѣетъ другихъ источниковъ, кромѣ разсмотрѣнія все болѣе и болѣе абстрактныхъ и тѣмъ не менѣе положительныхъ идей.

Чтобы закончить объясненіе философскаго характера трансцендентнаго анализа во всемъ его объемѣ, мнѣ нужно еще разсмотрѣть одну идею безсмертнаго Лагранжа, имя котораго мы встрѣтимъ во всѣхъ главныхъ частяхъ математики: онъ, благодаря этой идеѣ, расширилъ примѣненіе анализа къ облегченію составленія уравненій въ самыхъ трудныхъ задачахъ, разсматривая классъ еще болѣе *косвенныхъ* уравненій, чѣмъ собственно дифференціальныя уравненія. Я имѣю въ виду *исчисленіе*, или правильнѣе, *методъ варьяцій*, общая оцѣнка котораго будетъ предметомъ слѣдующей лекціи.

Восьмая лекція.

Общія соображенія о варьяціонномъ исчисленіи.

Чтобы легче понять философскій характеръ метода варьяцій, слѣдуетъ прежде всего кратко разсмотрѣть особую природу задачъ, общее рѣшеніе которыхъ вызвало созданіе этого гипертрансцендентнаго анализа. Само исчисленіе возникло слишкомъ недавно, и его примѣненія до сихъ поръ представляютъ слишкомъ мало разнообразія, чтобы можно было составить себѣ о немъ достаточно ясно общее понятіе, ограничиваясь чисто абстрактнымъ изложеніемъ его основаній, хотя такое абстрактное изложеніе должно быть затѣмъ главнымъ и окончательнымъ предметомъ этой лекціи.

Математическія задачи, вызвавшія появленіе *варьяціоннаго исчисленія*, состоятъ вообще въ отысканіи *maxima* и *minima* извѣстныхъ неопредѣленныхъ интегральныхъ формулъ, выражающихъ аналитическіе законы того или другого геометрическаго или механическаго явленія, разсматриваемаго совершенно независимо отъ отдѣльнаго предмета, въ коемъ она совершается. Геометры долгое время всѣмъ задачамъ этого рода давали названіе *задачъ объ изопериметрахъ*, соотвѣтствующее однако только самому малому числу между ними.

Въ обыкновенной теоріи maxima и minima требуется для данной функціи съ одной или нѣсколькими перемѣнными найти, какія частныя значенія надо дать этимъ перемѣннымъ, чтобы соотвѣтствующее имъ значеніе данной функціи было maximum'омъ или minimum'омъ по отношенію къ предыдущимъ или непосредственно слѣдующимъ значеніямъ ея, т. е. требуется, собственно говоря, узнать, въ какой моментъ функція перестаетъ возрастать и начинаетъ уменьшаться или наоборотъ. Какъ извѣстно, дифференціальнаго исчисленія вполнѣ достаточно для общаго рѣшенія этого класса задачъ: оно показываетъ, что значенія различныхъ перемѣнныхъ, соотвѣтствующія maximum'у или minimum'у, всегда должны обращать въ нуль различныя производныя перваго порядка данной функціи, взятыя отдѣльно для каждой независимой перемѣнной; кромѣ того, оно показываетъ, что характерная черта, отличающая maximum отъ minimum'а состоитъ въ томъ, что, напримѣръ, въ случаѣ функціи отъ одной перемѣнной, производная второго порядка должна быть отрицательной для maximum'а и положительной для minimum'а.

Таковы, по крайней мѣрѣ, основныя условія, относящіяся къ большинству случаевъ; измѣненія, которыя они должны претерпѣть, чтобы теорія была вполнѣ примѣнима къ извѣстнымъ задачамъ, также подчинены неизмѣннымъ и абстрактнымъ правиламъ, хотя и болѣе сложнымъ.

Построеніе этой общей теоріи естественнымъ образомъ разсѣяло главный интересъ, возбужденный у геометровъ подобными задачами, и поэтому они почти тотчасъ же обратились къ разсмотрѣнію новаго класса вопросовъ, въ одно время и гораздо болѣе важныхъ и болѣе трудныхъ, а именно къ задачамъ *объ изопериметрахъ*. Здѣсь опредѣляются уже не значенія перемѣнныхъ, соотвѣтствующія minimum'у или maximum'у извѣстной функціи, а самый видъ функціи, дающій minimum или maximum нѣкотораго опредѣленнаго интеграла, зависящаго отъ этой функціи *).

Самымъ старымъ вопросомъ этого рода является задача о твердомъ тѣлѣ наименьшаго сопротивленія, разсмотрѣнная Ньютономъ во второй книгѣ его *Принциповъ*, гдѣ онъ опредѣляетъ, каковы должна быть меридіональныя кривыя тѣла вращенія, чтобы сопротивленіе, испытываемое тѣломъ по направленію оси при прохожденіи съ нѣкоторой скоростью черезъ неподвижную жидкость, было наименьшимъ.

Избранный Ньютономъ путь не былъ однако на столько простымъ, общимъ и, въ особенности, не носилъ, вслѣдствіе самой природы собственнаго его метода трансцендентнаго анализа, достаточно аналитическій характеръ, чтобы такое рѣшеніе могло привлечь геометровъ къ этому новому роду задачъ. Дѣйствительно, рѣшительный толчекъ въ этомъ направленіи могъ послѣдовать только со стороны геометра, занимавшагося на континентѣ разработкой и примѣненіемъ метода безконечно малыхъ въ собственномъ смыслѣ этого слова. Это и сдѣлалъ въ 1695 году Иванъ Бернулли, предложивъ свою знаменитую задачу о брахистохронѣ, послужившую началомъ цѣлаго ряда аналогичныхъ задачъ; она состоитъ въ опредѣленіи кривой, по которой тяжелое тѣло должно пройти отъ одной точки къ другой въ кратчайшій промежутокъ времени. Если ограничиться простымъ паденіемъ въ пустомъ пространствѣ, — единственнымъ случаемъ, разсмотрѣннымъ сначала—то легко можно найти, что искомая кривая должна быть обращенной циклоидой съ горизонтальнымъ основаніемъ, имѣющей свое начало въ самой высокой точкѣ. Задача можетъ быть чрезвычайно усложнена, если принять во вниманіе сопротивленіе среды или ввести въ разсчетъ измѣненіе напряженія силы тяжести.

Хотя новый классъ задачъ первоначально былъ данъ механикой, тѣмъ не менѣе именно изъ геометріи были впослѣдствіи заимствованы предметы для главныхъ изслѣдованій этого рода. Такъ была поставлена задача найти, какая изъ всѣхъ проведенныхъ между двумя данными точками кривыхъ равнаго периметра дастъ наибольшую или наименьшую площадь, откуда и возникло самое названіе задачи объ *изопериметрахъ*; далѣе требовалось опредѣлить maximum или minimum поверхности или объема тѣла, производимаго вращеніемъ искомой кривой вокругъ оси; въ другихъ случаяхъ требовалось найти minimum или maximum разстоянія центра тяжести неизвѣстной кривой, или поверхности и объема, которыя она могла-бы произвести и т. д. Наконецъ

*) Подлинный текстъ въ этомъ мѣстѣ не совсѣмъ понятенъ: поэтому я придалъ послѣднему предложенію тотъ смыслъ, который мнѣ казался наиболѣе соотвѣтствующимъ ходу разсужденія автора. *(Прим. Ред.)*.

эти задачи послѣдовательно видоизмѣнялись и осложнялись, такъ сказать, до безконечности Бернулли, Тэйлоромъ и въ особенности Эйлеромъ, прежде чѣмъ Лагранжъ подчинилъ рѣшеніе ихъ абстрактному и совершенно общему методу, открытіе котораго въ значительной степени ослабило влеченіе геометровъ къ подобнымъ задачамъ. Здѣсь не мѣсто даже вкратцѣ излагать исторію этой высшей части математики, какъ бы интересна она ни была; я перечислилъ нѣкоторые вопросы, избравъ ихъ среди наиболѣе простыхъ, для того только, чтобы указать общее назначеніе, которое по существу своему методъ варьяцій имѣлъ въ самомъ началѣ. Изъ предыдущаго видно, что съ аналитической точки зрѣнія всѣ указанныя задачи состоятъ по самой природѣ своей въ опредѣленіи, какую форму должна имѣть неизвѣстная функція отъ одной или многихъ перемѣнныхъ, чтобы тотъ или другой зависящій отъ функціи интегралъ имѣлъ въ данныхъ предѣлахъ maximum или minimum относительно всѣхъ тѣхъ значеній, которыя онъ могъ-бы получить, если бы искомая функція имѣла какую угодно другую форму. Такъ, напримѣръ, относительно задачи о брахистохронѣ извѣстно, что если

$$y = f(z),\ x = \varphi(z)$$

суть прямолинейныя уравненія искомой кривой въ предположеніи, что оси x и y—горизонтальны, а ось z—вертикальна, то время паденія тяжелаго тѣла вдоль этой кривой отъ точки, ордината которой равна z_1, до точки, ордината которой равна z_2, обыкновенно выражается опредѣленнымъ интеграломъ *).

$$\int_{z_2}^{z_1} \sqrt{\frac{1 + f'(z)^2 + \varphi'(z)^2}{2gz}}\, dz$$

Итакъ требуется найти, каковы должны быть двѣ неизвѣстныя функціи f и φ, что бы этотъ интегралъ былъ minimum. Такимъ же образомъ, если спросить, какова должна быть та плоская изопериметрическая кривая, которая содержала-бы наибольшую площадь, то это значило-бы требовать изъ всѣхъ функцій $f(x)$, дающихъ интегралу

$$\int dx \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

извѣстное опредѣленное значеніе, найти такую, которая превратила-бы интегралъ $\int f(x)\, dx$, взятый въ тѣхъ же предѣлахъ, въ maximum. Очевидно, что подобныя требованія поставлены и во всѣхъ другихъ задачахъ этого рода.

Въ рѣшеніяхъ указанныхъ задачъ, которыя геометры давали до Лагранжа, они главнымъ образомъ старались привести ихъ къ теоріи обыкновенныхъ maxima и minima; но такія преобразованія представляли просто рядъ частныхъ искусственныхъ пріемовъ, примѣнимыхъ для каждаго отдѣльнаго случая, но не дававшихъ никакихъ опредѣленныхъ и неизмѣнныхъ правилъ, такъ что въ каждой дѣйствительно новой задачѣ постоянно возникали новыя трудности, и ранѣе полученное рѣшеніе на дѣлѣ не могло принести никакой суще-

*) Я употребляю предложенное Фурье простое и ясное обозначеніе опредѣленныхъ интеграловъ, гдѣ отчетливо указываются ихъ предѣлы.

ственной помощи, кромѣ извѣстнаго упражненія ума. Однимъ словомъ, разсматриваемая отрасль математики по необходимости страдала тѣмъ несовершенствомъ, которое непремѣнно должно существовать до тѣхъ поръ, пока не будетъ выяснена общая всѣмъ задачамъ даннаго класса идея и не явится возможность абстрактнаго и вмѣстѣ съ тѣмъ общаго изслѣдованія ея.

Стараясь ввести различныя задачи объ изопериметрахъ въ область общаго анализа, представленнаго абстрактно и обращеннаго въ отдѣльное исчисленіе, Лагранжъ пришелъ къ мысли о новомъ родѣ дифференцированія, къ которому онъ примѣнилъ характеристику δ, удержавъ знакъ d для обыкновенныхъ простыхъ дифференціаловъ. Эти новые дифференціалы, названные имъ *варьяціями*, представляютъ безконечно малыя приращенія интеграловъ, получаемыя ими не вслѣдствіе подобныхъ же приращеній соотвѣтствующихъ перемѣнныхъ, какъ въ обыкновенномъ трансцендентномъ анализѣ, но вслѣдствіе безконечно малаго измѣненія формы стоящей подъ знакомъ интеграла функціи. Это различіе можно, напримѣръ, легко понять относительно кривыхъ, въ которыхъ ордината или другая перемѣнная, связанная съ кривой, допускаетъ два, очевидно, весьма различныхъ рода дифференціаловъ, смотря по тому, переходимъ ли мы отъ одной точки къ другой, безконечно близкой и лежащей на той же самой кривой, или же переходимъ къ соотвѣтствующей точкѣ другой безконечно близкой кривой, получаемой извѣстнымъ опредѣленнымъ измѣненіемъ первой кривой *). Ясно конечно, что по своей природѣ *варьяціи* различныхъ величинъ, связанныхъ другъ съ другомъ какимъ нибудь закономъ, опредѣляются совершенно тѣмъ же способомъ, какъ и дифференціалы. Наконецъ, изъ общаго понятія о варьяціяхъ выводятся также и основные принципы соотвѣтствующаго этому методу алгориѳма, содержаніе которыхъ заключается просто въ возможности по усмотрѣнію переносить характеристику, спеціально предназначенную для варьяцій, впередъ или послѣ характеристики, соотвѣтствующей обыкновеннымъ дифференціаламъ.

Установивъ эти абстрактныя понятія, Лагранжъ могъ легко и самымъ общимъ образомъ привести всѣ задачи объ изопериметрахъ къ простой обыкновенной теоріи maxima и minima. Чтобы составить себѣ ясную идею объ этомъ важномъ и удачномъ преобразованіи, надо предварительно разсмотрѣть главнѣйшія различія, существующія между задачами объ изопериметрахъ.

Дѣйствительно, указанныя изслѣдованія надо раздѣлить на два общихъ класса, смотря потому, будетъ ли требуемый maximum и minimum, пользуясь сокращеннымъ выраженіемъ геометровъ, *абсолютнымъ* или *относительнымъ*. Въ первомъ случаѣ неизвѣстные опредѣленные интегралы, maximum или minimum которыхъ ищется, по самой природѣ задачи не подчинены никакимъ условіямъ: къ этому случаю относится, напримѣръ, задача о брахистохронѣ, которую требуется выбрать изъ всѣхъ возможныхъ кривыхъ. Во второмъ случаѣ, наоборотъ,— перемѣнные интегралы могутъ измѣняться только подчиняясь извѣст-

*) Уже Лейбницъ сравнивалъ одну кривую съ другой, безконечно близкой къ ней и называлъ это *differentiatio de curva in curvam*, но это сравненіе не имѣло ничего общаго съ идеей Лагранжа, такъ какъ всѣ кривыя Лейбница выражались однимъ уравненіемъ, изъ котораго онѣ получались съ помощью простого измѣненія произвольной постоянной.

нымъ условіямъ, обыкновенно заключающимся въ томъ, что другіе опредѣленные интегралы, также зависящіе отъ искомыхъ функцій, сохраняютъ постоянно одно и то же данное значеніе; къ этому классу относятся, напримѣръ, всѣ геометрическія задачи о собственно изопериметрическихъ фигурахъ, гдѣ, по самой природѣ задачи, интегралъ, относящійся къ длинѣ кривой или площади поверхности, долженъ оставаться постояннымъ въ то время, когда интегралъ, составляющій предметъ даннаго изслѣдованія, измѣняется.

Варьяціонное исчисленіе непосредственно даетъ общее рѣшеніе задачъ перваго рода, такъ какъ, очевидно, изъ обыкновенной теоріи maxima и minima слѣдуетъ, что искомое соотношеніе должно обращать въ нуль варьяцію даннаго интеграла относительно каждой независимой перемѣнной, что и составляетъ условіе общее и для maximum'а, и для minimum'а; чтобы отличить одно отъ другого, принимается во вниманіе варьяція второго порядка того же интеграла, которая должна быть отрицательной для maximum'а и положительной для minimum'а. Такъ, напримѣръ, въ задачѣ о брахистохронѣ для опредѣленія природы искомой кривой, составляется условное уравненіе

$$\delta\int_{z_2}^{z_1}\sqrt{\frac{1+(f'(z))^2+(\varphi'(z))^2}{2gz}}\,dz=o$$

разлагающееся на два уравненія относительно двухъ неизвѣстныхъ функцій f и φ, независимыхъ одна отъ другой, и дающее полное аналитическое опредѣленіе искомой кривой. Единственная трудность, присущая этому новому анализу, состоитъ въ исключеніи характеристики δ, для чего варьяціонное исчисленіе даетъ постоянныя и неизмѣнныя правила, основанныя вообще на операціи интегрированія по частямъ, изъ которой Лагранжъ съумѣлъ такимъ образомъ извлечь огромную пользу. Постоянной цѣлью этой первой аналитической работы (въ изложеніе которой я совсѣмъ не долженъ здѣсь входить), является приведеніе задачи къ дифференціальнымъ уравненіямъ въ собственномъ смыслѣ, что всегда возможно и вслѣдствіе чего задача входитъ въ область обыкновеннаго трансцендентнаго анализа, дающаго окончательное рѣшеніе или по крайней мѣрѣ относящаго его къ собственно алгебрѣ, если только интегрированіе можетъ быть выполнено. Общее назначеніе метода варьяцій состоитъ въ выполненіи указаннаго преобразованія; для него то Лагранжъ и установилъ простыя, неизмѣнныя и всегда приводящія къ цѣли правила.

Даже въ этомъ бѣгломъ общемъ обзорѣ я считаю нужнымъ указать, какъ на одно изъ самыхъ важныхъ и особыхъ преимуществъ метода варьяцій предъ ранѣе извѣстными отдѣльными рѣшеніями задачъ объ изопериметрахъ, на разсмотрѣніе уравненій, названныхъ Лагранжемъ *предѣльными уравненіями*, которыя до него были въ совершенномъ пренебреженіи, но безъ которыхъ большинство частныхъ рѣшеній по необходимости оставались не полными. Когда предѣлы данныхъ интеграловъ должны быть постоянными, ихъ варьяціи равны нулю, и нѣтъ надобности принимать во вниманіе указанныя уравненія; но они получаютъ свое значеніе, если эти предѣлы не строго неизмѣнны, а только подчинены нѣкоторымъ условіямъ, какъ, напримѣръ, въ случаѣ когда двѣ точки, между которыми требуется провести искомую кривую, не неподвижны, а только должны постоянно оставаться на данныхъ линіяхъ или поверхностяхъ. Въ такомъ случаѣ нужно принять во вниманіе варьяціи ихъ координатъ и установить между ними отношенія, соотвѣтствующія уравненіямъ линіи или поверхностей.

Это существенное само по себѣ замѣчаніе есть только послѣднее дополненіе болѣе общаго и болѣе важнаго соображенія относительно варьяціи различныхъ независимыхъ перемѣнныхъ. Если эти перемѣнныя дѣйствительно независимы другъ отъ друга, какъ напримѣръ въ случаѣ сравненія всѣхъ кривыхъ, какія только можно провести между двумя точками, то предыдущее замѣчаніе относится и къ ихъ варьяціямъ и поэтому члены, относящіеся къ каждой изъ этихъ перемѣнныхъ, должны быть отдѣльно равны нулю въ общемъ уравненіи, выражающемъ maximum или minimum. Но если, наоборотъ, предполагается, что перемѣнныя подчинены нѣкоторымъ условіямъ, то надо принять во вниманіе вытекающія отсюда отношенія между ихъ варьяціями, такъ чтобъ число уравненій, на которыя разлагается въ такомъ случаѣ указанное общее уравненіе, было всегда равно только числу перемѣнныхъ, остающихся дѣйствительно независимыми. Такъ, напримѣръ, вмѣсто того, чтобы искать кратчайшій путь между двумя точками, можно задаться цѣлью найти между всѣми возможными путями только тотъ путь, который былъ-бы кратчайшимъ изъ всѣхъ, находящихся на данной поверхности; общее рѣшеніе этого вопроса представляетъ несомнѣнно одно изъ самыхъ блестящихъ приложеній метода варьяціи.

Задачи, гдѣ принимаются во вниманіе подобныя видоизмѣненныя условія, сильно приближаются по своей природѣ ко второму общему классу приложеній метода варьяціи, классу, особенность котораго, какъ выше указано, состоитъ въ отысканіи *относительныхъ* maxima и minima. Между этими двумя случаями имѣется однако та существенная разница, что въ послѣднемъ видоизмѣненіе выражается интеграломъ, зависящимъ отъ искомой функціи, тогда какъ въ первой оно устанавливается непосредственно даннымъ конечнымъ уравненіемъ. Понятно, поэтому, что изслѣдованіе *относительныхъ* maxima и minima всегда сложнѣе, чѣмъ *абсолютныхъ*. Къ счастью, весьма важная общая теорема, найденная еще до изобрѣтенія варьяціоннаго исчисленія и представляющая одно изъ величайшихъ открытій, которыми мы обязаны генію Эйлера, даетъ однообразное и весьма простое средство для включенія однихъ изъ этихъ двухъ классовъ задачъ въ другой. Эта теорема состоитъ въ томъ, что если къ интегралу, который долженъ быть maximum'омъ и minimum'омъ, прибавить интегралъ, остающейся, по условію задачи, постояннымъ, умноженный на постоянную и неопредѣленную величину, то достаточно будетъ, слѣдуя вышеуказанному общему пріему Лагранжа, отыскать *абсолютный* maximum или minimum всего полученнаго выраженія. Дѣйствительно, легко понять, что часть полной варьяціи, происходящая отъ послѣдняго интеграла, должна равняться нулю въ силу постоянства значеній его, нулю-же равна и происходящая отъ перваго интеграла часть, уничтожающаяся на основаніи условія maximum'а или minimum'а. Эти два отдѣльныя условія, очевидно, согласуются и производятъ въ указанномъ отношеніи совершенно одинаковыя слѣдствія.

Въ такомъ видѣ представляется при первомъ обозрѣніи общій способъ примѣненія метода варьяціи ко всѣмъ задачамъ, составляющимъ такъ называемую теорію изопериметровъ. Безъ сомнѣнія и въ этомъ краткомъ изложеніи можно замѣтить, какое широкое примѣненіе нашло въ новомъ анализѣ второе основное свойство трансцендентнаго анализа, указанное въ шестой лекціи, а именно общность безконечно малыхъ выраженій при представленіи одного и того-же геометрическаго и механическаго явленія, независимо отъ тѣла, въ которомъ оно наблюдается. На этой именно общности и основаны по самой природѣ своей всѣ рѣшенія, данныя методомъ варьяцій. Если-бы одна и та-же формула не могла выразить длину или площадь любой кривой, если-бы не было другой опредѣленной формулы для выраженія времени паденія тяжелаго тѣла, по какой-бы линіи оно ни падало и т. д., то какъ-бы возможно было рѣшать задачи, по самой своей природѣ требующія непремѣнно одновременнаго разсмотрѣнія всѣхъ возможныхъ случаевъ, представляемыхъ по отношенію къ каждому явленію отдѣльными предметами, въ которыхъ оно совершается?

Какъ-бы велика ни была важность теоріи изопериметровъ и хотя первоначально методъ варьяцій имѣлъ цѣлью только общее и раціональное рѣшеніе этого рода задачъ, все-таки мы получили-бы только весьма неполное представленіе объ указанномъ интересномъ отдѣлѣ анализа, если-бы мы этимъ ограничили его назначеніе. Дѣйствительно, отвлеченная мысль о двухъ различныхъ видахъ дифференцированія, очевидно, примѣнима не только къ тѣмъ случаямъ, для которыхъ она была создана, но также и къ тѣмъ, которые по какой-бы то ни было причинѣ допускаютъ два различныхъ способа измѣненія однихъ и тѣхъ-же величинъ. Самъ Лагранжъ въ своей „Аналитической Механикѣ“ далъ весьма обширное и важное приложеніе варьяціоннаго исчисленія, примѣняя его для того, чтобы различать два рода измѣненіи, возникающихъ вполнѣ естественно въ задачахъ раціональной механики при разсмотрѣніи различныхъ точекъ, смотря по тому, сравниваются-ли при движеніи различныя послѣдовательныя положенія одной и той-же точки каждаго тѣла въ два непосредственно слѣдующихъ другъ за другомъ момента, или-же переходятъ отъ одной точки тѣла къ другой въ одинъ и тотъ-же моментъ. Одно изъ этихъ сравненій дастъ обыкновенные дифференціалы; другое—варьяціи. здѣсь, какъ и вездѣ, представляющія только дифференціалы, разсматриваемые съ новой точки зрѣнія.

Въ указанномъ именно общемъ смыслѣ и надо понимать варьяціонное исчисленіе, чтобы правильно оцѣнить важность этого удивительнаго логическаго орудія, самаго сильнаго изъ всѣхъ, созданныхъ до сихъ поръ человѣческимъ духомъ.

Такъ какъ методъ варьяцій является только обширнымъ распространеніемъ общаго трансцендентнаго анализа, то мнѣ не нужно особо устанавливать, что его можно разсматривать съ различныхъ основныхъ точекъ зрѣнія, допускаемыхъ исчисленіемъ косвенныхъ функцій во всей его совокупности. Лагранжъ пришелъ къ варьяціонному исчисленію, исходя изъ метода безконечно малыхъ въ собственномъ смыслѣ слова, и притомъ гораздо раньше, чѣмъ онъ предпринялъ общее преобразованіе трансцендентнаго анализа. Когда-же оно было выполнено, онъ безъ труда показалъ, какъ можно примѣнить его идею и къ варьяціонному исчисленію, которое онъ затѣмъ изложилъ достаточно подробно съ точки зрѣнія теоріи производныхъ функцій. Но чѣмъ труднѣе для нашего ума примѣненіе метода варьяцій вслѣдствіе высокой степени абстрактности разсматриваемыхъ тамъ идей, тѣмъ важнѣе при примѣненіи его беречь наши умственныя силы и въ виду этого избрать самую прямую и простую аналитическую концепцію, т. е. концепцію Лейбница. Поэтому и Лагранжъ постоянно предпочиталъ эту концепцію при всѣхъ важныхъ примѣненіяхъ варьяціоннаго исчисленія, сдѣланныхъ имъ въ *аналитической механикѣ*; въ этомъ отношеніи среди геометровъ не существуетъ ни малѣйшаго разногласія.

Чтобы съ возможной полнотой выяснить философскій характеръ варьяціоннаго исчисленія, я считаю нужнымъ закончить краткимъ указаніемъ на одно соображеніе, которое кажется мнѣ важнымъ и съ помощью котораго я могу поставить варьяціонное исчисленіе гораздо ближе къ обыкновенному трансцендентному анализу, чѣмъ, какъ мнѣ кажется, сдѣлалъ это Лагранжъ *). Слѣдуя Лагранжу, въ прошлой лекціи мы замѣтили, что исчисленіе частныхъ производныхъ, созданное д'Аламберомъ, ввело въ трансцендентный анализъ новую элементарную идею, а именно—понятіе о двухъ видахъ различныхъ и независимыхъ другъ отъ друга приращеній, получаемыхъ функціей отъ двухъ перемѣнныхъ вслѣдствіе приращенія каждой перемѣнной отдѣльно. Такъ вертикальная ордината поверхности или всякая другая величина, къ ней относящаяся, измѣняется двумя совершенно различными способами, которые могутъ слѣдовать самымъ разнымъ законамъ, если мы заставимъ возрастать то одну, то другую изъ двухъ горизонтальныхъ координатъ. Это соображеніе, какъ мнѣ кажется, по своей природѣ весьма близко къ положенію, служащему общимъ основаніемъ метода варьяцій; послѣдній, дѣйствительно, въ сущности только перенесъ на независимыя перемѣнныя воззрѣніе, принятое уже при разсмотрѣніи функцій этихъ перемѣнныхъ, и тѣмъ въ высшей степени расширилъ приложенія это взгляда. Вслѣдствіе этого, какъ я думаю, съ точки зрѣнія основныхъ идей можно считать, что созданное д'Аламберомъ исчисленіе установило естественный и необходимый переходъ отъ обыкновеннаго исчисленія безконечно малыхъ къ варьяціонному исчисленію, и такое происхожденіе послѣдняго, какъ мнѣ кажется, разъясняетъ и упрощаетъ самое пониманіе его.

На основаніи различныхъ указанныхъ въ этой лекціи соображеній методъ варьяцій является какъ наивысшая изъ извѣстныхъ до сихъ поръ степень совершенства анализа косвенныхъ функцій. Въ первоначальномъ своемъ состояніи этотъ анализъ оказался могущественнымъ и общимъ средствомъ для облегченія математическаго изученія естественныхъ явленій, такъ какъ онъ для выраженія ихъ законовъ ввелъ въ разсмотрѣніе вспомогательныя величины, избранныя такимъ образомъ, что опредѣленіе ихъ отношеній по необходимости проще и легче, чѣмъ опредѣленіе отношенія между прямыми величинами. Но для составленія этихъ дифференціальныхъ уравненій тогда еще не было выработано общихъ и абстрактныхъ правилъ. Варьяціонный анализъ, разсматриваемый съ наиболѣе философской точки зрѣнія, можетъ считаться предназначеннымъ по своей природѣ ввести, на сколько это возможно, въ область исчисленія самое установленіе дифференціальныхъ уравненій: таково именно во многихъ важныхъ и трудныхъ задачахъ общее зна-

---

*) Впослѣдствіи я намѣренъ развить эти новыя соображенія въ спеціальной работѣ о варьяціонномъ исчисленіи, цѣлью коей служитъ представленіе всей совокупности этого гипертрансцендентнаго анализа съ новой точки зрѣнія, могущей, какъ я думаю, еще болѣе увеличить его общее значеніе.

ченіе *варьяціонныхъ* уравненій, еще болѣе *косвенныхъ*, чѣмъ простыя дифференціальныя уравненія, но составляемыхъ гораздо легче: изъ нихъ, съ помощью неизмѣнныхъ и стройныхъ аналитическихъ пріемовъ, имѣющихъ цѣлью исключеніе вспомогательныхъ безконечно малыхъ величинъ новаго порядка, получаются обыкновенныя дифференціальныя уравненія, которыя часто было-бы совершенно невозможно установить непосредственно. Итакъ, методъ варьяцій составляетъ высшую часть обширной системы математическаго анализа, исходящаго изъ простѣйшихъ элементовъ алгебры и создающаго съ помощью непрерывнаго ряда идей общія и все болѣе и болѣе сильныя орудія для глубокаго изученія естественной философіи: эта система во всей своей совокупности представляетъ стоящій внѣ всякаго сравненія, самый внушительный и самый наглядный памятникъ дѣятельности человѣческаго духа. Слѣдуетъ однако также признать, что такъ какъ разсматриваемыя обыкновенно въ варьяціонномъ исчисленіи понятія болѣе косвенны, общи и, въ особенности, болѣе абстрактны, чѣмъ всякія другія, то примѣненіе этого метода требуетъ по необходимости постояннаго и самаго высшаго напряженія умственной дѣятельности, чтобы не терять изъ вида предметъ изслѣдованія въ разсужденіяхъ, дающихъ уму мало опредѣленныхъ точекъ опоры, гдѣ знаки почти никогда не приносятъ никакой пользы. Этой неизбѣжной трудности несомнѣнно надо главнымъ образомъ приписать, почему геометры, за исключеніемъ Лагранжа, до сихъ поръ такъ мало воспользовались его удивительной концепціей.

Девятая лекція.

Общія соображенія объ исчисленіи конечныхъ разностей.

Основныя соображенія, указанныя въ предыдущихъ пяти лекціяхъ, представляютъ всѣ существенные пункты полнаго изложенія математическаго анализа, разсматриваемаго съ философской точки зрѣнія. Тѣмъ не менѣе, чтобы не упустить ни одной общей и важной идеи, относящейся къ этому анализу, и прежде чѣмъ перейти къ философскому изученію конкретной математики, я считаю долгомъ разъяснить самымъ краткимъ образомъ истинный характеръ одной весьма обширной части исчисленія, которая хотя и входитъ въ составъ обыкновеннаго анализа, но обыкновенно признается по природѣ своей существенно отличной отъ него. Я имѣю въ виду *исчисленіе конечныхъ разностей*, составляющее спеціальный предметъ этой лекціи.

Исчисленіе конечныхъ разностей, созданное Тэйлоромъ въ знаменитомъ его трудѣ, озаглавленнымъ „*Методы приращеній*", состоитъ по существу своему, какъ это извѣстно, въ разсмотрѣніи конечныхъ приращеній, получаемыхъ функціями вслѣдствіе конечныхъ же приращеній соотвѣтствующихъ перемѣнныхъ. Эти приращенія или *разности*, которымъ присвается знакъ Δ, чтобы отличить ихъ отъ дифференціаловъ или приращеній безконечно малыхъ, въ свою очередь могутъ быть разсматриваемы какъ новыя функціи и къ нимъ можно примѣнить вновь подобное же разсужденіе, и т. д.; такимъ образомъ возникаетъ новое понятіе о послѣдовательныхъ разностяхъ различныхъ порядковъ, аналогичныхъ, покрайней мѣрѣ по внѣшнему виду, порядкамъ дифференціаловъ. Исчисленіе разностей, какъ и исчисленіе косвенныхъ функцій, представляетъ, очевидно, два главныхъ класса вопросовъ: 1) опредѣлить послѣдовательныя разности различныхъ аналитическихъ функцій съ одной или многими перемѣнными, соотвѣтствующія извѣстному ряду конечныхъ приращеній независимыхъ перемѣнныхъ, обыкновенно въ предположеніи, что эти приращенія идутъ въ ариѳметической прогрессіи; 2) наоборотъ, исходя изъ разностей, или, вообще, изъ нѣкоторыхъ уравненій, установленныхъ между разностями, опредѣлить первообразныя функціи, или соотвѣтственныя уравненія между ними. На этомъ замѣчаніи основывается дѣленіе всего исчисленія на два различныхъ исчисленія, которымъ обыкновенно дается названія *прямаго исчисленія* *конечныхъ разностей* и *обратнаго исчисленія конечныхъ разностей.* Каждое изъ этихъ двухъ исчисленій, конечно, подлежитъ раціональнымъ образомъ дальнѣйшему подраздѣленію, подобному изложенному въ 7-й лекціи относительно дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія: это сходство освобождаетъ меня отъ обязанности говорить объ указанныхъ подраздѣленіяхъ особо.

Несомнѣнно, что Тэйлоръ съ помощью своей идеи надѣялся создать исчисленіе, совершенно новое по природѣ, безусловно отличное отъ обыкновеннаго анализа и болѣе общее, чѣмъ исчисленіе Лейбница, хотя и основанное на аналогичныхъ соображеніяхъ. Также отнеслись къ анализу Тэйлора почти всѣ геометры, но Лагранжъ, съ свойственной ему глубиной, выяснилъ, что всѣ эти свойства принадлежатъ скорѣе формѣ и принятой Тэйлоромъ системѣ обозначеній, чѣмъ самой сущности его теоріи. Дѣйствительно, для анализа Лейбница отличительной чертой, придающей ему характеръ въ самомъ дѣлѣ новаго и высшаго исчисленія, является то обстоятельство, что производныя вообще имѣютъ совершенно иную природу, чѣмъ первообразныя функціи, и поэтому отношенія между первыми устанавливаются проще и легче; отсюда и вытекаютъ замѣчательныя основныя свойства трансцендентнаго анализа, указанныя въ предыдущихъ лекціяхъ.—Но *разности,* разсматриваемыя Тэйлоромъ, совсѣмъ не удовлетворяютъ этому условію. Разности по природѣ своей представляютъ функціи существенно подобныя первоначальнымъ; это свойство не даетъ имъ возможности облегчить установленіе уравненій и вмѣстѣ съ тѣмъ не позволяетъ приводить къ болѣе общимъ соотношеніямъ. Всякое уравненіе въ конечныхъ разностяхъ по существу представляетъ уравненіе, относящееся непосредственно къ самимъ величинамъ, послѣдовательныя значенія которыхъ и сравниваются. Нагроможденіе новыхъ знаковъ, которое вводитъ въ заблужденіе относительно истиннаго характера этихъ уравненій, скрываетъ это тождество, однако, только весьма несовершеннымъ образомъ, ибо всегда возможно безъ труда обнаружить его, замѣняя постоянно разности соотвѣтственными комбинаціями первоначальныхъ величинъ, такъ какъ разности представляютъ въ дѣйствительности лишь сокращенныя обозначенія послѣднихъ. Такимъ образомъ исчисленіе Тэйлора ни въ одномъ вопросѣ геометріи или механики никогда не оказывало и не могло оказывать той общей и могущественной помощи, которыя необходимымъ образомъ вытекаетъ изъ анализа Лейбница. Лагранжъ очень твердо установилъ, что мнимая аналогія, будто бы замѣчаемая между исчисленіемъ разностей и исчисленіемъ безконечно малыхъ, совершенно неправильна въ томъ смыслѣ, что формулы, относящіяся къ первому исчисленію, никогда не даютъ въ видѣ частныхъ случаевъ формулъ, относящихся ко второму, природа котораго по существу иная.

На основаніи совокупности только что указанныхъ соображеній я нахожу, что исчисленіе конечныхъ разностей обыкновенно неправильно относится къ собственно трансцендентному анализу, т. е. къ исчисленію косвенныхъ функцій. Наоборотъ, присоединяясь вполнѣ къ важнымъ замѣчаніямъ Лагранжа, недостаточно еще оцѣненнымъ, я считаю это исчисленіе за очень обширную и очень важную часть обыкновеннаго анализа или, какъ я его называю, исчисленія прямыхъ функцій. Дѣйствительно, какъ мнѣ кажется, истинный философскій характеръ исчисленія разностей въ томъ и состоитъ, что уравненія, въ немъ разсматриваемыя, несмотря на обозначенія, представляютъ просто *прямыя* уравненія.

Чтобы предыдущее объясненіе сдѣлать насколько возможно точнымъ, слѣдуетъ признать, что исчисленіе Тэйлора дѣйствительнымъ своимъ предметомъ имѣетъ общую теорію *рядовъ*, изученныхъ до этого знаменитаго геометра только въ нѣкоторыхъ наиболѣе простыхъ случаяхъ. Строго говоря, я долженъ былъ бы упомянуть объ этой важной теоріи въ пятой лекціи при разсмотрѣніи собственно алгебры, обширную часть которой и составляетъ эта теорія. Но чтобы избѣжать повтореній, я предпочелъ остановиться на ней говоря объ исчисленіи конечныхъ разностей, представляющемъ въ самомъ простомъ и общемъ выраженіи, во всемъ своемъ объемѣ, раціональное и полное изслѣдованіе вопросовъ, относящихся къ рядамъ.

Всякій *рядъ* или послѣдовательность чиселъ, выводимыхъ одно изъ другаго на основаніи нѣкотораго постояннаго закона, даетъ мѣсто слѣдующимъ двумъ основнымъ вопросамъ: 1) предполагая, что законъ составленія ряда извѣстенъ, найти выраженіе его общаго члена такъ, чтобы возможно было вычислить непосредственно какой угодно членъ ряда, не составляя послѣдовательно всѣхъ предшествующихъ членовъ; 2) опредѣлить при томъ же условіи сумму нѣкотораго числа членовъ ряда въ функціи ихъ положенія въ ряду такъ, чтобы возможно было найти эту сумму, не прибѣгая къ послѣдовательному сложенію одного члена съ другими. Если предположить, что эти два основныхъ вопроса рѣшены, то можно, кромѣ того, предложить себѣ, наоборотъ, найти законъ ряда на основаніи вида его общаго члена или выраженія суммы. Каждая изъ этихъ различныхъ задачъ тѣмъ обширнѣе и тѣмъ труднѣе, чѣмъ большее число различныхъ законовъ составленія рядовъ можно себѣ представить, принимая во вниманіе число предшествующихъ членовъ, черезъ которые каждый членъ выражается непосредственно, и видъ функцій, дающихъ это выраженіе. Можно даже разсматривать ряды съ нѣсколькими перемѣнными индексами, какъ это дѣлалъ Лапласъ въ *Аналитической теоріи вѣроятностей*, съ помощью пріемовъ, которымъ онъ далъ названіе *Теоріи производящихъ функцій*, хотя эта теорія представляетъ въ дѣйствительности новую и высшую вѣтвь исчисленія конечныхъ разностей или общей теоріи рядовъ.

Общія замѣчанія, только что указанныя мною, даютъ несовершенное только представленіе объ объемѣ и дѣйствительно безконечномъ разнообразіи задачъ, поставленныхъ геометрами на основаніи одного изслѣдованія рядовъ, повидимому такого простого и такъ ограниченнаго въ своемъ исходномъ пунктѣ. Это изслѣдованіе по необходимости представляетъ столько-же различныхъ случаевъ, какъ и алгебраическое рѣшеніе уравненій, разсматриваемое во всемъ его объемѣ, но по природѣ своей оно гораздо сложнѣе и притомъ, для полученія полнаго рѣшенія, всегда нуждается въ помощи послѣдняго. Этого указанія достаточно, чтобы предугадать, насколько велико должно быть несовершенство исчисленія конечныхъ разностей, несмотря на цѣлый рядъ трудовъ многихъ перворазрядныхъ ученыхъ. Дѣйствительно, мы до сихъ поръ владѣемъ полнымъ и раціональнымъ рѣшеніемъ только самыхъ простыхъ вопросовъ этого исчисленія.

Теперь не трудно уже убѣдиться въ неизбѣжномъ и полномъ тождествѣ исчисленія конечныхъ разностей и теоріи рядовъ, взятой во всемъ ея объемѣ, тождествѣ, о которомъ я, слѣдуя указаніямъ Лагранжа, упомянулъ уже выше. Дѣствительно, всякое дифференцированіе по способу Тэйлора приводится, очевидно, къ нахожденію закона образованія ряда съ однимъ или многими перемѣнными индексами на основаніи выраженія общаго его члена; равнымъ образомъ цѣлью всякаго аналогичнаго интегрированія можно считать суммированіе нѣкотораго ряда, общій членъ котораго выраженъ данной разностью. Въ этомъ отношеніи различныя задачи прямаго и обратнаго исчисленія разностей, рѣшенныя Тэйлоромъ и его послѣдователями, имѣютъ дѣйствительно очень большое значеніе, такъ какъ касаются нѣкоторыхъ важныхъ вопросовъ, связанныхъ съ рядами. Но очень сомнительно, чтобы введенныя Тэйлоромъ форма и система обозначеній на самомъ дѣлѣ принесли существенное облегченіе при рѣшеніи задачъ этого рода. Можетъ быть въ большинствѣ случаевъ было-бы удобнѣе и навѣрно раціональнѣе замѣнять разности тѣми величинами, извѣстную комбинацію которыхъ эти разности обозначаютъ. Такъ какъ исчисленіе Тэйлора въ своемъ основаніи не заключаетъ идеи, дѣйствительно отличающей его отъ обыкновеннаго анализа, и такъ какъ вся особенность его метода заключается только въ системѣ обозначеній, то даже при самыхъ благопріятныхъ условіяхъ нельзя ожидать никакой существенной выгоды, представляя это исчисленіе отдѣльно отъ обыкновеннаго анализа, часть котораго— правда, очень обширную—оно и составляетъ. Разсмотрѣніе разностей, часто безполезное, если только оно не усложняетъ вопроса, носитъ еще, какъ мнѣ кажется, отпечатокъ эпохи, когда геометры не вполнѣ освоились съ аналитическими идеями и потому естественнымъ образомъ предпочитали спеціальныя формы для простыхъ численныхъ сравненій.

Какъ-бы то ни было, я не могу закончить этой общей характеристики исчисленія конечныхъ разностей, не указавъ на одно новое понятіе, имъ введенное и получившие затѣмъ большую важность. Я имѣю здѣсь въ виду понятіе о функціяхъ *періодическихъ* или *разрывныхъ*, сохраняющихъ постоянно одно и то-же значеніе для безконечнаго ряда подчиненныхъ извѣстному закону значеній соотвѣтствующихъ перемѣнныхъ: эти функціи необходимо прибавлять къ интеграламъ уравненія въ конечныхъ разностяхъ, чтобы придать достаточную степень общности, подобно тому, какъ для общности прибавляется простыя постоянныя произвольныя ко всѣмъ квадратурамъ. Эта идея, высказанная первоначально Эйлеромъ, послужила въ послѣднее время предметомъ очень обширныхъ работъ г. Фурье, который ввелъ ее въ общую систему анализа и указалъ въ математической теоріи теплоты такія новыя и столь существенныя приложенія ея, что указанная мысль, въ современномъ ея видѣ, принадлежитъ на самомъ дѣлѣ исключительно ему.

Чтобы вполнѣ выяснить философскій характеръ исчисленія конечныхъ разностей, я не могу не отмѣтить здѣсь кратко главныя общія его приложенія, сдѣланныя до настоящаго времени.

На первомъ мѣстѣ, какъ самое обширное и самое важное, слѣдовало-бы поставить рѣшеніе задачъ, относящихся къ рядамъ, если-бы, на основаніи приведенныхъ выше объясненій, не надлежало признать, что общая теорія рядовъ, по природѣ своей, представляетъ самое содержаніе исчисленія Тэйлора. Если такимъ образомъ устранить этотъ обширный классъ задачъ, то наиболѣе существеннымъ и дѣйствительнымъ *приложеніемъ* анализа Тэйлора является до сихъ поръ общій методъ *интерполированія*, такъ часто и съ такой пользой находящаго себѣ примѣненіе при изслѣдованіи *эмпирическихъ* законовъ естественныхъ явленій. Задача состоитъ здѣсь, какъ извѣстно, въ томъ, чтобы между извѣстными данными числами вставить другія, промежуточныя числа, подчиненныя тому-же закону, который, по предположенію, имѣетъ мѣсто для первыхъ. На этомъ главномъ приложеніи исчисленія Тэйлора можно вполнѣ провѣрить, насколько разсмотрѣніе разностей въ задачахъ, зависящихъ отъ этого анализа, какъ я это объяснилъ выше, дѣйствительно неестественно и часто стѣснительно. Въ самомъ дѣлѣ, Лангражъ замѣнилъ формулы интерполированія, выведенныя изъ обыкновеннаго алгориѳма исчисленія конечныхъ разностей, общими, гораздо болѣе простыми, которымъ нынѣ почти всегда отдается предпочтеніе и которыя были найдены прямо, не прибѣгая совсѣмъ къ постороннему понятію о разностяхъ, усложнявшихъ только задачу.

Послѣдній важный классъ приложеній исчисленія конечныхъ разностей, заслуживающій упоминанія отдѣльно отъ предыдущаго, заключается въ томъ чрезвычайно полезномъ примѣненіи этого исчисленія, которое сдѣлано въ геометріи для приближеннаго опредѣленія длины и площади любой кривой и вычисленія поверхности и объема какого угодно тѣла. Этотъ пріемъ, зависящій съ абстрактной точки зрѣнія отъ того-же аналитическаго изслѣдованія, какъ и вопросъ объ интерполированіи, часто представляетъ цѣнное дополненіе къ геометрическимъ методамъ, совершенно раціональнымъ, но во многихъ случаяхъ приводящимъ къ интегрированіямъ, пока еще невыполнимымъ, или къ очень сложнымъ вычисленіямъ.

Таковы главныя соображенія относительно исчисленія конечныхъ разностей, которыя я считаю нужнымъ указать; послѣднимъ изслѣдованіемъ заканчивается поставленная мною себѣ задача набросать философскій очеркъ абстрактной математики. Теперь мы должны приступить къ подобной-же работѣ относительно конкретной математики, здѣсь мы обратимъ особенное вниманіе на объясненіе, какимъ образомъ, въ предположеніи, что общая наука исчисленія совершена, оказалось бы возможнымъ привести, съ помощью однообразныхъ пріемовъ, къ простымъ аналитическимъ вопросамъ всѣ задачи, поставляемыя геометріей и механикой, и сообщить этимъ двумъ главнымъ основамъ натуральной философіи ту степень точности и особенно единства, однимъ словомъ— ту степень высшаго совершенства, которую только такой путь и могъ имъ придать.

Десятая лекція.

Общій обзоръ геометріи.

Послѣ общаго объясненія, приведеннаго въ третьей лекціи относительно философскаго характера конкретной математики, и сопоставленія его съ характеромъ абстрактной математики, мнѣ не нужно здѣсь доказывать особо, что на геометрію слѣдуетъ смотрѣть какъ на настоящую естественную науку, которая только гораздо проще и потому гораздо совершеннѣе, чѣмъ всякая другая. Это неизбѣжное превосходство геометріи достигнуто въ сущности благодаря примѣненію математическаго анализа,—примѣненію, для котораго геометрія представляетъ особыя удобства,—и обыкновенно вводитъ въ заблужденіе относительно истинной природы этой основной науки, признаваемой нынѣ большинствомъ за науку чисто раціональную, совершенно независящую отъ наблюденія. Тѣмъ не менѣе для всякаго, кто со вниманіемъ разсмотритъ характеръ геометрическихъ разсужденій, даже при современномъ состояніи абстрактной геометріи очевидно, что, хотя изучаемые тамъ факты связаны между собою гораздо тѣснѣе, чѣмъ относящіеся ко всѣмъ другимъ наукамъ, все таки по отношенію къ каждому тѣлу, изслѣдуемому геометрами, всегда существуетъ извѣстное число первоначальныхъ явленій, которыя не устанавливаются разсужденіемъ, могутъ быть построены слѣдовательно только на наблюденіи и составляютъ необходимое основаніе для всѣхъ другихъ выводовъ. На общее заблужденіе въ этомъ отношеніи надо смотрѣть, какъ на остатокъ вліянія духа метафизики, такъ долго господствовавшаго даже въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ. Независимо отъ своего логическаго значенія, этотъ ложный взглядъ постоянно представляетъ огромныя неудобства въ приложеніяхъ раціональной геометріи, такъ какъ затрудняетъ переходъ отъ конкретнаго къ абстрактному.

Научное превосходство геометріи зависитъ вообще отъ того, что разсматриваемыя ею явленія по необходимости наиболѣе общи и наиболѣе просты изъ всѣхъ. Не только всѣ тѣла въ природѣ, очевидно, могутъ служить предметомъ какъ геометрическихъ такъ и механическихъ изслѣдованій, но кромѣ того, явленія геометрическія имѣли-бы мѣсто, если даже предположить, что всѣ части вселенной остаются неподвижными. Геометрія, такимъ образомъ, по своей природѣ представляетъ большую общность, чѣмъ механика. Въ тоже время ея явленія проще, такъ какъ они, очевидно, не зависятъ отъ явленій механическихъ въ то время, какъ послѣднія по необходимости усложняются первыми.

Тоже самое имѣетъ мѣсто, если сравнить геометрію съ абстрактной термологіей, которую нынѣ, послѣ работъ г. Фурье, можно считать, какъ я указалъ въ третьей лекціи, за новую общую вѣтвь конкретной математики. Дѣйствительно, явленія термическія, разсматриваемыя даже независимо отъ динамическихъ явленій, почти постоянно сопровождающихъ ихъ, особенно въ жидкихъ тѣлахъ, по необходимости зависятъ отъ геометрическихъ обстоятельствъ, такъ какъ форма тѣлъ сильно вліяетъ на распредѣленіе теплоты.

По всѣмъ этимъ различнымъ соображеніямъ мы въ предъидущемъ должны были поставить геометрію на первомъ мѣстѣ въ конкретной математикѣ, такъ какъ изученіе ея, кромѣ самостоятельнаго его значенія, служитъ еще необходимымъ основаніемъ для остальныхъ частей математики.

Прежде чѣмъ приступить непосредственно къ философскому изученію различныхъ изслѣдованій, образующихъ содержаніе современной геометріи, нужно составить себѣ ясное и точное представленіе объ общемъ назначеніи этой науки, разсматривая ее во всей совокупности. Въ этомъ и заключается предметъ настоящей лекціи.

Обыкновенно геометрію опредѣляютъ очень неясно и совершенно неправильно, ограничиваясь представленіемъ ея какъ *науки о протяженности*. Это опредѣленіе слѣдовало бы прежде всего улучшить, указавъ для большей точности, что геометрія имѣетъ цѣлью *измѣреніе* протяженности. Но и такое опредѣленіе, хотя въ сущности и точное, было-бы само по себѣ недостаточно, ибо столь неопредѣленное указаніе совсѣмъ не можетъ познакомить съ истиннымъ общимъ характеромъ геометріи.

Чтобы достичь этой цѣли, я считаю нужнымъ предварительно разъяснить два основныя понятія, очень простыя сами по себѣ, но чрезвычайно затемненныя примѣненіемъ метафизическихъ соображеній.

На первомъ мѣстѣ я ставлю понятіе о *пространствѣ*, послужившее для метафизиковъ предметомъ столькихъ софистическихъ разсужденій и такихъ пустыхъ и дѣтскихъ споровъ. Если это понятіе привести къ положительному его смыслу, то окажется, что оно состоитъ просто въ томъ, что вмѣсто разсмотрѣнія протяженности въ самыхъ тѣлахъ, мы представляемъ ихъ въ нѣкоторой неопредѣленной средѣ, которая, по нашему предположенію, заключаетъ въ себѣ всѣ тѣла вселенной. Это понятіе возникаетъ естественнымъ образомъ изъ наблюденія, именно какъ представленіе объ *отпечаткѣ*, который тѣло, помѣщенное въ жидкость, оставляетъ въ ней. Дѣйствительно, ясно, что съ геометрической точки зрѣнія такой *отпечатокъ* можетъ быть подставленъ вмѣсто самого тѣла, и разсужденія наши ни въ чемъ не измѣнятся.

Что же касается физической природы этаго неопредѣленнаго *пространства*, то для большей простоты мы должны представлять его себѣ подобнымъ той дѣйствительной средѣ, въ которой мы живемъ, такъ что если бы эта среда была не газообразной, а жидкой, то мы и геометрическое *пространство* представляли бы себѣ жидкимъ. Это обстоятельство, однако, очевидно имѣетъ совершенно второстепенное значеніе и главная цѣль подобнаго представленія—дать намъ только возможность разсматривать протяженность независимо отъ самого тѣла. Легко понять à priori важность этого основнаго представленія, такъ какъ оно позволяетъ намъ изучать геометрическія явленія сами по себѣ, отбросивъ всѣ другія явленія, постоянно сопровождающія первыя въ тѣлахъ физическихъ, но не имѣющія однако на нихъ ни какого вліянія. Прочная постановка подобнаго отвлеченія должна считаться первымъ шагомъ на пути раціональнаго изученія геометріи, которое было бы невозможно, если бы намъ необходимо было вмѣстѣ съ формой и величиной тѣлъ принимать во вниманіе и всѣ другія ихъ физическія свойства. Примѣненіе подобной гипотезы—самой древней, можетъ быть, философской идеи, созданной человѣческимъ духомъ—настолько стало теперь обычнымъ, что намъ трудно точно измѣрить все ея значеніе и оцѣнить послѣдствія, которыя бы имѣло бы ея устраненіе.

Геометрическія соображенія, получивъ указаннымъ образомъ абстрактный характеръ, сдѣлались не только проще, но и пріобрѣли большую общность. До тѣхъ поръ, пока протяженность разсматривалась въ связи съ самыми тѣлами, за предметъ изслѣдованія можно было брать только дѣйствительно существующія въ природѣ формы, что чрезвычайно ограничивало поле геометрическихъ изслѣдованій. Наоборотъ, представляя себѣ протяженность въ *пространствѣ*, человѣческій духъ можетъ разсматривать всѣ формы, которыя только возможно вообразить; это обобщеніе необходимо, чтобы дать геометріи совершенно раціональный характеръ.

Второе геометрическое представленіе, которое мы должны предварительно разсмотрѣть, есть представленіе о различныхъ видахъ протяженности, обозначаемыхъ словами *тѣло*, *) *поверхность*, *линія* и даже *точка*, обычное объясненіе коихъ такъ мало удовлетворительно.

Хотя, очевидно, невозможно вообразить себѣ какую нибудь протяженность, лишенную безусловно хотя-бы одного изъ трехъ основныхъ измѣреній, тѣмъ не менѣе неоспоримо, что во множествѣ случаевъ, имѣющихъ даже непосредственное практическое значеніе, геометрическія задачи зависятъ только отъ двухъ измѣреній, разсматриваемыхъ отдѣльно отъ третьяго, и даже отъ одного измѣренія, разсматриваемаго отдѣльно отъ двухъ другихъ. Съ другой стороны, помимо указаннаго прямого основанія, изученіе протяженности одного измѣренія, а затѣмъ двухъ измѣреній является, очевидно, необходимой подготовительной ступенью для облегченія изученія собственно тѣлъ, т. е. тѣлъ трехъ измѣреній, непосредственное изслѣдованіе которыхъ было бы слишкомъ сложно. Въ силу только что изложенныхъ двухъ общихъ соображеній геометры вынуждены разсматривать отдѣльно протяженности по отношенію къ одному, двумъ или всѣмъ тремъ измѣреніямъ.

Человѣческій духъ создалъ себѣ общія понятія о *поверхности* и *линіи* именно съ тѣмъ, чтобы имѣть возможность постоянно сосредоточивать вниманіе на протяженности только одного или двухъ измѣреній. Гиперболическія выраженія, обыкновенно употребляемые геометрами для опредѣленія этихъ понятій, приводятъ къ неправильному

*) Лакруа правильно возражаетъ противъ выраженія „твердое тѣло" (Solide) принятаго у геометровъ для обозначенія тѣла вообще. Дѣйствительно, очевидно, что, когда мы хотимъ разсмотрѣть отдѣльно нѣкоторую часть неопредѣленнаго *пространства*, представляющагося газообразнымъ, то мы въ воображеніи дѣлаемъ твердою внѣшнюю его оболочку, такъ что для нашего ума *линія* и *поверхность*—такія-же *твердыя тѣла*, какъ и тѣло вообще. Можно даже замѣтить, что чаще всего, дабы легче представить себѣ, какъ тѣла входятъ одно въ другое, мы должны воображать *тѣла* пустыми внутри, что особенно ясно показываетъ неудобство употребленія термина *твердое тѣло*.

ихъ пониманію. Назначеніе понятій о поверхности и линіи, разсматриваемыхъ самихъ по себѣ, состоитъ исключительно въ томъ, чтобы дать намъ возможность съ большей легкостью разсуждать объ этихъ двухъ видахъ протяженности, совершенно отстраняя все то, что здѣсь не должно быть принимаемо въ соображеніе. Достаточно съ этой цѣлью вообразить себѣ, что измѣреніе, которое желательно исключить, уменьшается все болѣе и болѣе, въ то время какъ другія измѣренія остаются безъ измѣненія, и доходитъ до такихъ предѣловъ малости, что уже неможетъ сосредоточить на себѣ нашего вниманія. Именно этимъ способомъ естественно пріобрѣтается истинное понятіе о *поверхности*, а повтореніемъ той-же операціи — т. е. устраненіемъ ширины подобному тому, какъ раньше была устроена глубина,—и понятіе о *линіи*. Наконецъ, если повторить этотъ процессъ еще разъ, мы дойдемъ до понятія о *точкѣ* или о протяженности, разсматриваемой только относительно мѣста, совершенно независимо отъ величины ея и по этому предназначенной исключительно для точнаго указанія на положеніе. Кромѣ того, очевидно, поверхности свойственно вообще точно отдѣлять тѣла другъ отъ друга; въ свою очередь, линіи раздѣляютъ поверхности, и, съ своей стороны, отдѣляются точками. Это соображеніе, значеніе котораго часто слишкомъ преувеличивается, должно занимать однако только второстепенное мѣсто.

И такъ, въ дѣйствительности мы всегда представляемъ себѣ поверхности и линіи съ тремя измѣреніями; въ самомъ дѣлѣ, не возможно вообразить себѣ какую бы то нибыло поверхность иначе, какъ чрезвычайно тонкую пластинку, и линію иначе, какъ безконечно тонкую нить. Очевидно даже, что степень малости, придаваемая каждымъ индивидуумомъ измѣреніямъ, которыя онъ хочетъ устранить, не всегда тождественна, такъ какъ она зависитъ отъ остроты его обычныхъ геометрическихъ наблюденій. Впрочемъ, этотъ недостатокъ однообразія не влечетъ за собою никакого дѣйствительнаго неудобства, такъ какъ для того, чтобы поверхность и линія удовлетворяли основному условію своего назченія, достаточно, если каждый представитъ себѣ измѣренія, подлежащія устраненію, меньшими, чѣмъ всѣ тѣ, величину которыхъ онъ имѣлъ случай опредѣлять въ своихъ ежедневныхъ наблюденіяхъ.

Безъ сомнѣнія, слѣдуетъ сожалѣть, что до сихъ поръ еще въ трудѣ, подобномъ нашему, надо приводить такія простыя объясненія, какъ предъидущее, но я считалъ необходимымъ бѣгло указать на эти соображенія въ виду того онтологическаго тумана, которымъ ложныя воззрѣнія на предметъ обыкновенно покрываютъ эти первоначальныя понятія. Изъ вышеизложеннаго видно, насколько лишены всякаго здраваго смысла фантастическія разсужденія метафизиковъ объ основаніяхъ геометріи. Надо также замѣтить, что обыкновенно эти первоначальныя идеи излагаются геометрами недостаточно философскимъ образомъ, такъ какъ они, напримѣръ, располагаютъ понятія о различныхъ видахъ протяженностей въ порядкѣ, абсолютно противоположномъ ихъ естественной связи, что при элементарномъ преподаваніи часто порождаетъ весьма серьезныя затрудненія.

Установивъ эти предварительныя положенія, мы теперь прямо можемъ перейти къ общему опредѣленію геометріи, постоянно считая цѣлью ея *измѣреніе* протяженностей.

Въ этомъ отношеніи здѣсь необходимо остановиться на внимательномъ разсмотрѣніи предмета, исходя изъ различія трехъ родовъ протяженностей, такъ какъ самое понятіе объ *измѣреніи* по отношенію къ поверхностямъ и объемамъ не вполнѣ тождественно съ измѣреніемъ линій; безъ такого изслѣдованія мы составили-бы себѣ ложное понятіе о природѣ геометрическихъ вопросовъ.

Если мы возьмемъ слово *измѣреніе* въ его прямомъ и общемъ математическомъ значеніи, т. е. только въ смыслѣ вычисленія *отношеній* между какими-нибудь однородными величинами, то слѣдуетъ принять во вниманіе, что въ геометріи *измѣреніе* площадей и объемовъ, въ противоположность измѣренію линій, даже въ самыхъ простыхъ и благопріятныхъ случаяхъ, никогда не понимается, какъ непосредственно выполнимое. Сравненіе двухъ линій признается за прямое сравненіе, но двѣ площади или два объема, наоборотъ, всегда сравниваются только косвенно. Въ самомъ дѣлѣ, понятно, что двѣ линіи могутъ быть налагаемы одна на другую, но, очевидно, наложеніе двухъ поверхностей и тѣмъ болѣе двухъ тѣлъ выполнить въ большинствѣ случаевъ совершенно невозможно; даже тамъ, гдѣ такого рода сравненіе на практикѣ безусловно осуществимо, оно всегда оказывается неудобнымъ и не можетъ быть проведено съ полной точностью. Поэтому необходимо объяснить, въ чемъ собственно говоря состоитъ истинное геометрическое измѣреніе поверхности или объема.

Для указанной цѣли надо принять во вниманіе, что какова-бы ни была форма тѣла, всегда существуетъ извѣстное число болѣе или менѣе легко опредѣляемыхъ линій, зная длины которыхъ можно точно вычислить площадь или объемъ всего тѣла. Геометрія, считая эти линіи единственными доступными для непосредственнаго измѣренія величинами, задается цѣлью вывести, исходя изъ опредѣленія этихъ только линій, отношеніе искомыхъ площадей или объемовъ къ единицѣ площади или единицѣ объема. Такимъ образомъ общей задачей геометріи по отношенію къ поверхностямъ или тѣламъ является приведеніе всѣхъ сравненій ихъ площадей или объемовъ къ простымъ сравненіямъ нѣкоторыхъ линій.

Кромѣ огромнаго облегченія, приносимаго такимъ преобразованіемъ для самаго измѣренія площадей и объемовъ, изъ него-же, если это преобразованіе разсматривать шире и болѣе научнымъ образомъ, вытекаетъ возможность привести къ задачамъ о линіяхъ всѣ вопросы, которые можно поставить относительно поверхностей и тѣлъ съ точки зрѣнія ихъ величины. Таково часто наиболѣе важное назначеніе геометрическихъ выраженій, опредѣляющихъ площади или объемы въ функціи соотвѣтствующихъ линій.

Изъ предъидущаго не слѣдуетъ, однако, что непосредственныя сравненія площадей или объемовъ другъ съ другомъ никогда не производятся, но такія измѣренія не считаются чисто геометрическими и въ нихъ видятъ только иногда необходимое, но очень рѣдко примѣнимое дополненіе геометріи, вызываемое несовершенствомъ или трудностью дѣйствительно раціональныхъ пріемовъ. Такимъ именно образомъ часто опредѣляютъ объемъ тѣла и въ нѣкоторыхъ случаяхъ даже его площадь на основаніи его вѣса. Точно также въ другихъ случаяхъ, когда можно замѣстить объемъ даннаго тѣла равнымъ ему объемомъ жидкости, устанавливаютъ непосредственно сравненіе двухъ объемовъ, пользуясь свойствомъ жидкихъ тѣлъ легко принимать всякія формы, какія намъ угодно придать имъ; но всѣ способы этого рода—чисто механическія, и раціональная геометрія по необходимости должна отбросить ихъ.

Чтобы сдѣлать нагляднѣе различіе между этими пріемами и истинно геометрическими измѣреніями, я укажу на одинъ весьма замѣчательный примѣръ, а именно на способъ, съ помощью котораго Галилей опредѣлилъ отношеніе площади обыкновенной циклоиды къ площади производящаго круга. Геометрія въ его время стояла еще слишкомъ низко, чтобы дать раціональное рѣшеніе такой задачи, и потому Галилей пытался найти это отношеніе прямымъ опытомъ. Взвѣсивъ по возможности точно двѣ пластинки изъ одного и того-же вещества и одной и той-же толщины, изъ коихъ одна имѣла форму круга, а другая описанной имъ циклоиды, Галилей нашелъ, что послѣдняя была постоянно въ три раза тяжелѣе первой. Отсюда онъ заключилъ, что площадь циклоиды равна тройной площади производящаго круга, и получилъ такимъ образомъ результатъ, согласный съ истиннымъ рѣшеніемъ, найденнымъ позднѣе Паскалемъ и Валлисомъ. Такой успѣхъ, который, впрочемъ, не ввелъ Галилея въ заблужденіе, зависитъ, конечно, отъ крайней простоты искомаго дѣйствительнаго отношенія; легко понять неизбѣжную недостаточность подобнаго рода пріемовъ даже въ тѣхъ случаяхъ, когда они практически осуществимы.

Изъ всего предыдущаго ясно видно, въ чемъ собственно состоятъ части геометріи, относящіяся къ поверхностямъ и тѣламъ, но не такъ отчетливо опредѣляется характеръ геометріи линій, такъ какъ мы для упрощенія изложенія какъ бы признали, что измѣреніе линій производится непосредственно; нужно поэтому дополнить объясненіе по отношенію къ линіямъ.

Съ этой цѣлью достаточно указать на различіе между прямой и кривыми линіями, такъ какъ только измѣреніе первой считается непосредственно возможнымъ, измѣреніе же вторыхъ всегда признается косвеннымъ. Хотя иногда наложеніе безусловно осуществимо даже для кривыхъ линій, тѣмъ не менѣе, очевидно, что дѣйствительно раціональная геометрія должна его по необходимости отбросить, такъ какъ этотъ способъ, даже когда онъ примѣнимъ, не представляетъ достаточной точности. Поэтому общей цѣлью геометріи линій постоянно является приведеніе измѣренія кривыхъ линій къ измѣренію прямыхъ, и, слѣдовательно, съ болѣе широкой точки зрѣнія, приведеніе всѣхъ вопросовъ относительно величинъ, связанныхъ съ различными кривыми, къ задачамъ относящимся только къ прямымъ линіямъ. Что бы понять возможность такого преобразованія, нужно замѣтить, что во всякой кривой постоянно связаны извѣстныя прямыя, длина которыхъ можетъ вполнѣ опредѣлить длину кривой. Такъ по длинѣ радіуса круга можно, очевидно, опредѣлить длину окружности; такимъ же образомъ, длина эллипса зависитъ отъ длины его двухъ осей; длина циклоиды — отъ діаметра производящаго круга и т. д.; если вмѣсто изслѣдованія длины всей кривой требуется опредѣлить вообще длину какой нибудь дуги ея, то достаточно къ различнымъ опредѣляющимъ кривую прямолинейнымъ параметрамъ прибавить длину хорды данной дуги или же координаты ея крайнихъ точекъ. Нахожденіе отношенія между длиной кривой линіи и длиной подобныхъ прямыхъ линій представляетъ по существу общую задачу той части геометріи, которая занимается изученіемъ линій.

Сопоставляя это соображеніе съ изложенными выше замѣчаніями относительно поверхностей и тѣлъ, можно составить себѣ весьма ясное понятіе о геометріи во всей ея совокупности, признавъ ея общей цѣлью приведеніе сравненій всѣхъ родовъ протяженностей—объемовъ, площадей и длины—къ сравненіямъ однихъ прямыхъ линій, единственнымъ, признаваемымъ непосредственно выполнимыми и которыя, очевидно, не могутъ быть приведены къ другимъ, болѣе легкимъ. Такое опредѣленіе, какъ мнѣ кажется, въ одно и тоже время не только ясно выражаетъ истинный характеръ геометріи, но и даетъ возможность однимъ взглядомъ охватить всю ея пользу и совершенство.

Что бы вполнѣ закончить это важное объясненіе, мнѣ остается указать, какъ въ геометріи можетъ существовать отдѣлъ, относящійся къ прямой линіи, что на первой взглядъ кажется несовмѣстимымъ съ принципомъ, по которому измѣреніе этого класса линій должно постоянно считаться непосредственнымъ.

Измѣреніе прямыхъ линій, дѣйствительно, представляется непосредственнымъ по отношенію къ кривымъ и ко всѣмъ другимъ разсматриваемымъ въ геометріи предметамъ. Тѣмъ не менѣе очевидно, что измѣреніе прямой линіи можно считать непосредственнымъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣйствительно возможно наложить на прямую единицу мѣры. Я уже имѣлъ случай по другому поводу въ третьей лекціи подробно разъяснить, что при этомъ очень часто встрѣчаются непобѣдимыя трудности, и тогда приходится ставить измѣреніе искомой прямой въ зависимость отъ другихъ аналогичныхъ измѣреній, которыя могутъ быть осуществлены непосредственно. По необходимости, слѣдовательно, на первомъ мѣстѣ становится особый отдѣлъ геометріи, исключительно посвященный изученію прямой линіи, и имѣющей цѣлью опредѣлять однѣ прямыя линіи съ помощью другихъ, на основаніи соотношеній, свойственныхъ различнымъ фигурамъ, составляемымъ этими прямыми. Это введеніе въ геометрію, кажущееся, такъ сказать, совершенно незамѣтнымъ при разсмотрѣніи всей совокупности науки, можетъ, однако, получить весьма широкое развитіе, если задаться мыслью изучить его во всемъ объемѣ. Эта часть геометріи, очевидно, особенно важна для насъ: такъ какъ всѣ геометрическія измѣренія по возможности должны быть приведены къ измѣренію прямыхъ линій, то неосуществимость подобнаго измѣренія повлекла бы за собой неполноту рѣшенія всѣхъ геометрическихъ вопросовъ.

Такова естественная связь основныхъ частей раціональной геометріи. Чтобы при общемъ ея изученіи слѣдовать дѣйствительно догматическому порядку, надо, очевидно, прежде всего разсмотрѣть геометрію линій, начиная съ прямыхъ, затѣмъ перейти къ геометріи поверхностей и закончить геометріей тѣлъ. Несомнѣнно, должно даже удивляться, что не всегда слѣдуютъ указанной методической классификаціи, вытекающей такъ просто изъ самой природы науки.

Опредѣливъ точно общій и конечный предметъ геометрическихъ изслѣдованій, надо теперь разсмотрѣть эту науку съ точки зрѣнія объема каждой изъ трехъ ея основныхъ частей.

Съ этой точки зрѣнія геометрія, по природѣ своей, можетъ очевидно получить распространеніе совершенно неопредѣленное, такъ какъ измѣреніе линій, площадей и объемовъ по необходимости представляетъ столько отдѣльныхъ задачъ, сколько можно вообразить себѣ различныхъ формъ, поддающихся точному опредѣленію: число же подобныхъ формъ, очевидно, безконечно.

Геометры ограничивали прежде свои изслѣдованія разсмотрѣніемъ наиболѣе простыхъ формъ, которыя природа давала имъ непосредственно, или которыя составлялись изъ этихъ первоначальныхъ элементовъ путемъ наименѣе сложныхъ комбинацій, но со времени Декарта они поняли, что для вполнѣ философскаго построенія науки слѣдовало бы по необходимости включить туда вообще всѣ возможныя формы. Такимъ образомъ геометры пріобрѣли разумную увѣренность въ томъ, что новая абстрактная геометрія непремѣнно охватитъ, какъ частные случаи, всѣ различныя реальныя формы, существующія въ внѣшнемъ мірѣ, и никогда не будетъ захвачена въ расплохъ. Если бы, наоборотъ, геометры навсегда ограничились разсмотрѣніемъ только естественныхъ формъ, неподготовляясь къ этому общимъ изученіемъ и спеціальнымъ изслѣдованіемъ извѣстныхъ простѣйшихъ гипотетическихъ формъ, то несомнѣнно, что въ моментъ дѣйствительнаго примѣненія геометріи чаще всего и возникали бы непобѣдимыя трудности. Необходимость изслѣдованія по возможности всѣхъ формъ, которыя можно точно представить себѣ, составляетъ такимъ образомъ основной принципъ дѣйствительно раціональной геометріи.

Самаго поверхностнаго изслѣдованія достаточно, чтобы дать понять, что подобныя формы представляютъ совершенно безконечное разнообразіе. По отношенію къ кривымъ линіямъ, если разсматривать ихъ какъ слѣды, оставляемые подчиненнымъ извѣстному закону движеніемъ точки, понятно, что мы вообще будемъ имѣть столько различныхъ кривыхъ, сколько можно представить себѣ различныхъ законовъ движенія, которое, очевидно, можетъ происходить, слѣдуя безконечному множеству самыхъ разнообразныхъ условій, хотя при этомъ иногда и можетъ случиться, что новыя условія движенія дадутъ уже полученныя при другихъ обстоятельствахъ линіи. Такъ, ограничиваясь только плоскими кривыми, можно указать, что если точка движется, оставаясь постоянно на одинаковомъ разстояніи отъ неподвижной точки, то она произведетъ окружность; если сумма или разность разстоянія точки отъ двухъ неподвижныхъ точекъ будетъ величиной постоянной, то описанная кривая будетъ эллипсомъ или гиперболой; если произведеніе этихъ разстояній будетъ величиной постоянной, то получится совершенно иная кривая; если точка постоянно равно удалена отъ неподвижной точки и неподвижной прямой, то она опишетъ параболу; если точка будетъ двигаться по кругу въ то время, какъ кругъ будетъ катиться по прямой линіи, то она опишетъ циклоиду; если точка будетъ двигаться вдоль прямой въ то время, какъ эта прямая, закрѣпленная въ одномъ изъ концовъ своихъ, вращается по какому-нибудь закону, то получатся вообще такъ называемыя спирали, которыя однѣ могутъ, очевидно, дать столько совершенно различныхъ кривыхъ, сколько можно сдѣлать предположеній о различныхъ отношеніяхъ между поступательнымъ и вращательнымъ движеніями и т. д. Каждая изъ этихъ различныхъ кривыхъ можетъ затѣмъ дать новыя кривыя съ помощью различныхъ общихъ построеній, придуманныхъ геометрами и производящихъ развертки, эпициклоиды, фокусныя кривыя и т. д. Наконецъ, очевидно, еще большее разнообразіе существуетъ среди кривыхъ двоякой кривизны.

Формы поверхностей, если послѣднія разсматривать, какъ производимыя движеніемъ линіи, представятъ, конечно, еще болѣе разнообразія. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ формы могутъ измѣняться не только въ зависимости, какъ мы видѣли и относительно линій, отъ безконечнаго числа различныхъ законовъ, которымъ можетъ быть подчинено движеніе производящихъ линій, но, кромѣ того, еще и въ зависимости отъ предположеній объ измѣненіяхъ природы самихъ производящихъ линій, измѣненіяхъ, которыя не могутъ имѣть мѣста относительно кривой, такъ какъ описывающія ихъ точки не могутъ имѣть опредѣленной фигуры. Слѣдовательно два весьма различныхъ класса условій могутъ заставить измѣняться форму поверхностей, тогда какъ форма линіи зависитъ только отъ одного класса подобныхъ условій. Безполезно указывать отдѣльно рядъ примѣровъ, которые могли бы подтвердить существованіе вдвойнѣ безконечнаго множества формъ, принимаемыхъ поверхностями. Чтобы составить себѣ объ этомъ нѣкоторое понятіе, достаточно обратить вниманіе на чрезвычайное разнообразіе, которое представляетъ классъ такъ называемыхъ *линейчатыхъ* поверхностей, т. е. поверхностей, образованныхъ движеніемъ прямой линіи, къ которымъ относятся поверхности цилиндрическія, коническія, болѣе общій видъ развертывающихся поверхностей вообще и т. д. Что же касается тѣлъ, то по отношенію къ нимъ нельзя сдѣлать особаго замѣчанія, такъ какъ они отличаются другъ отъ друга только ограничивающими ихъ поверхностями.

Что-бы закончить этотъ общій обзоръ геометріи, надо прибавить, что поверхности сами по себѣ представляютъ новый общій способъ составленія новыхъ кривыхъ, такъ какъ всякую кривую можно разсматривать, какъ мѣсто пересѣченія двухъ поверхностей. Этимъ именно путемъ и были получены впервые линіи, на которыя можно смотрѣть, какъ на дѣйствительно открытыя геометрами, ибо природа дала непосредственно только прямую линію и окружность. Какъ извѣстно, эллипсъ, парабола и гипербола, единственныя кривыя, вполнѣ изученныя древними, были вначалѣ разсматриваемы, какъ мѣсто пересѣченія круговаго конуса съ плоскостью въ различныхъ ея положеніяхъ. Очевидно, что, примѣняя всѣ эти общія способы составленія линій и поверхностей, можно получить безусловно безконечный рядъ отдѣльныхъ формъ, исходя только изъ крайне небольшого числа фигуръ, непосредственно данныхъ наблюденіями.

Наконецъ, всѣ прямые способы образованія новыхъ формъ потеряли почти все свое значеніе съ тѣхъ поръ, какъ раціональная геометрія въ рукахъ Декарта получила свой окончательный характеръ. Дѣйствительно, какъ мы убѣдимся особо въ двѣнадцатой лекціи, изобрѣтеніе новыхъ формъ приводится теперь къ составленію уравненій и нѣтъ ничего легче, какъ построеніе новыхъ линій и новыхъ поверхностей съ помощью произвольнаго измѣненія вводимыхъ въ уравненія функцій. Въ этомъ отношеніи указанный простой и абстрактный пріемъ несравненно плодотворнѣе прямыхъ геометрическимъ способовъ, хотя бы и развитыхъ съ помощью самаго сильнаго воображенія, направленнаго исключительно на этотъ рядъ идей. Кромѣ того, только что указанный пріемъ самымъ общимъ и наиболѣе понятнымъ образомъ объясняетъ намъ безконечное по необходимости разнообразіе геометрическихъ формъ, соотвѣтствующее разнообразію аналитическихъ функцій. Наконецъ, онъ не менѣе ясно показываетъ, что различныя формы поверхностей должны быть еще многочисленнѣе, чѣмъ формы линій, потому что линіи аналитически выражаются уравненіями съ двумя перемѣнными, тогда какъ поверхности даютъ мѣсто уравненіямъ съ тремя перемѣнными, которыя, конечно, представляютъ большее разнообразіе.

Указанныхъ выше соображеній достаточно, чтобы установить совершенно опредѣленно безконечное, строго говоря, распространеніе, которое по своей природѣ допускаетъ каждая изъ трехъ главныхъ частей геометріи, а именно ученіе о линіяхъ, поверхностяхъ и тѣлахъ, какъ слѣдствіе безконечнаго разнообразія самихъ подлежащихъ измѣренію величинъ.

Что-бы окончательно составить себѣ точное и достаточно широкое понятіе о природѣ геометрическихъ изслѣдованій, необходимо теперь возвратиться къ указанному выше общему опредѣленію, чтобы представить его съ новой точки зрѣнія, безъ чего совокупность науки будетъ нами понята только весьма несовершеннымъ образомъ.

Считая цѣлью геометріи измѣреніе всякого рода линій, площадей и объемовъ, т. е., какъ я это объяснилъ, приведеніе всѣхъ геометрическихъ сравненій къ простымъ сравненіямъ прямыхъ линій, мы, очевидно, имѣемъ то преимущество, что указываемъ общее назначеніе ея, очень точное и легко понятное.

Но если, устраняя всякое опредѣленіе, мы изслѣдуемъ дѣйствительный составъ геометріи, то сначала приведенное выше опредѣленіе покажется намъ слишкомъ узкимъ, такъ какъ несомнѣнно, что большая часть изслѣдованій, входящихъ въ составъ современной геометріи, повидимому совершенно не имѣетъ цѣлью *измѣреніе* протяженностей. Это именно соображеніе, вѣроятно, и удерживаетъ въ геометріи употребленіе нѣкоторыхъ неясныхъ опредѣленій, заключающихъ въ себѣ все только потому, что они ничего не характеризуютъ. Тѣмъ не менѣе, несмотря на такое серьезное возраженіе, я считаю возможнымъ настойчиво указывать на измѣреніе протяженностей, какъ на общую и однообразную цѣль всей геометріи, включая въ нее притомъ всѣ вопросы, нынѣ дѣйствительно входящіе въ ея составъ. Въ самомъ дѣлѣ, если вмѣсто того, чтобы ограничиться разсмотрѣніемъ отдѣльныхъ геометрическихъ изслѣдованій, мы постараемся выяснить главные вопросы, по сравненію съ которыми всѣ другіе, какъ бы они важны ни были, должны считаться только второстепенными, то мы въ концѣ концовъ признаемъ, что *измѣреніе* линій, площадей и объемовъ есть неизмѣнная, иногда *прямая*, а чаще всего *косвенная* цѣль всѣхъ геометрическихъ изслѣдованій. Это общее положеніе имѣетъ капитальную важность, такъ какъ только одно оно и можетъ дать нашему опредѣленію все его значеніе; по этому необходимо представить по этому предмету нѣсколько болѣе подробныхъ разъясненій.

Разсматривая со вниманіемъ геометрическія изслѣдованія, неимѣющія, повидимому, никакого отношенія къ измѣренію протяженностей, мы найдемъ, что они состоятъ по существу своему въ изученіи различныхъ *свойствъ* отдѣльныхъ линій или отдѣльныхъ поверхностей, т. е. выражаясь точнѣе, въ изученіи различныхъ способовъ происхожденія, или, по крайней мѣрѣ, опредѣленія, соотвѣтствующаго каждой разсматриваемой формѣ. Легко, однако, установить самымъ общимъ образомъ необходимую связь такого изслѣдованія съ вопросомъ объ *измѣреніи*: для него наиболѣе полное по возможности знаніе свойствъ каждой формы есть необходимое введеніе. Это положеніе доказываютъ два одинаково важныхъ, хотя и совершенно различныхъ по природѣ соображенія.

Первое, чисто научное, заключается въ замѣчаніи, что если бы по отношенію къ отдѣльнымъ линіямъ или поверхностямъ были извѣстны только тѣ характеристическія свойства, при помощи которыхъ геометры впервые опредѣлили эти линіи или поверхности, то чаще всего было бы невозможно рѣшать вопросъ объ измѣреніи ихъ. Дѣйствительно, легко понять, что различныя опредѣленія, допускаемыя нѣкоторой формой, не всѣ равно удобны для этой цѣли, и что часто въ этомъ отношеніи встрѣчаются даже совершенныя противоположности. Съ другой стороны, такъ какъ первоначальное опредѣленіе каждой формы немогло быть избрано именно въ цѣляхъ измѣренія, то, очевидно, вообще нельзя ожидать, чтобы первое опредѣленіе было наиболѣе удобнымъ для измѣренія; отсюда вытекаетъ необходимость искать новыя опредѣленія, т. е. по мѣрѣ возможности изучить свойства данной формы. Предположимъ, напримѣръ, что окружность была бы опредѣлена, какъ кривая, которая, при той же длинѣ, заключаетъ наибольшую площадь, что является, конечно, свойствомъ, вполнѣ ее характеризующимъ; очевидно, что при такой исходной точкѣ встрѣтились бы непобѣдимыя трудности при рѣшеніи основныхъ задачъ, относящихся къ выпрямленію или квадратурѣ этой кривой. A priori ясно, что свойство окружности, по которой всѣ ея точки находятся на равномъ разстояніи отъ одной неподвижной точки, должно по необходимости лучше удовлетворять требованію изслѣдованія такого рода, хотя и это свойство, строго говоря, не есть самое удобное для измѣренія. Точно также развѣ Архимедъ могъ бы найти площадь параболы, если бы объ этой кривой онъ зналъ только, что она представляетъ сѣченіе конуса съ круговымъ основаніемъ плоскостью, параллельной образующей конуса? Чисто теоретическія работы предыдущихъ геометровъ, занимавшихся преобразованіемъ этого первоначальнаго опредѣленія, очевидно, и послужили необходимыми предварительными данными для прямаго рѣшенія этой задачи. Тоже замѣчаніе, и еще съ большимъ основаніемъ, относится къ поверхностямъ. Чтобы составить себѣ объ этомъ правильное представленіе, достаточно сравнить, напримѣръ, по отношенію къ вопросу о кубатурѣ или о квадратурѣ, обыкновенное опредѣленіе шара съ другимъ, несомнѣнно одинаково характеризующимъ его: шаръ есть поверхность, заключающая наибольшій объемъ при той же площади.

Мнѣ не нужно приводить еще другихъ примѣровъ, чтобы вообще убѣдить въ необходимости возможно болѣе широкаго изученія свойствъ каждой линіи или поверхности для облегченія изслѣдованія вопросовъ о выпрямленіи и опредѣленіи площадей и объемовъ,—изслѣдованія, составляющаго конечную цѣль геометріи. Можно даже сказать, что главная трудность задачъ этого рода состоитъ въ примѣненіи въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ наиболѣе подходящаго къ природѣ данной задачи свойства. Поэтому, продолжая въ видахъ большей точности указывать на измѣреніе протяженностей, какъ на общее назначеніе геометріи, мы найдемъ въ изложенномъ первомъ соображеніи, относящемся прямо къ самой сущности предмета, ясное доказательство необходимости включить въ геометрію насколько возможно глубокое изученіе различныхъ способовъ образованія или опредѣленія каждой формы.

Второе соображеніе, имѣющее по крайней мѣрѣ равную съ первымъ важность, состоитъ въ томъ, что подобное изученіе необходимо для установленія въ геометріи раціональнаго отношенія конкретнаго къ абстрактному.

Геометрія, какъ я выше сказалъ, должна разсматривать всѣ возможныя формы, допускающія точное опредѣленіе; отсюда, какъ мы уже замѣтили, по необходимости вытекаетъ, что всѣ вопросы, относящіеся къ какимъ бы то ни было формамъ, существующимъ въ природѣ, непремѣнно неявнымъ образомъ войдутъ въ область абстрактной геометріи, если предположить, что она уже достигла своего совершенства. Но когда дѣйствительно нужно перейти къ конкретной геометріи, то постоянно встрѣчается серьезное затрудненіе — опредѣлить съ достаточнымъ приближеніемъ, къ какому изъ различныхъ абстрактныхъ типовъ надо отнести реальныя линіи или поверхности, которыя требуется изучить; чтобы установить подобное отношеніе особенно необходимо познакомится съ наибольшимъ по возможности числомъ свойствъ каждой разсматриваемой въ геометріи формы.

Дѣйствительно, если бы мы постоянно ограничивались однимъ первоначальнымъ опредѣленіемъ линіи или поверхности, то предполагая даже, что при этомъ условіи мы были бы въ состояніи измѣрить ихъ (что на основаніи перваго соображенія чаще всего оказалось бы невозможнымъ), такой результатъ почти всегда былъ бы совершенно безполезнымъ на практикѣ, такъ какъ обыкновенно мы не были бы въ состояніи узнать форму, встрѣтивъ ее въ природѣ. Для этого нужно, чтобы именно то единственное свойство формы, на которое обратили вниманіе геометры, могло быть удостовѣрено внѣшними обстоятельствами; на такое чисто случайное совпаденіе, хотя оно иногда и возможно, очевидно нельзя разсчитывать. Такимъ образомъ, только увеличивая насколько возможно число характеристическихъ свойствъ каждой абстрактной формы, мы можемъ обезпечить себѣ впередъ возможность узнать эту форму въ конкретномъ ея состояніи и такимъ образомъ извлечь пользу изъ нашихъ теоретическихъ работъ, провѣряя каждый разъ то именно опредѣленіе, которое можетъ быть установлено непосредственно. При данныхъ условіяхъ, подобное опредѣленіе почти всегда оказывается единственнымъ, и наоборотъ измѣняется для одной и той же формы при измѣненіи обстоятельствъ, что вдвойнѣ подтверждаетъ необходимость указаннаго изученія.

Въ этомъ отношеніи небесная геометрія представляетъ намъ самый замѣчательный примѣръ, отлично разъясняющій общую необходимость подобныхъ изслѣдованій. Въ самомъ дѣлѣ, какъ извѣстно, Кеплеръ доказалъ, что именно эллипсъ есть та кривая, которую планеты описываютъ вокругъ солнца и спутники вокругъ планетъ. Было ли однако возможно это важное открытіе, обновившее всю астрономію, если бы мы на всегда ограничились разсмотрѣніемъ эллипса только какъ сѣченія круговаго конуса наклонною плоскостью? Очевидно, что такое опредѣленіе не выдержало бы подобной провѣрки. Самое извѣстное свойство эллипса, именно, что сумма разстояній каждой его точки отъ двухъ неподвижныхъ точекъ есть величина постоянная, по самой своей природѣ даетъ больше возможности узнать кривую въ этомъ случаѣ, но даже и оно не можетъ быть примѣнено непосредственно. Единственная же особенность, которая могла быть непосредствено провѣрена Кеплеромъ, является слѣдствіемъ зависимости между длиной фокусныхъ разстояній точекъ эллипса и направленіемъ этихъ разстояній; только это отношеніе допускаетъ астрономическое толкованіе и выражаетъ законъ, связывающій разстояніе планеты отъ солнца со временемъ, прошедшимъ отъ начала обращенія планеты. Поэтому нужно было, чтобы чисто умозрительныя работы греческихъ геометровъ о свойствахъ коническихъ сѣченій представили цѣлый рядъ различныхъ точекъ зрѣнія на способы построенія этихъ кривыхъ, чтобы Кеплеръ могъ перейти отъ абстрактнаго къ конкретному, выбравъ изъ всѣхъ характеристическихъ свойствъ сѣченія то именно, которое легче всего можно было провѣрить для планетныхъ орбитъ.

Я могу указать еще на одинъ примѣръ того-же рода, относящійся къ поверхностямъ и касающійся важнаго вопроса о фигурѣ земли. Если-бы мы не знали никакихъ другихъ свойствъ шара кромѣ первоначальнаго опредѣленія, что всѣ его точки находятся на равномъ разстояніи отъ одной внутренней точки, то какимъ образомъ—когда-бы то ни было—могли мы открыть, что поверхность земли шарообразна? Для этого необходимо было прежде всего изъ указаннаго опредѣленія шара вывести нѣкоторыя свойства его, которыя можно было повѣрить съ помощью наблюденій, производимыхъ исключительно на поверхности, напримѣръ, что между длиною пути, пройденнаго вдоль меридіана по направленію къ полюсу, и угловою высотою этого полюса надъ горизонтомъ въ каждой точкѣ существуетъ для шара постоянное отношеніе. Очевидно тѣмъ же путемъ и притомъ послѣ очень длиннаго ряда предварительныхъ умозрѣній была установлена впослѣдствіи, что земля не строго шарообразна, а имѣетъ форму эллипсоида вращенія.

Послѣ такихъ примѣровъ было бы, конечно, совершенно излишнимъ приводить другіе, тѣмъ болѣе, что каждый легко можетъ самъ увеличить число ихъ. Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ легко будетъ провѣрить, что безъ весьма широкаго знакомства съ различными свойствами каждой формы переходъ отъ абстрактнаго къ конкретному въ геометріи былъ-бы чисто случайнымъ, и вслѣдствіе этого наукѣ не доставало-бы одного изъ ея самыхъ существенныхъ основаній.

Въ такомъ видѣ представляются два общія соображенія, вполнѣ доказывающія необходимость введенія въ геометрію цѣлаго ряда изслѣдованій, прямой цѣлью которыхъ не служитъ *измѣреніе* протяженностей, хоть мы все таки признаемъ это измѣреніе за конечную цѣль всей геометріи.

Мы можемъ, слѣдовательно, сохранить философскія преимущества, вытекающія изъ ясности и точности этого опредѣленія, и вмѣстѣ съ тѣмъ подвести подъ него вполнѣ раціональнымъ, хотя и косвеннымъ образомъ, всѣ извѣстныя геометрическія изслѣдованія, считая, что не относящіеся повидимому къ *измѣренію* протяженностей предназначены или для подготовленія рѣшенія окончательныхъ задачъ, или для облегченія примѣненія полученныхъ рѣшеніи.

Признавая такимъ образомъ, въ видѣ общаго положенія, внутреннюю и необходимую связь изученія свойствъ линій и поверхностей съ составляющими конечный предметъ геометріи изслѣдованіями, мы безъ сомнѣнія должны согласиться, что въ своихъ работахъ геометры совсѣмъ не должны быть стѣснены обязательствомъ не терять никогда изъ виду такую связь. Зная разъ на всегда, какъ важно видоизмѣнять насколько возможно способы построенія каждой формы, геометры должны заниматься этими изслѣдованіями, неостанавливаясь непосредственно на вопросѣ, какую пользу принесетъ то или другое спеціальное свойство для выпрямленія кривыхъ, квадратуры или кубатуры. Они только безполезно затрудняли-бы свои собственныя изслѣдованія, если бы придавали несоотвѣтствующее значеніе постоянному установленію такой координаціи. Человѣческій духъ и въ этомъ отношеніи долженъ поступать, какъ онъ поступаетъ и во всѣхъ подобныхъ случаяхъ, когда, намѣтивъ себѣ только въ общихъ чертахъ назначеніе извѣстнаго изслѣдованія, онъ напрягаетъ всѣ усилія исключительно для того, что двигать его какъ можно дальше, совершенно устраняя изъ виду указанное соотношеніе, постоянное разсмотрѣніе котораго только усложнило-бы всѣ его работы.

Общее объясненіе, только что изложенное мною, тѣмъ болѣе необходимо, что по самой природѣ предмета изученіе различныхъ свойствъ каждой линіи и каждой поверхности по необходимости занимаетъ наибольшую часть совокупности геометрическихъ изслѣдованій. Дѣйствительно, вопросы, непосредственно относящіеся къ выпрямленію, квадратурамъ и кубатурамъ, очевидно, сами по себѣ для каждой разсматриваемой формы весьма немногочислены. Наоборотъ, изученіе свойствъ одной и той-же формы представляетъ собою для человѣческаго духа естественнымъ образомъ неограниченное поле, на которомъ онъ постоянно можетъ надѣяться дѣлать новыя открытія. Такъ, напримѣръ, хотя геометры, несомнѣнно, съ большимъ или меньшимъ усердіемъ, но безъ всякаго дѣйствительнаго перерыва, уже въ теченіе двадцати вѣковъ занимаются изученіемъ коническихъ сѣченій, они далеко еще не считаютъ исчерпаннымъ даже этотъ простой предметъ и, конечно, можно быть увѣреннымъ, что, продолжая имъ заниматься, ученые откроютъ еще новыя неизвѣстныя свойства всѣхъ этихъ кривыхъ. Если подобныя изслѣдованія значительно замедлились въ теченіе послѣдняго вѣка, то это еще не значитъ, что онѣ закончились; замедленіе объясняется, какъ я сейчасъ покажу, только тѣмъ, что философская революція, произведенная въ геометріи трудами Декарта, должна была особенно уменьшить значеніе подобныхъ изслѣдованій.

Изъ предыдущихъ соображеній слѣдуетъ, что область геометріи по необходимости безконечна не только вслѣдствіе разнообразія подлежащихъ разсмотрѣнію формъ, но также еще и вслѣдствіе различія точекъ зрѣнія, съ которыхъ одна и та же форма можетъ быть изучаема. Это послѣднее положеніе даетъ даже самую общую и полную идею о совокупности геометрическихъ изслѣдованій: изъ него видно, что эти изслѣдованія состоятъ въ сущности въ сведеніи всѣхъ тѣхъ геометрическихъ явленій, которыя каждая линія или каждая поверхность можетъ представить, къ одному основному явленію, разсматриваемому какъ первоначальное опредѣленіе.

Указавъ въ такомъ общемъ и вмѣстѣ съ тѣмъ точномъ видѣ конечную цѣль геометріи и выяснивъ, какъ эта наука и при такомъ опредѣленіи заключаетъ въ себѣ весьма обширный классъ изслѣдованій, на первый взглядъ повидимому совсѣмъ не входящихъ въ ея область, я долженъ теперь разсмотрѣть еще во всей совокупности методъ построенія геометріи. Это послѣднее объясненіе необходимо для дополненія изложеннаго выше перваго обзора философскаго характера геометріи. Въ данную минуту я ограничусь только указаніемъ на самое общее соображеніе, такъ какъ это важное и основное понятіе должно быть развито и разъяснено въ слѣдующихъ лекціяхъ.

Совокупность всѣхъ геометрическихъ вопросовъ можно изучать, слѣдуя двумъ настолько различнымъ методамъ, что вслѣдствіе этого возникаютъ, такъ сказать, двѣ геометріи, философскій характеръ которыхъ, какъ мнѣ кажется, до сихъ поръ не былъ еще понятъ надлежащимъ образомъ.

Выраженіе *синтетическая* и *аналитическая* геометрія, обыкновенно употребляемыя для обозначенія этихъ отдѣловъ, даютъ о нихъ весьма ложное понятіе. Я предпочелъ бы во многихъ отношеніяхъ чисто историческія названія *геометрія древнихъ* и *новая геометрія*, покрайней мѣрѣ не вводящія въ заблужденіе относительно истиннаго характера этихъ наукъ; однако съ настоящаго времени я предполагаю употреблять совершенно правильные термины *спеціальная геометрія* и *геометрія общая*, которые, какъ мнѣ кажется, надлежащимъ образомъ и точно характеризуютъ истинную природу обоихъ методовъ.

Дѣйствительно, строго говоря, коренное различіе между нашимъ взглядомъ на геометрію со временъ Декарта и способами, которыми древніе изслѣдовали геометрическіе вопросы, состоитъ совсѣмъ не въ употребленіи исчисленія, какъ это обыкновенно признается. Съ одной стороны несомнѣнно, что пользованіе исчисленіемъ не было совершенно чуждо и древнимъ геометрамъ, такъ какъ въ своей геометріи они постоянно и очень широко примѣняли теорію пропорцій, представлявшую для нихъ, какъ средство дедукціи, дѣйствительный, хотя и весьма несовершенный эквивалентъ нашей современной алгебры. Можно даже примѣнять исчисленіе для полученія извѣстныхъ геометрическихъ рѣшеній гораздо шире, чѣмъ то дѣлали древніе геометры, и всетаки эти рѣшенія сохранятъ по существу характеръ древней геометріи: это обстоятельство очень часто имѣетъ мѣсто по отношенію къ задачамъ геометріи двухъ или трехъ измѣреній, обыкновенно обозначаемымъ именемъ *опредѣленныхъ*. Съ другой стороны, какъ бы велико ни было значеніе исчисленія въ современной геометріи, многія рѣшенія, полученныя безъ помощи алгебры, могутъ иногда обнаруживать характеристическія черты, отличающія новую геометрію отъ геометріи древнихъ, хотя вообще говоря анализъ составляетъ необходимую ея принадлежность; для примѣра, я укажу на методъ Роберваля для проведенія касательныхъ, столь современный по природѣ своей и всетаки въ нѣкоторыхъ случаяхъ приводящій къ совершенно полнымъ рѣшеніямъ задачъ безъ всякой помощи исчисленія. Итакъ, два пути, которымъ человѣческій духъ можетъ слѣдовать въ геометріи, нужно отличать главнымъ образомъ вовсе не на основаніи примѣняемаго тамъ орудія дедукціи.

Какъ мнѣ кажется, основное различіе, до сихъ поръ еще недостаточно понятое, состоитъ въ самой природѣ изслѣдуемыхъ вопросовъ. Дѣйствительно, геометрія, если разсматривать ее во всемъ ея объемѣ и предположить, что она уже достигла полнаго совершенства, должна, какъ мы это видѣли, съ одной стороны охватить всевозможныя формы, и съ другой стороны—открыть всѣ свойства каждой формы. На основаніи этого двойнаго требованія геометрію можно изучать, слѣдуя двумъ, существенно отличнымъ другъ отъ друга планамъ: или собирать вмѣстѣ всѣ вопросы, относящіеся къ одной и той же формѣ, какъ бы различны они ни были, и отдѣлять вопросы, относящіеся къ различнымъ тѣламъ, какая бы аналогія между ними ни существовала; или же, наоборотъ, соединять въ одну систему всѣ подобныя изслѣдованія, къ какимъ бы формамъ они ни относились, и раздѣлять вопросы, касающіеся дѣйствительно различныхъ свойствъ одного и того же тѣла. Однимъ словомъ, всю геометрію можно располагать или по отношенію къ изучаемымъ формамъ или по отношенію къ изслѣдуемымъ явленіямъ. Первый планъ, наиболѣе естественный, былъ принятъ древними, второй, несравненно болѣе раціональный, принятъ новѣйшими геометрами со временъ Декарта.

Дѣйствительно, главной отличительной чертой древней геометріи являлось изученіе различныхъ линій и поверхностей одной за другой, и переходъ къ изслѣдованію новой формы совершался только послѣ того, какъ было признано исчерпаннымъ уже все, что могли представить интереснаго извѣстныя до того времени формы. При такомъ способѣ изслѣдованій весь трудъ, потраченный на предыдущія, при переходѣ къ изученію новой кривой, не могъ принести никакой прямой существенной помощи, кромѣ умственнаго развитія, которое давало геометрамъ предыдущее упражненіе. Какъ бы ни было велико въ дѣйствительности сходство вопросовъ, предложеныхъ относительно двухъ различныхъ формъ, полнота свѣдѣній, пріобрѣтенная относительно одной формы, ничуть не избавляла геометра отъ необходимости предпринять всю совокупность изслѣдованій вторично. Вслѣдствіе этого успѣхъ науки никогда не былъ обезпеченъ; нельзя было впередъ имѣть увѣренность въ полученіи какого нибудь рѣшенія задачи, какъ бы велика ни была аналогія между предложенной и уже рѣшенными задачами. Такъ, напримѣръ, опредѣленіе касательныхъ къ тремъ коническимъ сѣченіямъ не принесло никакой раціональной помощи при проведеніи касательной къ какой нибудь новой кривой, какъ напримѣръ, къ конхоидѣ, циссоидѣ и т. д. Однимъ словомъ, геометрія древнихъ была, согласно предложенному выше выраженію, по существу *спеціальной*.

Въ современной системѣ геометрія, наоборотъ, носитъ безусловно *общій* характеръ, т. е. относится къ всѣмъ возможнымъ формамъ. Прежде всего очень легко понять, что всѣ геометрическіе вопросы, имѣющіе извѣстный интересъ, можно поставить относительно всѣхъ возможныхъ формъ. Это прямо видно относительно главныхъ задачъ, составляющихъ, на основаніи приведенныхъ въ этой лекціи объясненій, конечную цѣль геометріи, т. е. относительно выпрямленія кривыхъ, квадратуръ и кубатуръ. Но это замѣчаніе не менѣе неоспоримо даже и относительно изслѣдованія различныхъ свойствъ линій и поверхностей; наиболѣе существенныя изъ нихъ, какъ напримѣръ, задачи о касательныхъ линіяхъ и плоскостяхъ, теорія кривизны и т. д., очевидно имѣютъ общее значеніе для всѣхъ возможныхъ формъ. Крайне малочисленныя изслѣдованія, относящіяся дѣйствительно только къ одной или другой формѣ въ отдѣльности, имѣютъ всегда только весьма второстепенное значеніе. Установивъ это положеніе, можемъ сказать, что новѣйшая геометрія по существу своему состоитъ въ отвлеченіи всѣхъ вопросовъ, относящихся къ одному и тому-же геометрическому явленію, отъ формъ, въ которомъ это явленіе можетъ быть наблюдаемо, съ цѣлью самостоятельнаго и наиболѣе общаго изслѣдованія ихъ. Приложеніе построенныхъ такимъ образомъ общихъ теорій къ спеціальному опредѣленію явленія въ каждой отдѣльной формѣ можетъ считаться только второстепеннымъ трудомъ и производится по неизмѣннымъ правиламъ, успѣхъ которыхъ обезпеченъ заранѣе. Однимъ словомъ, эта работа принадлежитъ къ тому же классу, къ которому относится и опредѣленіе численнаго значенія данной аналитической формулы; единственной заслугой ея можетъ оказаться представленіе въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ рѣшенія, доставляемаго по необходимости общимъ методомъ, со всей простотой и изяществомъ, которыя возможны по отношенію къ разсматриваемой линіи или поверхности. Истинное значеніе придается только постановкѣ и полному рѣшенію новаго вопроса, относящагося къ какой угодно формѣ, и только подобныя работы считаются дѣйствительно подвигающими науку впередъ. Вниманіе геометровъ освобождается такимъ образомъ отъ изученія особенностей отдѣльныхъ формъ и всецѣло направляется къ общимъ вопросамъ; благодаря этому они могли возвыситься до разсмотрѣнія новыхъ геометрическихъ понятій, примѣненіе которыхъ къ изученнымъ древними кривымъ дало возможность открыть важныя свойства этихъ кривыхъ, свойства, древними даже и неподозрѣваемыя. Такой характеръ приняла геометрія со времени глубокой революціи, произведенной Декартомъ въ общей системѣ этой науки.

Простого указанія на основной характеръ каждой изъ двухъ геометрій, конечно, вполнѣ достаточно, чтобы огромное и необходимое превосходство новой геометріи сдѣлалось очевиднымъ. Можно даже сказать, что до великаго открытія Декарта основанія раціональной геометріи ни въ абстрактномъ, ни въ конкретномъ отношеніи на самомъ дѣлѣ не были окончательно установлены. Дѣйствительно, если разсматривать науку съ отвлеченной точки зрѣнія, то понятно, что если бы новые геометры продолжали до безконечности, какъ это они дѣлали до Декарта и нѣкоторое время послѣ него, идти по слѣдамъ древнихъ и прибавляли нѣсколько новыхъ кривыхъ къ весьма малому числу уже извѣстныхъ, то прогрессъ, какъ бы быстръ онъ ни былъ, даже послѣ длиннаго ряда вѣковъ оказался бы весьма незначительнымъ по сравненію съ общей системой геометріи и безконечнымъ разнообразіемъ формъ, которыя оставалось бы еще изучить. Наоборотъ, при рѣшеніи каждаго вопроса по пріему новѣйшихъ геометровъ число геометрическихъ задачъ, подлежащихъ рѣшенію, разъ на всегда по отношенію ко всѣмъ возможнымъ формамъ, уменьшается соотвѣтственнымъ образомъ. Съ другой точки зрѣнія, благодаря совершенному отсутствію общихъ методовъ, древніе геометры во всѣхъ своихъ изслѣдованіяхъ были предоставлены вполнѣ своимъ собственнымъ силамъ и не имѣли ни какой увѣренности въ томъ, что они рано или поздно добьются рѣшенія. Если это несовершенство науки и способствовало въ высшей степени проявленію ихъ удивительной проницательности, все таки оно должно было очень замедлять успѣхи науки; объ этомъ обстоятельствѣ можно составить себѣ нѣкоторое понятіе, принявъ во вниманіе, какъ много времени употребили они для изученія коническихъ сѣченій. Новая геометрія, обезпечивая нашему духу неизмѣнное движеніе впередъ, позволяетъ, наоборотъ, наилучшимъ образомъ использовать всѣ силы нашего разума, которыя древніе должны были часто тратить на весьма второстепенные вопросы.

Не менѣе глубокое различіе обнаруживается между этими двумя системами, если разсматривать геометрію въ конкретномъ отношеніи. Дѣйствительно, мы уже замѣтили выше, что отношеніе конкретнаго къ абстрактному въ геометріи можетъ быть твердо установлено на раціональныхъ началахъ только въ томъ случаѣ, если наши изслѣдованія будутъ прямо обращены на всевозможныя формы.

Если изучать линіи или поверхности одну за другою, то, каково бы ни было число изученныхъ формъ, по необходимости, однако, всегда очень незначительное, примѣненіе подобныхъ теорій къ дѣйствительно существующимъ въ природѣ формамъ будетъ всегда имѣть случайный характеръ, такъ какъ ничто не обезпечиваетъ, что эти формы дѣйствительно входятъ въ число изслѣдованныхъ геометрами абстрактныхъ типовъ. Напримѣръ, безъ сомнѣнія есть что-то случайное въ счастливомъ соотношеніи, которое удалось установить между умозрѣніями греческихъ геометровъ о коническихъ сѣченіяхъ и опредѣленіемъ истинныхъ планетныхъ орбитъ. Продолжая вести по тому-же плану геометрическія изслѣдованія, не было вообще никакого основанія надѣяться на подобныя совпаденія и было-бы даже возможно, что въ такихъ спеціальныхъ работахъ изслѣдованія геометровъ направились-бы именно на абстрактныя формы, совершенно неосуществимыя, и оставили-бы въ сторонѣ другія формы, которыя могли бы получить важныя и непосредственныя приложенія. Очевидно, по крайней мѣрѣ, что ничто не давало положительной гарантіи въ безусловной примѣнимости геометрическихъ умозрѣній. Совершенно иначе стоитъ дѣло въ новѣйшей геометріи: уже потому только, что въ ней изслѣдуются общіе вопросы, касающіеся всѣхъ возможныхъ формъ, мы заранѣе получаемъ полную увѣренность, что встрѣчающіяся во внѣшнемъ мірѣ формы не могутъ не подойти подъ какую нибудь теорію, если только разсматриваемое ею геометрическое явленіе представится на самомъ дѣлѣ.

Изъ этихъ различныхъ соображеній видно, что система геометріи древнихъ носитъ на себѣ отпечатокъ дѣтства науки, которая становится вполнѣ раціональной только послѣ произведенной Декартомъ философской революціи; но съ другой стороны очевидно, что съ самаго начала геометрія могла быть изучаема только такимъ *спеціальнымъ* образомъ. *Общая* геометрія была-бы совершенно не возможна и даже необходимость ея не была-бы понятна, если-бы длинный рядъ спеціальныхъ работъ относительно наиболѣе простыхъ формъ не далъ предварительно основанія для концепціи Декарта и не сдѣлалъ-бы очевидной невозможность придерживаться постоянно первоначальной философіи геометріи.

Если придать этому соображенію всю возможную точность, то изъ него слѣдуетъ даже заключить, что хотя геометрія, названная мною *общей*, и должна быть теперь признана единственной истинной догматической геометріей, изложеніемъ существа которой мы и ограничимся,—тогда какъ спеціальная геометрія представляетъ главнымъ образомъ только историческій интересъ, все таки при раціональномъ изложеніи геометріи нельзя совершенно отбросить послѣднюю. Можно, конечно, какъ это дѣлается вотъ уже почти цѣлое столѣтіе, не заимствовать прямо изъ геометріи древнихъ всѣ доставленные ею результаты: наиболѣе обширныя и трудныя изслѣдованія, входившія въ составъ этой геометріи, представляются теперь обыкновенно только съ помощью новыхъ методовъ; но по самой природѣ предмета безусловно невозможно обойтись совсѣмъ безъ помощи метода древнихъ, который, что-бы ни было, всегда останется и догматически первой основой науки, какъ онъ былъ ею исторически. Причину такого положенія дѣла очень легко понять: *общая* геометрія, какъ мы это сейчасъ установимъ, по существу основана на примѣненіи исчисленія, на преобразованіи геометрическихъ соображеній въ аналитическія, а такой способъ изслѣдованія нельзя прилагать непосредственно въ самомъ его началѣ. Мы знаемъ, что примѣненіе математическаго анализа по самой природѣ его никогда не можетъ служить исходной точкой науки; такое примѣненіе возможно тогда только, когда наука разработана уже достаточно глубоко, чтобы установить для разсматриваемыхъ явленій уравненія, которыя могутъ послужить основаніемъ для аналитическихъ работъ. Какъ только эти основныя уравненія найдены, анализъ позволяетъ вывести изъ нихъ множество слѣдствій, существованіе которыхъ нельзя было сначала даже и подозрѣвать; анализъ сообщитъ наукѣ высокую степень совершенства какъ съ точки зрѣнія общности понятій, такъ и относительно ихъ взаимнаго согласованія. Но, очевидно, математическаго анализа одного только всегда недостаточно для установленія самыхъ основаній какой нибудь естественной науки, ни даже для новаго доказательства этихъ основаній, если онѣ уже найдены. Въ этомъ отношеніи ничто не можетъ замѣнить прямого изученія предмета до тѣхъ поръ, пока оно дастъ возможность открыть точныя зависимости явленій. Пытаться ввести науку съ самаго начала въ область исчисленія значило-бы желать придать теоріямъ, относящимися къ дѣйствительнымъ явленіямъ, характеръ простыхъ логическихъ пріемовъ и такимъ образомъ лишить ихъ необходимой связи съ реальнымъ міромъ. Однимъ словомъ такая философская операція, если бы даже она и не содержала по необходимости въ себѣ самой нѣкотораго противорѣчія, очевидно, могла-бы только вновь погрузить науку въ область метафизики, отъ которой человѣческому духу только съ такимъ трудомъ удалось окончательно освободиться.

Поэтому геометрія древнихъ по природѣ своей постоянно будетъ неизбѣжно занимать первое мѣсто, болѣе или менѣе обширное, во всей системѣ геометрическихъ знаній. Она составляетъ безусловно необходимое введеніе въ *общую* геометрію; въ такіе именно предѣлы мы должны заключить ее при совершенно догматическомъ изложеніи. Я разсмотрю въ слѣдующей лекціи прямо эту *спеціальную* или *предварительную* геометрію, сокративъ ее до безусловно необходимыхъ предѣловъ, чтобы впослѣдствіи посвятить себя философскому изслѣдованію одной *общей* или *окончательной* геометріи, единственной вполнѣ раціональной и составляющей въ настоящее время по существу все содержаніе науки.

Одиннадцатая лекція.

Общія соображенія о спеціальной или предварительной геометріи.

Такъ какъ геометрическій методъ древнихъ, на основаніи указанныхъ въ концѣ прошлой лекціи соображеній, долженъ неизбѣжно занять мѣсто введенія въ общую догматическую систему геометріи, чтобы дать необходимыя основанія для *общей* геометріи, то намъ нужно прежде всего установить, въ чемъ собственно состоитъ предварительная функція *спеціальной* геометріи, которая такимъ образомъ и будетъ заключена въ самые тѣсные предѣлы.

Разсматривая геометріи древнихъ съ этой точки зрѣнія, легко убѣдиться, что по отношенію къ теоріи линій можно ограничить ее однимъ изученіемъ прямой линіи, затѣмъ квадратурой прямолинейныхъ плоскихъ фигуръ, и, наконецъ, кубатурой тѣлъ, ограниченныхъ плоскостями. Элементарныя предложенія, относящіяся къ этимъ тремъ основнымъ вопросамъ, представляютъ дѣйствительно необходимую исходную точку для всѣхъ геометрическихъ изслѣдованій: одни эти предложенія могутъ быть получены только прямымъ изученіемъ предмета, тогда какъ, наоборотъ, полная теорія всѣхъ другихъ формъ, даже окружности и относящихся къ ней площадей и объемовъ, могутъ теперь войти вполнѣ въ составъ *общей* или *аналитической* геометріи потому, что указанные первоначальные элементы даютъ уже уравненія, достаточныя для примѣненія исчисленія къ геометрическимъ вопросамъ, примѣненія, невозможнаго безъ этого предварительнаго условія.

Изъ приведеннаго соображенія слѣдуетъ, что обыкновенно элементарной геометріи дается большій объемъ, чѣмъ то безусловно необходимо, такъ какъ кромѣ прямой линіи, многоугольниковъ и многогранниковъ туда включаются также кругъ и сферическія тѣла, которыя можно также хорошо изучать и аналитическимъ путемъ, какъ, напримѣръ, и коническія сѣченія. Непродуманное поклоненіе старинѣ несомнѣнно въ значительной степени содѣйствуетъ сохраненію такой непослѣдовательности метода; но такъ какъ это поклоненіе не помѣшало ввести въ область новѣйшей геометріи теорію коническихъ сѣченій, то надо думать, что противоположный по отношенію къ круговымъ формамъ и до сихъ поръ еще повсемѣстный обычай имѣетъ за собою какое-нибудь другое основаніе; самое понятное объясненіе этого обстоятельства заключается въ томъ важномъ неудобствѣ, которое возникало-бы при постановкѣ средняго образованія вслѣдствіе отсрочки до очень отдаленной эпохи чисто математическаго образованія рѣшенія нѣкоторыхъ существенныхъ задачъ, могущихъ получить непосредственное и постоянное примѣненіе въ множествѣ важныхъ случаевъ. Дѣйствительно, если поступать наиболѣе раціональнымъ образомъ, то только съ помощью интегральнаго исчисленія можно было-бы получить интересующіе насъ результаты относительно измѣренія длины или площади круга, или поверхности шара и т. д., результаты, полученные древними съ помощью чрезвычайно простыхъ соображеній. Это неудобство имѣло-бы весьма мало значенія для лицъ, предназначающихъ себя для изученія математическихъ наукъ, и для нихъ было-бы сравнительно гораздо важнѣе слѣдовать вообще совершенно раціональному пути; такъ какъ, однако, обратные случаи встрѣчаются гораздо чаще, то необходимо было въ такъ называемой элементарной геометріи сохранить столь существенныя теоріи. Допуская все значеніе подобнаго соображенія и не ограничивая предварительную геометрію строго необходимыми элементами, можно даже признать полезнымъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ включать туда еще нѣкоторыя весьма важныя изслѣдованія, обыкновенно устраняемыя изъ нея, напримѣръ, относительно коническихъ сѣченій, циклоиды и т. д., чтобы ввести въ элементарный курсъ наибольшее по возможности количество общеполезныхъ знаній, хотя, даже съ точки зрѣнія экономія времени, было-бы гораздо предпочтительнѣе слѣдовать наиболѣе раціональному пути.

Въ этомъ отношеніи я здѣсь не долженъ принимать во вниманіе ту пользу, которую можетъ принести обычное распространеніе геометрическаго метода древнихъ за необходимые и свойственные ему предѣлы благодаря болѣе глубокому знакомству съ этимъ методомъ и вытекающему отсюда поучительному сравненію его съ новѣйшимъ методомъ. Эти выгоды при изученіи каждой науки связаны съ ходомъ изложенія, названнымъ нами *историческимъ*, и отъ нихъ слѣдуетъ умѣть открыто отказываться, если необходимость слѣдовать пути строго *догматическому* прочно установлена. Мы знаемъ, какъ важно, послѣ усвоенія всѣхъ частей науки наиболѣе раціональнымъ образомъ, изучить, для пополненія нашего развитія, *исторію* науки и такимъ образомъ обстоятельно сравнить различные методы, послѣдовательно примѣнявшіеся человѣчествомъ; но эти два ряда изслѣдованій должны быть, какъ мы видѣли, тщательно отдѣлены другъ отъ друга. Однако, въ данномъ случаѣ, современный геометрическій методъ слишкомъ еще новъ и потому, можетъ быть, надлежало бы, чтобы лучше охарактеризовать его путемъ сравненія, сначала изслѣдовать по методу древнихъ нѣсколько вопросовъ, которые по природѣ своей должны бы съ раціональной точки зрѣнія входить въ новую геометрію.

Какъ бы то ни было, устраняя теперь всѣ эти второстепенныя соображенія, мы увидимъ, что введеніе въ геометрію, которое можно разсматривать только по методу древнихъ, приводится, строго говоря, къ изученію прямой линіи, площадей многоугольниковъ и многогранниковъ. Вѣроятно даже, что въ концѣ концовъ элементарная геометрія и будетъ обыкновенно ограничена этими необходимыми предѣлами, когда основныя аналитическія понятія станутъ болѣе общеизвѣстными и когда изученіе совокупности математики будетъ всѣми признана за философское основаніе общаго образованія.

Если указанная предварительная часть геометріи, которую нельзя построить съ помощью исчисленія, приводится, по самой природѣ, къ ряду основныхъ изслѣдованій, весьма ограниченныхъ по своему объему, то, съ другой стороны, несомнѣнно, что дальнѣйшее ея сокращеніе невозможно, хотя въ послѣднее время, злоупотребляя истиннымъ аналитическимъ духомъ науки, было сдѣлано нѣсколько попытокъ представить съ чисто алгебраической точки зрѣнія доказательства главныхъ теоремъ элементарной геометріи. Такимъ именно образомъ пытались было доказать простыми абстрактными соображеніями математическаго анализа постоянство отношенія между тремя углами прямолинейнаго треугольника, основное предложеніе теоріи подобныхъ треугольниковъ, измѣреніе прямоугольниковъ, параллелипипедовъ и т. д., однимъ словомъ тѣ именно геометрическія предложенія, которыя можно получить только прямымъ изученіемъ предмета, и гдѣ исчисленія не въ состояніи оказать никакой помощи. Я бы совершенно не указывалъ здѣсь на подобныя заблужденія, если-бы они не были вызваны очевиднымъ намѣреніемъ довести до высшей степени совершенства философскій характеръ геометріи, съ самаго начала введя ее въ область приложенія математическаго анализа. Но слѣдуетъ тщательно отмѣтить основную ошибку, допущенную нѣкоторыми геометрами въ этомъ отношеніи, такъ какъ она вытекаетъ изъ необдуманнаго преувеличенія тенденціи, весьма естественной теперь и высоко философской, побуждающей все болѣе и болѣе расширять примѣненіе анализа въ математическихъ изслѣдованіяхъ. Созерцаніе колоссальныхъ результатовъ, достигнутыхъ человѣческимъ духомъ на этомъ пути, должно было невольно заставить вѣрить, что даже основанія конкретной математики могутъ быть установлены на простыхъ аналитическихъ соображеніяхъ. Такія заблужденія намъ придется отмѣтить не только по отношенію къ одной геометріи: въ скоромъ времени мы будемъ имѣть случай указать совершенно аналичныя по отношенію механикѣ, по поводу мнимыхъ аналитическихъ доказательствъ параллелограма силъ. Это логическое смѣшеніе имѣетъ теперь даже болѣе значенія въ механикѣ, гдѣ оно до сихъ поръ дѣйствительно содѣйствуетъ распространенію метафизическаго тумана надъ общимъ характеромъ этой науки, тогда какъ, по крайней мѣрѣ въ геометріи, подобныя абстрактныя соображенія до сихъ поръ оставались какъ то внѣ науки и не успѣли войти въ обыкновенное ея изложеніе.

Слѣдуя представленнымъ въ этомъ трудѣ принципамъ философіи математики, нѣтъ надобности долго настаивать на объясненіи неправильности такого способа изученія. Дѣйствительно, мы уже видѣли, что исчисленіе есть и можетъ быть только средствомъ дедукціи и потому примѣнять его для установленія элементарныхъ понятій какой бы то ни было науки значитъ понимать его совершенно превратно; на чемъ же будутъ основаны при такой операціи наши аналитическія разсужденія? Подобная работа въ дѣйствительности не только не совершенствуетъ философскаго характера науки, но является поворотомъ къ метафизическому ея состоянію, такъ какъ она стремится представить реальныя познанія въ видѣ простыхъ логическихъ отвлеченій.

Изслѣдуя въ самихъ себѣ эти мнимыя аналитическія доказательства основныхъ предложеній элементарной геометріи, легко можемъ убѣдиться въ ихъ неизбѣжной безсодержательности. Всѣ они основаны на ложномъ пониманіи принципа *однородности*, истинное общее содержаніе котораго я разъяснилъ въ пятой лекціи. Въ этихъ доказательствахъ предполагается, что указанный принципъ совершенно недопускаетъ сосуществованія въ одномъ и томъ-же уравненіи чиселъ, полученныхъ изъ различныхъ конкретныхъ сравненій, что очевидно, невѣрно и явнымъ образомъ противорѣчитъ обычнымъ пріемамъ геометровъ. Точно также легко видѣть, что примѣняя законъ однородности въ такомъ произвольномъ и неправильномъ значеніи, съ той-же кажущейся строгостью можно *доказать* предложенія, абсурдность которыхъ будетъ ясна съ перваго взгляда. Напримѣръ, изучая внимательно пріемъ, съ помощью котораго пробовали аналитически доказать, что сумма всѣхъ трехъ угловъ прямолинейнаго треугольника постоянно равна двумъ прямымъ, мы увидимъ, что онъ основанъ на такомъ предварительномъ положеніи: если два треугольника имѣютъ по два угла равныхъ, то и третьи углы будутъ также равны. Если допустить этотъ первый пунктъ, то указанное отношеніе весьма точно и просто получается сразу. Однако, аналитическое соображеніе, на основаніи котораго желали установить это предварительное предложеніе, носитъ такой характеръ, что если-бы оно было справедливо, то, разсуждая въ обратномъ порядкѣ, мы вполнѣ строго пришли-бы къ очевидно абсурдному заключенію, что двухъ сторонъ треугольника безъ угловъ совершенно достаточно для опредѣленія третьей стороны. Подобнаго-же рода замѣчанія можно сдѣлать и относительно всѣхъ остальныхъ доказательствъ этого рода и софизмы ихъ такимъ образомъ будутъ обнаружены совершенно ясно.

Чѣмъ болѣе мы должны здѣсь разсматривать геометрію, какъ аналитическую нынѣ по существу науку, тѣмъ болѣе необходимо было предупредить умы противъ указаннаго неправильнаго употребленія математическаго анализа, благодаря которому могла-бы даже возникнуть мысль, что можно совершенно обойтись безъ геометрическаго наблюденія и установить самыя основы этой естественной науки на чисто-алгебраическихъ отвлеченностяхъ. Я долженъ былъ придать особенное значеніе характеристикѣ заблужденій, связанныхъ съ нормальнымъ развитіемъ человѣческаго духа потому, что въ послѣднее время они были, такъ сказать, освящены формальнымъ одобреніемъ одного весьма выдающагося геометра, авторитетъ котораго имѣетъ весьма большое вліяніе на постановку элементарнаго преподаванія геометріи.

По этому предмету я считаю нужнымъ еще замѣтить, что во многихъ отношеніяхъ слишкомъ часто, какъ мнѣ кажется, упускали изъ виду безусловно присущій геометріи характеръ естественной науки. Это замѣчаніе легко провѣрить, обративъ вниманіе на длинный рядъ безполезныхъ попытокъ геометровъ строго *доказать*, не съ помощью исчисленія, а путемъ другихъ построеній, нѣкоторыя основныя предложенія элементарной геометріи. Чтобы въ этомъ отношеніи мы ни дѣлали, очевидно, что въ геометріи нельзя избавиться отъ необходимости отъ времени до времени прибѣгать къ простому непосредственному наблюденію, какъ средству для полученія извѣстныхъ результатовъ. Если изучаемыя этой наукой явленія, благодаря ихъ чрезвычайной простотѣ, гораздо болѣе связаны между собою, чѣмъ относящіяся ко всякой другой естественной наукѣ, то тѣмъ не менѣе необходимо должно существовать нѣсколько явленій, которыя не могутъ быть получены путемъ дедукціи, и сами служатъ исходными пунктами. Ради большаго раціональнаго совершенства науки слѣдуетъ сводить такія явленія къ наименьшему числу—это неоспоримо, тѣмъ не менѣе было бы абсурдомъ пытаться освободиться отъ нихъ совершенно. Притомъ я долженъ признаться, что, по моему мнѣнію, нѣкоторое преувеличеніе противъ безусловно необходимаго числа полученныхъ такимъ образомъ путемъ непосредственнаго наблюденія геометрическихъ понятій, если только эти понятія достаточно просты, представляетъ гораздо менѣе дѣйствительныхъ неудобствъ, чѣмъ обращеніе къ сложнымъ и косвеннымъ доказательствамъ, даже въ томъ случаѣ, если съ логической точки зрѣнія послѣднія безукоризненны.

Послѣ изложенной по возможности точной характеристики истиннаго догматическаго назначенія геометріи древнихъ, приведенной къ наименьшему необходимому для нея объему, намъ слѣдуетъ разсмотрѣть вкратцѣ каждую изъ ея главныхъ составныхъ частей. Я считаю возмозным ограничиться здѣсь разсмотрѣніемъ первой и самой обширной ея части, посвященной изученію прямой линіи. Два другіе отдѣла, квадратура многоугольниковъ и кубатура многогранниковъ, по самой своей природѣ не могутъ дать никакихъ важныхъ философскихъ соображеній, отличныхъ отъ указанныхъ нами въ предыдущей лекціи, при разсмотрѣніи вопроса объ измѣреніи площадей и объемовъ вообще.

Конечная задача, которая постоянно имѣется въ виду при изученіи прямой линіи, состоитъ, собственно говоря, въ опредѣленіи однихъ элементовъ прямолинейной фигуры при посредствѣ другихъ, что позволяетъ всегда косвенно изслѣдовать прямую линію, въ какихъ бы обстоятельствахъ она ни находилась. Эту основную задачу можно рѣшать съ помощью двухъ общихъ пріемовъ, по природѣ совершенно отличныхъ другъ отъ друга, а именно графически и алгебраически. Первый пріемъ, хотя и весьма несовершенный, мы однако разсмотримъ сначала потому, что онъ вытекаетъ само собою изъ прямого изученія предмета, второй же, гораздо болѣе совершенный во многихъ важныхъ отношеніяхъ, можетъ быть разсмотрѣнъ только впослѣдствіи, такъ какъ что онъ основанъ на предварительномъ знакомствѣ съ первымъ.

Графическое рѣшеніе состоитъ въ произвольномъ *представленіи* фигуры въ тѣхъ-же или въ особенности въ измѣненныхъ въ нѣкоторой пропорціи размѣрахъ. Первый способъ мы здѣсь указываемъ только вообще, для памяти, какъ наиболѣе простой и прежде всего представляющійся уму, такъ какъ, очевидно, на практикѣ онъ почти непримѣнимъ. Наоборотъ, второй способъ допускаетъ весьма обширныя и полезныя приложенія; до сихъ поръ еще мы постоянно пользуемся имъ во многихъ важныхъ случаяхъ нетолько для того, чтобы точно представить формы тѣлъ и ихъ взаимное положеніе, но даже для дѣйствительнаго опредѣленія геометрическихъ величинъ, когда мы не нуждаемся въ особенно большой точности. Древніе, въ виду несовершенства ихъ геометрическихъ познаній, гораздо шире пользовались этимъ пріемомъ, долгое время единственнымъ доступнымъ для нихъ даже въ наиболѣе важныхъ точныхъ опредѣленіяхъ. Такъ, напримѣръ, Аристархъ Самосскій, измѣряя относительное разстояніе солнца и луны отъ земли, наносилъ свои измѣренія на треугольникѣ, построенномъ съ наибольшей по возможности точностью и подобномъ прямоугольному треугольнику, образованному тремя небесными тѣлами въ тотъ моментъ, когда луна находилась въ квадратурѣ и когда, слѣдовательно, для опредѣленія треугольника достаточно было наблюсти уголъ на землѣ. Самъ Архимедъ, хотя и ввелъ первый въ геометрію числовыя опредѣленія, нѣсколько разъ прибѣгалъ къ подобнымъ же пріемамъ. Даже созданіе тригонометріи не заставило отказаться отъ нихъ вполнѣ, хотя значительно уменьшало примѣненіе этихъ пріемовъ. Греки и арабы продолжали пользоваться ими во многихъ изслѣдованіяхъ, гдѣ мы теперь считаемъ употребленіе исчисленія неизбѣжнымъ.

Точное воспроизведеніе какой-нибудь фигуры въ различныхъ масштабахъ не можетъ представить никакихъ серьезныхъ теоретическихъ трудностей, когда всѣ части предложенной фигуры находятся въ одной плоскости; но если предположить, какъ это случается чаще всего, что части ея находятся въ разныхъ плоскостяхъ, то мы встрѣтимся съ новыми классами геометрическихъ соображеній. Искусственно построенная фигура, постоянно плоская, въ томъ случаѣ не будетъ совершенно вѣрнымъ изображеніемъ истинной фигуры; поэтому прежде всего нужно будетъ точно установить способъ воспроизведенія фигуры, что даетъ мѣсто различнымъ системамъ *проэкцій*. Затѣмъ мы должны еще опредѣлить, по какому закону соотвѣтствуютъ другъ другу геометрическія явленія въ обѣихъ фигурахъ. Это соображеніе вызываетъ новый рядъ геометрическихъ изслѣдованій, конечная цѣль которыхъ состоитъ собственно въ отысканіи способовъ замѣны рельефныхъ построеній плоскими. Древнимъ пришлось разрѣшить нѣсколько элементарныхъ задачъ подобнаго рода для тѣхъ случаевъ, гдѣ мы теперь пользуемся сферической тригонометріей, главнымъ-же образомъ для задачъ, относящихся къ небесной сферѣ. Таково было назначеніе ихъ *аналеммъ* и другихъ плоскихъ фигуръ, долгое время замѣнявшихъ употребленіе исчисленія. Изъ этого видно, что древніе дѣйствительно знали элементы того, что мы теперь называемъ *начертательной геометріей*, хотя они и не поставили этой науки самостоятельно.

Я считаю удобнымъ бѣгло указать здѣсь на истинный характеръ начертательной геометріи, хотя, какъ наука существенно практическая, она не должна бы занимать мѣста въ этомъ трудѣ.

Всѣ вопросы геометріи трехъ измѣреній, если разсматривать ихъ графическія рѣшенія, представляютъ одну общую свойственную имъ только трудность: построенія въ пространствѣ, необходимыя для разрѣшенія подобнаго рода задачъ,—построенія, почти всегда невыполнимыя,—приходится замѣнять равнозначущими построеніями на плоскости, которыя приводили бы окончательно къ тому же результату. Безъ этой неизбѣжной замѣны всякое рѣшеніе подобнаго рода было бы, очевидно, неполнымъ и совершенно неприложимымъ на практикѣ, хотя въ теоріи построенія въ пространствѣ обыкновенно предпочтительнѣе, какъ болѣе непосредственныя.

Задача начертательной геометріи—дать общіе методы для выполненія указаннаго преобразованія; для этой цѣли она была создана и обращена въ самостоятельную однородную систему геніальнымъ усиліемъ мысли нашего знаменитаго Монжа. Онъ прежде всего нашелъ однообразный способъ для изображенія тѣлъ фигурами, начерченными на одной плоскости, *проэктируя* данныя тѣла на двѣ различныя плоскости, обыкновенно перпендикулярныя другъ къ другу, и затѣмъ предполагая, что одна изъ нихъ вращается около линіи ихъ пересѣченія до совпаденія съ продолженіемъ другой; въ этой системѣ плоскостей, или въ другой, ей равнозначущей, для указаннаго изображенія достаточно было представить себѣ, что точки и линіи опредѣляются своими проекціями, а поверхности—проекціями ихъ производящихъ.

Установивъ эту точку зрѣнія, Монжъ подвергъ глубокому анализу отдѣльныя изслѣдованія своихъ предшественниковъ, произведенныя при помощи множества безсвязныхъ методовъ; поставивъ себѣ, въ прямомъ и общемъ видѣ, вопросъ, въ чемъ должны постоянно заключаться задачи этого рода, онъ пришелъ къ выводу, что онѣ всегда могутъ быть сведены къ очень небольшому числу неизмѣнныхъ отвлеченныхъ вопросовъ, которыя можно разрѣшить отдѣльно разъ навсегда съ помощью однообразныхъ операцій и которыя, по своему содержанію, частью относятся къ касанію, частью-же къ пересѣченію поверхностей.

Установивъ простые и вполнѣ общіе методы для графическаго рѣшенія этихъ двухъ видовъ задачъ, мы можемъ уже считать всѣ геометрическіе вопросы, къ которымъ приводятъ различныя искусства, какъ напр. строительная механика, обработка камней и дерева, перспектива, гномоника, фортификація и т. д., просто частными случаями общей теоріи, неизмѣнное приложеніе которой всегда приведетъ къ правильному рѣшенію; на практикѣ мы можемъ еще облегчить это рѣшеніе, умѣло пользуясь частными условіями каждаго отдѣльнаго случая.

Это важное открытіе заслуживаетъ особаго вниманія со стороны философовъ, изучающихъ совокупность всѣхъ результатовъ человѣческой дѣятельности, такъ какъ оно является только первымъ и, до сихъ поръ, единственнымъ законченнымъ шагомъ на пути ко всеобщему обновленію человѣческой техники, которое должно придать всѣмъ нашимъ искусствамъ точный и раціональный характеръ, столь необходимый для ихъ дальнѣйшаго развитія.

Въ самомъ дѣлѣ, такая революція неизбѣжно должна была начаться съ того класса промышленныхъ работъ, которые по существу тѣснѣе всего связаны съ самой простой, совершенной и древней наукой; она постепенно захватитъ, хотя и не такъ легко, всѣ остальныя области человѣческихъ дѣйствій, Мы скоро будемъ даже имѣть случай замѣтить, что самъ Монжъ, который глубже чѣмъ кто-либо другой проникъ въ философію практическихъ искусствъ, попытался для механической техники создать теорію, которая соотвѣтствовала-бы теоріи, столь удачно составленной имъ для техники геометріи; однако, въ этомъ случаѣ и въ виду значительно большихъ трудностей, ему удалось довольно ясно намѣтить только путь, который должно избрать для будущихъ изысканій этого рода.

Какое-бы значеніе ни имѣли идеи начертательной геометріи, однако очень важно не заблуждаться относительно ея истиннаго и только ей присущаго назначенія, какъ это дѣлали—въ особенности въ первое время послѣ изобрѣтенія Монжа—тѣ, которые видѣли въ новомъ методѣ средство для расширенія общей и отвлеченной области раціональной геометріи. Позднѣйшія обстоятельства не оправдали этихъ необоснованыхъ надеждъ. И, въ самомъ дѣлѣ, не очевидно-ли, что начертательная геометрія можетъ имѣть значеніе только въ качествѣ прикладной науки, какъ истинная теорія основанныхъ на геометріи искусствъ? Съ точки зрѣнія отвлеченной науки, она не можетъ создать ни одного дѣйствительно новаго класса геометрическихъ умозрѣній. Нельзя терять изъ виду, что прежде чѣмъ перейти въ область начертательной геометріи, всякая геометрическая задача должна быть сначала разрѣшена при помощи теоретической геометріи и, какъ мы видѣли, эти рѣшенія должны быть затѣмъ переработаны для практическаго пользованія въ томъ отношеніи, что построенія въ пространствѣ замѣняются построеніями на плоскости; эта та подстановка и представляетъ собою въ дѣйствительности единственную характерную функцію начертательной геометріи.

Слѣдуетъ, однако, замѣтить здѣсь, что съ точки зрѣнія умственнаго развитія, изученіе начертательной геометріи представляетъ серьезное философское значеніе, независимо отъ ея высокой практической пользы. Она имѣетъ огромное преимущество передъ другими науками, пріучая представлять себѣ въ пространствѣ иногда очень сложныя геометрическія построенія и заставляя слѣдить за ихъ постояннымъ соотвѣтствіемъ съ дѣйствительно начерченными фигурами; она самымъ вѣрнымъ и правильнымъ образомъ и въ высокой степени развиваетъ то важное качество человѣческаго ума, которое называется *воображеніемъ* въ узкомъ смыслѣ слова, и которое, въ элементарномъ и положительномъ значеніи его, заключается въ ясномъ и легкомъ представленіи обширной и сложной совокупности воображаемыхъ предметовъ, какъ будто-бы они находились передъ глазами.

Наконецъ, чтобы закончить наше бѣглое изложеніе общей природы начертательной геометріи, мы, опредѣляя ея логическій характеръ, должны замѣтить, что если по пріемамъ своихъ рѣшеній, она относится къ геометріи древнихъ, то, съ другой стороны, она приближается къ современной геометріи по характеру задачъ, входящихъ въ ея составъ. Эти задачи дѣйствительно въ высшей степени замѣчательны по той общности, которая, какъ мы видѣли въ прошлой лекціи, составляетъ истинное и существенное отличіе современной геометріи; всѣ ея методы постоянно предназначаются для примѣненія къ любымъ формамъ, причемъ всѣ частности, отвѣчающія каждой отдѣльной формѣ, могутъ играть только вполнѣ подчиненную роль. Такимъ образомъ въ начертательной геометріи рѣшенія получаются графическимъ путемъ, какъ въ геометріи древнихъ, и носятъ характеръ общности, какъ въ современной геометріи.

Послѣ этого важнаго отступленія,—необходимость котораго, читатель, безъ сомнѣнія признаетъ—перейдемъ къ философскому изслѣдованію *специальной* геометріи, причемъ будемъ все время разсматривать ее въ возможно узкихъ предѣлахъ, лишь какъ необходимое введеніе въ *общую* геометрію. Разсмотрѣвъ въ достаточной степени графическое рѣшеніе основной задачи, относящейся къ прямой линіи, — т. е. вопросъ объ опредѣленіи по какимъ-нибудь даннымъ элементамъ прямолинейной фигуры остальныхъ ея элементовъ — мы должны теперь изслѣдовать въ общемъ видѣ алгебраическое ея рѣшеніе.

Это второе рѣшеніе—объ очевидномъ превосходствѣ котораго было-бы здѣсь безполезно говорить,—по самой природѣ вопроса, неизбѣжно примыкаетъ къ геометрической системѣ древнихъ, хотя логическій пріемъ, которымъ при этомъ пользуются, заставлялъ обыкновенно совершенно не кстати отдѣлять ихъ одно отъ другого. Такимъ образомъ намъ здѣсь представляется случай провѣрить съ очень важной точки зрѣнія то, что мы доказали въ предшествующей лекціи лишь въ общихъ чертахъ,—а именно, что существенное отличіе современной геометріи отъ геометріи древнихъ слѣдуетъ видѣть не въ примѣненіи исчисленія. Истинные творцы нашей тригонометріи—какъ прямолинейной, такъ и сферической—въ дѣйствительности древніе, но только въ ихъ рукахъ она была гораздо менѣе совершенна, такъ какъ ихъ алгебраическія свѣдѣнія были крайне незначительны. Въ этой лекціи, — а не въ тѣхъ, какъ можно было ожидать сначала, которыя мы далѣе посвятимъ философскому изслѣдованію *общей* геометріи,—слѣдуетъ опредѣлить истинный характеръ этой важной предварительной теоріи, обыкновенно неправильно относимой къ такъ называемой аналитической геометріи и являющейся на самомъ дѣлѣ лишь дополненіемъ собственно *элементарной геометріи.*

Всѣ прямолинейныя фигуры могутъ быть разбиты на треугольники; поэтому, очевидно, вполнѣ достаточно умѣть опредѣлить по даннымъ элементамъ треугольника его остальные элементы, и *полигонометрія* приведется, такимъ образомъ, къ простой *тригонометріи.*

Существенное затрудненіе при алгебраическомъ рѣшеніи такого вопроса заключается въ составленіи трехъ независимыхъ уравненій между углами и сторонами треугольника; если три такія уравненія будутъ найдены, то всѣ тригонометрическіе вопросы очевидно будутъ сведены къ одному только исчисленію. При разсмотрѣніи съ самой общей точки зрѣнія вопроса объ установленіи этихъ уравненій, намъ непосредственно представятся два существенно различныхъ способа введенія угловъ въ исчисленіе: можно ввести прямо самые углы или пропорціональныя имъ круговыя дуги, или-же, напротивъ, подставить вмѣсто нихъ извѣстныя прямыя линіи, напримѣръ, хорды, стягивающія соотвѣтствующія угламъ дуги,—которыя поэтому обыкновенно называются ихъ тригонометрическими линіями.

Изъ этихъ двухъ тригонометрическихъ системъ сначала могла быть принята только вторая, какъ единственная примѣнимая на практикѣ, такъ какъ состояніе геометріи позволяло тогда съ достаточною легкостью найти точныя соотношенія между сторонами треугольника и тригонометрическими линіями его угловъ, тогда какъ установить уравненія между сторонами и самыми углами треугольника было въ то время совершенно невозможно. Теперь рѣшеніе можно получить съ одинаковою легкостью какъ при помощи второй, такъ и при помощи первой системы, и поэтому указанная причина предпочтенія второй системы утратила свое значеніе. Но, тѣмъ не менѣе, геометры должны были добровольно принять систему, допущенную сначала по необходимости: та-же причина, въ силу которой можно было съ большою легкостью получить тригонометрическія уравненія, должна обусловливать, какъ это легко понять a priori, и гораздо большую простоту этихъ уравненій: въ нихъ входятъ только прямыя линіи, тогда какъ другія уравненія составлены между прямыми линіями и дугами окружности. Это соображеніе тѣмъ болѣе важно, что здѣсь нужны въ высшей степени простыя формулы, такъ какъ онѣ должны быть постоянно примѣняемы во всѣхъ математическихъ наукахъ, а также и во всѣхъ ихъ приложеніяхъ.

Правда, можно возразить, что если данъ уголъ, то на самомъ дѣлѣ всегда дана величина самаго угла, а не какой-нибудь тригонометрической его линіи, что если неизвѣстенъ уголъ, то надо найти величину именно угла, а не величину какой-нибудь изъ его тригонометрическихъ линій. Поэтому кажется, что эти линіи представляютъ собою только безполезное посредствующее звѣно между сторонами и углами треугольника, что ихъ слѣдуетъ, въ концѣ концовъ, исключать, и что введеніе ихъ, повидимому, никакъ не можетъ упростить поставленной нами себѣ задачи. Въ самомъ дѣлѣ, важно объяснить съ большею общностью и строгостью, чѣмъ это обыкновенно дѣлается, громадную дѣйствительную пользу указаннаго пріема. Дѣло въ томъ, что введеніе вспомогательныхъ величинъ дѣлитъ всю задачу тригонометріи па двѣ существенно различныя части: первая изъ нихъ занимается переходомъ отъ угловъ къ тригонометрическимъ линіямъ и обратно, тогда какъ вторая ставитъ себѣ цѣлью опредѣленіе сторонъ треугольника по тригонометрическимъ линіямъ его угловъ, и обратно. Ясно, что первая изъ этихъ двухъ основныхъ задачъ, по самой природѣ своей, можетъ быть вполнѣ разъ навсегда рѣшена и сведена къ числовымъ таблицамъ, путемъ изслѣдованія всѣхъ возможныхъ угловъ, такъ какъ ея рѣшеніе зависитъ только отъ этихъ угловъ, и совершенно не зависитъ отъ частныхъ случаевъ треугольниковъ, въ которыхъ эти углы въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ могутъ встрѣчаться; рѣшеніе-же втораго вопроса—по крайней мѣрѣ *числовое* рѣшеніе — непремѣнно должно быть повторено все съ самаго начала для каждаго новаго треугольника, подлежащаго разсмотрѣнію. Вотъ почему первая часть всей работы, которая, навѣрное, была-бы самою трудною, обыкновенно не принимается въ разсчетъ, такъ какъ она заранѣе выполнена; но если-бы задача не была такимъ образомъ разбита на части, тогда мы были-бы вынуждены выполнять съ самаго начала все вычисленіе въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ. Таково основное свойство принятой нами системы тригонометріи; въ самомъ дѣлѣ, она не представляла-бы никакого дѣйствительнаго преимущества, если-бы для каждаго подлежавшаго разсмотрѣнію угла приходилось постоянно вычислять его тригонометрическую линію, и обратно: посредствующее звѣно явилось-бы скорѣе помѣхою, чѣмъ облегченіемъ.

Чтобы ясно представить себѣ истинную природу этой теоріи, будетъ полезно сравнить ее съ другою, еще болѣе важною, которая должна приводить къ аналогичному результату какъ съ точки зрѣнія алгебраической, такъ, въ особенности, и съ точки зрѣнія ариѳметической: мы говоримъ о замѣчательной теоріи логариѳмовъ. Дѣлая философскую оцѣнку значенія этой теоріи, мы видимъ, въ самомъ дѣлѣ, что общій результатъ ея заключается въ дѣленіе всѣхъ возможныхъ ариѳметическихъ дѣйствій на двѣ различныя части, изъ которыхъ первая, самая сложная, можетъ быть выполнена разъ навсегда заранѣе, такъ какъ она зависитъ только отъ разсматриваемыхъ чиселъ, нисколько не завися отъ различныхъ соотношеній, которыя могутъ существовать между ними: цѣль ея—представить всѣ числа въ видѣ данныхъ степеней нѣкотораго постояннаго числа. Вторая часть задачи, которую необходимо надо повторять съ самаго начала для каждой новой формулы, подлежащей вычисленію, сводится къ выполненію надъ этими степенями соотвѣтствующихъ дѣйствій, безконечно болѣе простыхъ. Я ограничиваюсь однимъ указаніемъ на эту аналогію, которую каждый легко можетъ развить самъ.

Далѣе мы должны обратить вниманіе еще на одно замѣчательное свойство принятой нами системы тригонометріи, являющееся теперь уже второстепеннымъ, но вначалѣ имѣвшее большое значеніе: опредѣленіе угловъ по ихъ тригонометрическимъ линіямъ, и обратно, допускаетъ ариѳметическое рѣшеніе, безъ предварительнаго разрѣшенія соотвѣтствующей алгебраической задачи; только оно и является прямо необходимымъ для собственныхъ цѣлей тригонометріи. Несомнѣнно, что древніе могли построить тригонометрію именно благодаря этой ея особенности. Соотвѣтствующія изслѣдованія были тѣмъ легче, что древніе, естественно, за тригонометрическую линію приняли хорду; таблицы были частью уже заранѣе составлены для совершенно другой цѣли, благодаря трудамъ Архимеда надъ вопросомъ о спрямленіи окружности, изъ коихъ дѣйствительно можно было опредѣлить извѣстный рядъ хордъ; вслѣдствіе этого, когда Гиппархъ позднѣе построилъ тригонометрію, ему пришлось только пополнить эти вычисленія надлежащими вставками. Все это рельефно выясняетъ историческую связь указанныхъ идей.

Чтобы вполнѣ закончить этотъ бѣглый философскій очеркъ тригонометріи, надо теперь указать, что то же соображеніе, которое заставило насъ замѣнить углы и дуги окружности, въ цѣляхъ упрощенія уравненій, прямыми линіями, побуждаетъ насъ не ограничиваться одною тригонометрическою линіей, какъ это дѣлали древніе, а ввести совмѣстно нѣсколько, чтобы усовершенствовать всю систему, выбирая линіи наиболѣе удобныя для алгебраическихъ дѣйствій въ томъ или другомъ случаѣ. Въ этомъ отношеніи ясно, что число тригонометрическихъ линій само по себѣ ничѣмъ не ограничено: если онѣ опредѣляются дугами, которыя, обратно, въ свою очередь опредѣляются тригонометрическими линіями на основанія нѣкотораго закона, устанавливающими ихъ взаимную зависимость, то эти линіи могутъ быть подставляемы въ уравненія вмѣсто дугъ. Арабскіе ученые, ограничивавшіеся наиболѣе простыми построеніями, а затѣмъ и современные математики послѣдовательно довели число прямыхъ тригонометрическихъ линій до четырехъ или пяти: но это число можетъ быть доведено и до гораздо болѣе высокой цифры.

Но, вмѣсто того, чтобы прибѣгать къ геометрическимъ построеніямъ, которыя сдѣлались бы въ концѣ концевъ очень сложными, можно съ крайнею легкостью, при помощи одного замѣчательнаго пріема, обыкновенно недостаточно широко понимаемаго, получить столько новыхъ тригонометрическихъ линій, сколько ихъ можетъ потребоваться для аналитическихъ преобразованій. Пріемъ этотъ заключается въ слѣдующемъ: не увеличивая непосредственно числа тригонометрическихъ линій, принадлежащихъ каждой разсматриваемой дугѣ, вводятъ новыя линіи, предполагая, что эта дуга опредѣляется съ помощью тригонометрическихъ линій другой дуги, являющейся очень простой функціи дуги первоначальной. Такъ, напримѣръ, для облегченія вычисленія угла часто опредѣляютъ не его синусъ, а синусъ его половины, или синусъ двойного угла. Подобное построеніе *косвенныхъ* тригонометрическихъ линій очевидно, болѣе плодотворно, чѣмъ всѣ непосредственные геометрическіе пріемы ихъ построенія. Такимъ образомъ можно утверждать, что число тригонометрическихъ линій, которыми дѣйствительно пользуются въ настоящее время геометры, на самомъ дѣлѣ безконечно: аналитическія преобразованія, такъ сказать, каждую минуту могутъ заставить насъ увеличить ихъ число при помощи только что объясненнаго пріема.

Линіямъ, полученнымъ косвеннымъ путемъ, не было только дано спеціальнаго названія, за исключеніемъ относящихся къ дугѣ, дополнительной къ первоначальной, ибо необходимость такого названія недостаточно часто ощущалась геометрами: благодаря этому обстоятельству и распространился ошибочный взглядъ относительнаго истиннаго объема всей системы тригонометрическихъ линій.

Множественность тригонометрическихъ линій должна очевидно, вызывать еще третій основной вопросъ тригонометріи—изученіе соотношеній между этими различными линіями. Не зная этихъ соотношеній, мы совсѣмъ не могли бы пользоваться для цѣлей анализа всѣмъ разнообразіемъ вспомогательныхъ величинъ, неимѣющихъ притомъ иного назначенія. Кромѣ того, благодаря только что изложеннымъ соображеніямъ, ясно, что эта существенная часть тригонометріи—хотя и чисто подготовительная—можетъ достигнуть, по самой природѣ своей, безконечныхъ размѣровъ, если разсматривать ее во всей ея общности, тогда какъ двѣ другія части по необходимости ограничены строго опредѣленными рамками.

Мнѣ нѣтъ надобности добавлять, что эти три основныя части тригонометріи должны быть изучаемы не въ томъ порядкѣ, въ которомъ, какъ мы видѣли, онѣ должны были развиваться въ силу общей природы самаго вопроса, а какъ разъ въ обратномъ: третья часть, очевидно, не зависитъ отъ двухъ другихъ, а вторая,—отъ той, которая представилась намъ самою первою, т. е. отъ самаго рѣшенія треугольниковъ: на этомъ основаніи рѣшеніе треугольника должно быть изучаемо послѣ первыхъ двухъ частей, и тѣмъ болѣе важнымъ представляется указать естественное возникновеніе частей тригонометріи.

Было бы безполезно разсматривать здѣсь отдѣльно сферическую тригонометрію, такъ какъ она не допускаетъ никакого спеціальнаго философскаго изслѣдованія: хотя она, благодаря важности и многочисленности своихъ примѣненій, и является существенной частью геометріи, но въ настоящее время на нее, во всей ея совокупности, нельзя смотрѣть иначе, какъ на простое приложеніе прямолинейной тригонометріи, которая даетъ непосредственно ея основныя уравненія, замѣняя сферическій треугольникъ соотвѣтствующимъ трехграннымъ угломъ.

Я счелъ нужнымъ привести все это краткое изложеніе философіи тригонометріи,—которая могла бы, впрочемъ, привести и ко многимъ еще другимъ интереснымъ выводамъ,—чтобы ясно показать на важномъ примѣрѣ строгую связь и послѣдовательное развѣтвленіе, обнаруживаемыя наиболѣе, повидимому, простыми задачами элементарной геометріи.

Итакъ, разсмотрѣвъ съ достаточной для цѣлей этого труда подробностью истинный характеръ *спеціальной* геометріи, приведенной къ единственному догматическому назначенію—доставить *общей* геометріи необходимое предварительное основаніе, мы должны теперь обратить все наше вниманіе на истинную геометрію, разсматривая ее во всей ея совокупности съ наиболѣе раціональной точки зрѣнія. Но для этого сначала необходимо внимательно изслѣдовать великую первоначальную идею Декарта, на которой общая геометрія всецѣло основывается. Это и будетъ предметомъ изложенія слѣдующей лекціи.

Двѣнадцатая лекція.

Основная идея общей или аналитической геометріи

Такъ какъ *общая* геометрія всецѣло основана на преобразованіи геометрическихъ соображеній въ равнозначущія аналитическія, то мы прежде всего должны разсматрѣть непосредственно и какъ можно глубже ту прекрасную мысль, на основаніи которой Декартъ единообразно установилъ постоянную возможность такого соотношенія.

Если даже отвлечься отъ огромнаго значенія этой мысли для самой геометріи, которую она значительнымъ образомъ усовершенствовала, или вѣрнѣе, всецѣло перенесла на раціональную почву, то все-же философское изученіе замѣчательнаго открытія Декарта должно представить для насъ высокій интересъ, особенно въ виду того, что такое изученіе съ совершенной очевидностью опредѣлитъ общій методъ, которымъ необходимо пользоваться, чтобы установить отношенія между абстрактнымъ и конкретнымъ при помощи аналитическаго представленія явленій природы.

Во всей математической философіи нѣтъ ни одной мысли, которая въ большей мѣрѣ заслуживала-бы нашего вниманія.

Для того, чтобы простыми аналитическими отношеніями возможно было изобразить всю совокупность геометрическихъ явленій, которыя можно себѣ вообразить, необходимо, само собой, прежде всего установить общій способъ аналитическаго представленія самихъ предметовъ, въ которыхъ происходятъ эти явленія, т. е. подлежащихъ разсмотрѣнію линій и поверхностей. Если мы такимъ образомъ будемъ всегда разсматривать самый предметъ съ чисто-аналитической точки зрѣнія, то легко понять, что съ той-же точки зрѣнія мы можемъ разсматривать и всѣ проявленія, свойственныя этому предмету.

Чтобы сдѣлать возможнымъ представленіе геометрическихъ формъ при помощи аналитическихъ уравненій, необходимо сначала преодолѣть одну основную трудность, а именно — привести общіе элементы геометрическихъ понятій къ простымъ численнымъ понятіямъ; однимъ словомъ, подставить въ геометріи на мѣсто *качественныхъ* сужденій сужденія *количественныя*.

Для этой цѣли замѣтимъ сначала что всѣ геометрическія идеи необходимо относятся къ слѣдующимъ тремъ основнымъ категоріямъ: къ величинѣ, къ формѣ и къ положенію изучаемыхъ протяженностей.

Что касается первой категоріи, то она, очевидно, не представляетъ никакого затрудненія, и непосредственно сводится къ числовымъ идеямъ. Относительно второй категоріи необходимо замѣтить, что, по своей природѣ, она всегда можетъ быть сведена къ третьей: форма тѣла, очевидно, зависитъ отъ взаимнаго расположенія разныхъ точекъ, изъ которыхъ оно состоитъ, и всякая идея о положеніи заключаетъ неизбѣжнымъ образомъ идею о формѣ; точно также всякое обстоятельство, относящееся къ формѣ можетъ быть выражено черезъ обстоятельство положенія.

Дѣйствительно, такъ и поступалъ человѣческій умъ, чтобы получить аналитическое изображеніе геометрическихъ формъ, такъ какъ основная мысль аналитической геометріи непосредственно относится только къ положенію. Итакъ, вся элементарная трудность сводится, въ сущности, къ подстановкѣ на мѣсто идей о положеніи равнозначущихъ идей о величинахъ. Таково непосредственное назначеніе основной мысли, на которой Декартъ построилъ общую систему аналитической геометріи.

Съ этой точки зрѣнія весь его философскій трудъ заключался только въ полномъ обобщеніи элементарнаго пріема, который можно считать присущимъ самой природѣ человѣческаго духа, такъ какъ онъ, можно сказать, безсознательно примѣняется всякимъ умомъ, даже наиболѣе посредственнымъ. Дѣйствительно, когда приходится опредѣлять положеніе предмета, не указывая на него прямо, мы постоянно прибѣгаемъ къ одному способу потому, очевидно, что другого и быть не можетъ: мы относимъ этотъ предметъ къ другимъ, положеніе которыхъ извѣстно, указывая величину какихъ-либо геометрическихъ элементовъ, при помощи которыхъ искомый предметъ связанъ съ извѣстными *).

Эти элементы представляютъ то, что Декартъ, а за нимъ и другіе геометры, назвали *координатами* разсматриваемой точки; этихъ координатъ необходимо должно быть двѣ, когда заранѣе извѣстно, въ какой плоскости находится данная точка, и три, если она можетъ находиться въ любой части пространства.

Мы можемъ составить столько-же различныхъ системъ координатъ, сколько различныхъ построеній можемъ представить себѣ для того, чтобы опредѣлить положеніе точки какъ на плоскости, такъ и въ пространствѣ: слѣдовательно, число этихъ системъ можетъ быть увеличено до безконечности. Но какая-бы система ни была принята, въ ней постоянно идеи положенія будутъ сведены къ простымъ идеямъ величинъ, такъ что перемѣщеніе точки мы будемъ разсматривать, какъ результатъ численныхъ измѣненій въ величинѣ ея координатъ.

Разсмотримъ сначала самый простой случай, а именно—геометрію на плоскости: положеніе точки на плоскости чаще всего опредѣляется большими или меньшими разстояніями ея отъ двухъ постоянныхъ прямыхъ, которыя предполагаются извѣстными и называются *осями*; обыкновенно принимается, что эти оси перпендикулярны другъ къ другу. Эта система, въ виду ея простоты, примѣняется чаще всѣхъ другихъ; но иногда геометры пользуются еще множествомъ другихъ системъ. Такъ, положеніе точки на плоскости можетъ быть опредѣлено ея разстояніями

*) Такъ, напримѣръ, мы опредѣляемъ обыкновенно положеніе мѣстностей на земномъ шарѣ при помощи ихъ разстояній отъ экватора и отъ перваго меридіана.

отъ двухъ постоянныхъ точекъ, или ея разстояніемъ отъ одной постоянной точки и направленіемъ этого разстоянія, опредѣляемаго величиной угла, который оно образуетъ съ извѣстной прямой: такая система называется системой *полярныхъ координатъ* и послѣ разсмотрѣнной выше является наиболѣе употребительной.

Можно опредѣлить еще положеніе точки съ помощью угловъ, образуемыхъ прямыми, соединяющими перемѣнную точку съ двумя постоянными точками, и прямой, проходящей черезъ эти постоянныя точки, или разстояніями перемѣнной точки отъ постоянной прямой и постоянной точки и т. д. Словомъ, нѣтъ ни одной геометрической фигуры, при помощи которой нельзя-бы было составить нѣкоторую систему координатъ, болѣе или менѣе удобную для примѣненія.

По этому поводу необходимо сдѣлать одно общее замѣчаніе: въ геометріи на плоскости каждая система координатъ сводится къ опредѣленію точки пересѣченіемъ двухъ линій, причемъ обѣ онѣ подчинены извѣстнымъ условіямъ, опредѣляющимъ ихъ положеніе; одно изъ этихъ условій остается перемѣннымъ,—то одно, то другое, въ зависимости отъ разсматриваемой системы. Въ самомъ дѣлѣ, нельзя представить себѣ иного способа построенія точки, помимо опредѣленія ея пересѣченіемъ нѣкоторыхъ двухъ линій.

Такъ, въ наиболѣе употребительной системѣ, въ системѣ *прямолинейныхъ координатъ* въ собственномъ смыслѣ слова, точка опредѣляется пересѣченіемъ двухъ прямыхъ, причемъ каждая изъ этихъ прямыхъ всегда остается параллельной постоянной оси, и только разстояніе ея отъ этой оси мѣняется; въ полярной системѣ—пересѣченіемъ окружности перемѣннаго радіуса съ постояннымъ центромъ и подвижной прямой, вращающейся по условію вокругъ этого центра. Если мы обратимся къ другимъ системамъ, то точка можетъ быть опредѣляема пересѣченіемъ двухъ круговъ, или какихъ-либо другихъ линій и т. д. Словомъ, назначая величину одной изъ координатъ точки въ какой-бы то ни было системѣ координатъ, мы этимъ самымъ по необходимости опредѣляемъ нѣкоторую линію, на которой данная точка должна находиться.

Геометры древности уже сдѣлали это существенное замѣчаніе, послужившее основаніемъ ихъ метода *геометрическихъ мѣстъ*, который они чрезвычайно удачно примѣняли для направленія своихъ изслѣдованій относительно разрѣшенія *опредѣленныхъ* геометрическихъ задачъ; они въ отдѣльности оцѣнивали вліяніе каждаго изъ двухъ условій, которыми была опредѣлена точка, прямо или косвенно входившая въ предложенную задачу. Именно общая систематизація этого метода и послужила для Декарта непосредственнымъ поводомъ къ тѣмъ изслѣдованіямъ, которыя привели его къ основанію аналитической геометріи.

Установивъ съ достаточной ясностью эти предварительныя соображенія, на основаніи которыхъ идеи положенія, а съ ними вмѣстѣ неявнымъ образомъ и всѣ элементарныя геометрическія представленія могутъ быть сведены къ простымъ числовымъ соображеніямъ, мы можемъ уже теперь перейти къ прямому и общему разсмотрѣнію великой идеи Декарта относительно аналитическаго изображенія геометрическихъ формъ. Это разсмотрѣніе и составитъ предметъ изложенія настоящей лекціи.

Для большей легкости я и впредь ограничусь пока разсмотрѣпіемъ геометріи двухъ измѣреній, которою только и занимался самъ Декартъ; затѣмъ мнѣ придется отдѣльно разсмотрѣть съ той же точки зрѣнія особенности поверхностей и кривыхъ двоякой кривизны.

Объяснивъ пріемы выраженія аналитическаго положеніе точки на плоскости, можно легко доказать, что, какими-бы свойствами линія ни была опредѣлена, всегда такое опредѣленіе можно замѣнить соотвѣтственнымъ уравненіемъ между двумя перемѣнными координатами точки, описывающей эту линію; такое уравненіе и послужитъ аналитическимъ выраженіемъ взятой нами линіи, и всѣмъ явленіямъ, связаннымъ съ кривой, будутъ соотвѣтствовать извѣстныя алгебраическія измѣненія ея уравненія.

Въ самомъ дѣлѣ, если предположить, что точка движется на плоскости не подчиняясь никакимъ условіямъ, которыя могли бы предъустановить ея движеніе, то какую-бы систему координатъ мы ни приняли, намъ всегда, очевидно, придется считать координаты данной точки двумя перемѣнными величинами, совершенно независимыми другъ отъ друга. Но если, напротивъ, эта точка должна описывать нѣкоторую опредѣленную линію, то намъ, очевидно, придется признать, что координаты нашей точки, въ какомъ-бы положеніи она ни находилась, сохраняютъ нѣкоторое постоянное и точное соотношеніе, которое, разумѣется, можетъ быть выражено соотвѣтствующимъ уравненіемъ; это уравненіе и явится яснымъ и точнымъ аналитическимъ опредѣленіемъ разсматриваемой линіи, такъ какъ оно будетъ выражать алгебраическое свойство, присущее исключительно координатамъ всѣхъ точекъ этой линіи. Дѣйствительно, не трудно понять, что если точка не подчинена никакому условію, то ея положеніе опредѣляется только тогда, когда даны въ отдѣльности обѣ ея координаты; если-же точка должна находиться на опредѣленной линіи, то достаточно одной координаты, чтобы вполнѣ опредѣлить ея положеніе. Вторая координата въ этомъ случаѣ явится опредѣленной *функціей* первой, или, другими словами, между обѣими координатами должно существовать нѣкоторое опредѣленное *уравненіе*, по природѣ своей соотвѣтствующее уравненію той линіи, на которой точка должна постоянно оставаться. Однимъ словомъ, если каждая изъ двухъ координатъ точки опредѣляетъ ея положеніе на нѣкоторой линіи, то обратно—условіе, что точка должна постоянно находиться на нѣкоторой опредѣленной линіи, равносильно условію, что задается величина одной изъ координатъ, которая, въ этомъ случаѣ, является вполнѣ зависящей отъ другой. Аналитическое соотношеніе, выражающее эту зависимость, можетъ быть обнаружено съ большей или меньшей трудностью; но его существованіе, очевидно, всегда должно быть признано, даже въ томъ случаѣ, когда наши современныя средства недостаточны для того, чтобы его обнаружить. При помощи этого простого соображенія можно въ наиболѣе общемъ видѣ доказать необходимость изображенія линіи аналитическими уравненіями, независимо отъ частныхъ повѣрокъ, относящихся къ тому или другому опредѣленію линіи, на которыя обыкновенно опирается это основное предложеніе.

Обратно, принявъ конечную точку нашихъ разсужденій за исходную, также легко выяснить, что каждое уравненіе съ двумя перемѣнными необходимо должно быть въ опредѣленной системѣ координатъ изображено нѣкоторой линіей, причемъ одного только такого соотношенія безъ всякихъ иныхъ признаковъ вполнѣ достаточно для точнаго опредѣленія этой линіи. Научное назначеніе послѣдней -останавливать вниманіе непосредственно на общемъ ходѣ рѣшеній даннаго уравненія, которое такимъ образомъ будетъ изображено наиболѣе нагляднымъ и простымъ способомъ.

Это изображеніе уравненій является однимъ изъ основныхъ и важнѣйшихъ преимуществъ аналитической геометріи: благодаря ему она въ высшей степени способствовала усовершенствованію самаго анализа, не только указывая ясно опредѣленную цѣль и неисчерпаемую область приложенія, совершенно абстрактнымъ изслѣдованіямъ, но еще болѣе непосредственно, давая математикамъ новое философское средство для аналитическаго разсужденія, которое ничѣмъ инымъ не можетъ быть замѣнено.

Дѣйствительно, чисто алгебраическое изслѣдованіе уравненія несомнѣнно съ полнѣйшей точностью опредѣляетъ его рѣшенія, но только каждое въ отдѣльности, такъ что общій ходъ рѣшенія можетъ быть найденъ только при помощи длиннаго и утомительнаго ряда численныхъ сравненій, послѣ котораго умственная дѣятельность становится обыкновенно вполнѣ истощенной. Напротивъ—геометрическое мѣсто уравненія, предназначенное только для нагляднаго и точнаго изображенія всей совокупности этихъ сравненій, позволяетъ разсматривать эту совокупность непосредственно, вполнѣ отвлекаясь отъ деталей сравненія; такимъ образомъ оно можетъ представлять нашему уму общій аналитическій обзоръ уравненій, придти къ которому при помощи иного способа намъ было-бы очень трудно въ виду невозможности ясно опредѣлить его объектъ.

Такъ, напримѣръ, очевидно, что простой взглядъ на логариѳмическую кривую или на кривую, выражаемую уравненіемъ $y = sinx$, позволяетъ судить съ большей ясностью объ общемъ ходѣ измѣненія логариѳмовъ различныхъ чиселъ или синусовъ въ зависимости отъ ея дугъ, чѣмъ это было бы возможно при самомъ тщательномъ изученіи логариѳмическихъ или тригонометрическихъ таблицъ.

Какъ извѣстно, этотъ методъ сдѣлался въ настоящее время совершенно элементарнымъ и примѣняется во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда требуется ясно уловить характеръ закона, связывающаго рядъ точныхъ наблюденій извѣстнаго рода.

Возвращаясь къ изображенію линій уравненіями—которое и служитъ основнымъ предметомъ нашего изслѣдованія—мы видимъ, что такое изображеніе настолько вѣрно, что линія не можетъ претерпѣть даже и самаго незначительнаго измѣненія безъ того, чтобы оно не вызвало соотвѣтствующаго измѣненія въ ея уравненіи. Это полное согласованіе часто создаетъ даже особыя затрудненія, такъ какъ въ нашей системѣ аналитической геометріи простыя перемѣщенія линій такъ-же замѣтно отражаются на уравненіяхъ ихъ, какъ и дѣйствительныя измѣненія ихъ величины или формы. Такимъ образомъ, мы могли-бы подвергнуться риску смѣшать аналитически одно явленіе съ другимъ, если-бы геометры не изобрѣли остроумнаго способа, спеціально предназначеннаго для того, чтобы постоянно различать эти явленія.

Этотъ методъ основанъ на томъ соображеніи, что хотя и нельзя аналитически по произволу измѣнять положенія кривой относительно осей координатъ, тѣмъ не менѣе можно различнымъ образомъ измѣнять положеніе самыхъ осей,—что, очевидно, имѣетъ такое-же значеніе. Затѣмъ уже, при помощи общихъ и очень простыхъ формулъ, которыми производится это перемѣщеніе осей, нетрудно узнать, являются-ли два различныя уравненія простымъ аналитическимъ выраженіемъ той-же линіи въ двухъ различныхъ ея положеніяхъ, или же эти уравненія относятся къ двумъ дѣйствительно различнымъ геометрическимъ мѣстамъ, такъ какъ въ первомъ случаѣ одно изъ данныхъ уравненій должно преобразоваться въ другое, при надлежащемъ измѣненіи осей и другихъ постоянныхъ разсматриваемой системы координатъ.

Впрочемъ, необходимо замѣтить по этому поводу, что общія неудобства указаннаго характера, повидимому, являются совершенно неизбѣжными въ аналитической геометріи. Мы видѣли, что идеи положенія являются единственными геометрическими идеями, которыя могутъ быть непосредственно сведены къ числовымъ представленіямъ; идеи же формы приводятся къ нимъ только въ томъ случаѣ, если мы будемъ разсматривать форму, какъ соотношеніе положенія; поэтому, первое время анализъ необходимо долженъ смѣшивать явленія формы съ явленіями положенія, которыя только одни непосредственно выражены въ уравненіяхъ.

Чтобы дополнить философское разъясненіе главнаго принципа, служащаго основой аналитической геометріи, я долженъ здѣсь указать на новое общее соображеніе, особенно, какъ мнѣ кажется, пригодное для того, чтобы достаточно рельефно обрисовать необходимость изображенія линій уравненіями съ двумя перемѣнными.

Дѣло въ томъ, что не только, какъ мы установили раньше, каждая опредѣленная линія неизбѣжно должна привести къ уравненію между двумя координатами любой ея точки, но кромѣ того, мы можемъ разсматривать каждое опредѣленіе линіи, какъ ея уравненіе въ соотвѣтствующей системѣ координатъ.

Этотъ принципъ намъ будетъ легко установить, если мы предварительно проведемъ строгую логическую грань между различными классами опредѣленій. Каждое опредѣленіе по необходимости должно строго удовлетворять слѣдующему условію: оно должно давать средство отличать опредѣляемый предметъ отъ всякаго другого, указывая на такое его свойство, которое принадлежитъ только ему одному. Но эта цѣль можетъ быть достигнута двумя весьма различными способами: мы можемъ ограничиться простымъ *отличительнымъ* опредѣленіемъ, т. е. указаніемъ на такое свойство предмета, которое, хотя и является вполнѣ исключительнымъ, тѣмъ не менѣе не указываетъ на происхожденіе предмета; или-же мы можемъ прибѣгнуть къ *объяснительному* опредѣленію, т. е. охарактеризовать предметъ такимъ свойствомъ, которое выражаетъ одинъ изъ способовъ его происхожденія. Напримѣръ, если мы будемъ разсматривать окружность, какъ линію, которая при одинаковомъ периметрѣ содержитъ наибольшую площадь, то, очевидно, будемъ имѣть опредѣленіе перваго рода; если-же мы изберемъ для опредѣленія окружности то ея свойство, что всѣ точки ея находятся на одинаковомъ разстояніи отъ нѣкоторой опредѣленной точки, или другое подобное свойство, то будемъ имѣть опредѣленіе второго рода.

Ясно, впрочемъ, что, говоря вообще, даже въ томъ случаѣ, когда мы знаемъ предметъ только по его *отличительному* опредѣленію, надо считать, что можетъ быть найдено и его *объяснительное* опредѣленіе; оно явится неизбѣжнымъ результатомъ послѣдующаго изученія даннаго предмета.

Теперь уже понятно, что къ простымъ *отличительнымъ* опредѣленіямъ никакъ нельзя примѣнить общее соображеніе, о которомъ мы упоминали выше, говоря, что каждое опредѣленіе линіи неизбѣжно является ея уравненіемъ въ нѣкоторой системѣ координатъ. Эту мысль мы можемъ распространить только на дѣйствительно *объяснительныя* опредѣленія.

Если ограничиться только послѣдними опредѣленіями, то указанный принципъ не трудно доказать. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, невозможно опредѣлить происхожденіе линіи, не указавъ нѣкотораго соотношенія между двумя простыми движеніями, вращательными или поступательными, на которыя въ каждый моментъ можно разложить движеніе описывающей кривую точки. Но если составить себѣ наиболѣе общее представленіе о томъ, что такое *система координатъ*, и допустить всевозможныя системы ихъ, то ясно, что упомянутое соотношеніе будетъ ничѣмъ инымъ, какъ уравненіемъ данной линіи въ нѣкоторой системѣ координатъ, природа которой будетъ соотвѣтствовать природѣ происхожденія этой линіи.

Такъ, напримѣръ, мы можемъ принять, что обыкновенное опредѣленіе окружности является непосредственно *полярнымъ уравненіемъ* этой кривой, если мы примемъ за полюсъ центръ ея. Точно также, элементарное опредѣленіе эллипса или гиперболы, какъ кривыхъ, происходящихъ отъ движенія нѣкоторой точки, причемъ сумма или разность разстояній этой точки отъ двухъ другихъ опредѣленныхъ точекъ остается постоянной, тотчасъ-же приводитъ къ уравненію разсматриваемыхъ линій $y \pm x = c$, если мы примемъ такую систему координатъ, въ которой положеніе точки опредѣляется ея разстояніями отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ, и допустимъ, что этими двумя полюсами являются данные фокусы; равнымъ образомъ обыкновенное опредѣленіе циклоиды прямо даетъ для этой кривой уравненіе $y = mx$, если принять за координаты каждой точки ту большую или меньшую дугу, которую она отмѣчаетъ на нѣкоторой окружности съ опредѣленнымъ радіусомъ, считая отъ точки касанія этой окружности съ постоянной прямой, и прямолинейное разстояніе этой точки касанія до нѣкотораго начала, взятаго на данной прямой. Также легко и аналогичнымъ путемъ можно провѣрить наше положеніе и относительно обычныхъ опредѣленій спиралей, эпициклоидъ и т. д. Во всѣхъ этихъ случаяхъ мы найдемъ, что существуетъ нѣкоторая система координатъ, въ которой можно непосредственно получить очень простое уравненіе предложенной линіи, изобразивъ только въ алгебраической формѣ условіе, налагаемое самымъ способомъ происхожденія данной линіи.

Помимо своего прямого значенія, какъ способа полнаго уясненія необходимости изображенія линіи уравненіемъ, приведенное выше разсужденіе, мнѣ кажется, можетъ принести дѣйствительную пользу для науки, такъ какъ точно характеризуетъ ту основную общую трудность, съ которой приходится сталкиваться при дѣйствительномъ составленіи этихъ уравненій, и, слѣдовательно, даетъ интересное указаніе на надлежащій путь для подобныхъ изслѣдованій; это тѣмъ болѣе важно, что для такихъ изслѣдованій, по самой природѣ ихъ, нельзя установить полныхъ и неизмѣнныхъ правилъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если каждое опредѣленіе линіи, или по крайней мѣрѣ тѣ изъ нихъ, которыя указываютъ на способъ ея происхожденія, даетъ намъ прямо уравненіе этой линіи въ извѣстной системѣ координатъ, или, вѣрнѣе, само является этимъ уравненіемъ, то изъ этого слѣдуетъ, что затрудненіе, часто испытываемое при нахожденіи уравненія нѣкоторой линіи—а это затрудненіе бываетъ очень большимъ—должно зависѣть, главнымъ образомъ, отъ того условія, которое обыкновенно ставятъ себѣ, — выразить аналитически эту линію въ данной системѣ координатъ, вмѣсто того, чтобы допустить одинаково всевозможныя системы. Въ аналитической геометріи не всѣ эти системы могутъ быть признаны одинаково удобными; по различнымъ соображеніямъ—главныя изъ нихъ мы разсмотримъ ниже—геометры почти всегда считаютъ необходимымъ относить кривыя къ прямолинейнымъ координатамъ въ собственномъ значеніи слова. Но изъ вышеизложеннаго легко понять, что часто эта единственная система не является именно той, къ которой уравненіе данной кривой будетъ непосредственно отнесено на основаніи опредѣленія ея; слѣдовательно, главная трудность въ составленіи уравненія линіи заключается, собственно говоря, въ извѣстномъ преобразованіи системы координатъ. Разумѣется, это разсужденіе никоимъ образомъ не подчиняетъ составленія уравненій настоящему общему законченному методу, успѣхъ котораго былъ-бы всегда и неизбѣжно обезпеченъ; такое предположеніе по самой природѣ вопроса является химеричнымъ; но указанная точка зрѣнія можетъ съ пользой пролить свѣтъ на тотъ путь, который слѣдуетъ примѣнять для достиженія предложенной цѣли. Составивъ сначала подготовительное уравненіе, прямо вытекающее изъ разсматриваемаго опредѣленія, необходимо будетъ, чтобы получить уравненіе относительно системы координатъ, принятой нами за окончательную, постараться выразить координаты, естественно соотвѣтствующія способу происхожденія данной линіи, въ функціи координатъ, принятыхъ нами за окончательныя.

Очевидно, что для этой то части работы и нельзя дать точныхъ и неизмѣнныхъ указаній. Можно только замѣтить, что въ нашемъ распоряженіи будетъ тѣмъ болѣе средствъ для разрѣшенія этой задачи, чѣмъ лучше мы будетъ знать истинную аналитическую геометрію, т. е. чѣмъ больше намъ будетъ извѣстно алгебраическихъ выраженій различныхъ геометрическихъ явленій.

Чтобы дополнить философское изложеніе принципа, служащаго основаніемъ аналитической геометріи, мнѣ остается указать на соображенія относительно выбора вообще наиболѣе удобной системы координатъ; это приведетъ насъ къ раціональному объясненію предпочтенія, единодушно оказываемаго обыкновенной прямолинейной системѣ. Это предпочтеніе до сихъ поръ было скорѣе дѣломъ эмпирически установившагося убѣжденія въ превосходствѣ этой системы, чѣмъ точнымъ результатомъ прямого и глубокаго анализа.

Чтобы сдѣлать опредѣленный выборъ между всѣми различными системами координатъ, необходимо тщательно отдѣлить двѣ общія точки зрѣнія, относящіяся къ аналитической геометріи и обратныя по своему смыслу: съ одной стороны отношеніе алгебры къ геометріи, основанное на выраженіи линій при помощи уравненій; съ другой—отношеніе геометріи къ алгебрѣ, основанное на изображеніи уравненій при помощи линій.

Очевидно, что во всякомъ изслѣдованіи общей геометріи эти двѣ точки зрѣнія неизбѣжно и постоянно переплетаются между собой, такъ какъ всегда приходится почти, такъ сказать, незамѣтно переходить то отъ геометрическихъ соображеній къ алгебраическимъ, то обратно— отъ алгебраическихъ соображеній къ геометрическимъ.

Но тѣмъ не менѣе, здѣсь намъ совершенно необходимо провести рѣзкую грань между обѣими точками зрѣнія; дѣйствительно, мы увидимъ, что разсматриваемый нами вопросъ о методѣ очень далекъ отъ того, чтобы оставаться однимъ и тѣмъ-же съ обѣихъ точекъ зрѣнія, такъ что безъ этого раздѣленія мы не могли-бы составить себѣ о немъ яснаго понятія.

Съ первой точки зрѣнія, если мы строго ее отдѣлимъ, единственнымъ мотивомъ предпочтенія той или другой системы координатъ можетъ быть только бо́льшая простота уравненія каждой линіи, и бо́льшая легкость составленія этого уравненія. Однако, легко убѣдиться, что съ этой точки зрѣнія не существуетъ и не можетъ существовать никакой системы координатъ, заслуживающей постояннаго предпочтенія передъ всѣми другими. Дѣйствительно, мы выше замѣтили, что для каждаго даннаго геометрическаго опредѣленія можно найти систему координатъ, въ которой уравненіе линіи получается непосредственно и въ которой оно, въ то же время, необходимо должно оказаться крайне простымъ; кромѣ того, эта система неизбѣжно измѣняется въ зависимости отъ природы характеризующаго кривую и разсматриваемаго нами свойства ея. Итакъ, въ этомъ смыслѣ прямолинейная система координатъ не всегда явилась бы наиболѣе удобной, хотя во многихъ случаяхъ она оказывается весьма подходящей; вѣроятно нѣтъ ни одной системы, которая, въ извѣстныхъ отдѣльныхъ случаяхъ, не была бы предпочтительнѣе ея и, точно также, каждой другой системы.

Напротивъ, съ второй точки зрѣнія, дѣло представляется въ совершенно иномъ видѣ. Въ самомъ дѣлѣ, не трудно установить, что, вообще говоря, обыкновенная прямолинейная система координатъ необходимо должна приспособляться легче, чѣмъ всякая другая, къ изображенію уравненій соотвѣтствующими геометрическими мѣстами, т. е. что въ ней это изображеніе постоянно проще и вѣрнѣе. Для доказательства этого положенія довольно принять во вниманіе, что каждая система координатъ имѣетъ цѣлью опредѣлить положеніе точки пересѣченіемъ двухъ линій. Поэтому, система наиболѣе удобная для представленія геометрическихъ *мѣстъ* будетъ та, въ которой эти двѣ линіи будутъ возможно болѣе простыми; это уже сразу ограничиваетъ поле нашего выбора одними *прямолинейными* системами. На самомъ дѣлѣ, кромѣ обыкновенной системы, пользующейся въ качествѣ координатъ разстояніями точки отъ двухъ постоянныхъ прямыхъ, очевидно существуетъ безконечное множество системъ, заслуживающихъ названія *прямолинейныхъ*, т. е. такихъ, гдѣ употребляются для опредѣленія точекъ только прямыя линіи; такой была-бы, напримѣръ, система, въ которой координатами каждой точки служили бы углы, образуемые двумя прямыми, соединяющими данную точку съ двумя постоянными точками, и прямой, соединяющей эти двѣ постоянныя точки. Поэтому наше первое замѣчаніе недостаточно для строгаго объясненія предпочтенія, единодушно отдаваемаго обыкновенной системѣ. Но, изслѣдуя съ болѣе глубокой точки зрѣнія природу всякой системы координатъ, мы нашли, кромѣ того, что каждая изъ двухъ линій, пересѣченіе которыхъ опредѣляетъ разсматриваемую точку, должна непремѣнно въ каждый моментъ среди условій, ее опредѣляющихъ, заключать одинъ только перемѣнный элементъ, дающій соотвѣтствующія значенія ординатъ, и нѣсколько другихъ постоянныхъ элементовъ; послѣдніе и представляютъ собою *оси* системы, если принять этотъ терминъ въ его наиболѣе широкомъ математическомъ значеніи. Перемѣнный элементъ необходимъ для того, чтобы можно было разсмотрѣть всѣ положенія, а постоянные—для того, чтобы имѣть средства для сравненія. Во всѣхъ *прямолинейныхъ* системахъ каждая изъ двухъ прямыхъ подчинена одному опредѣленному условію, а координата явится слѣдствіемъ перемѣннаго условія. Съ этой точки зрѣнія очевидно, вообще говоря, что въ системѣ, наиболѣе благопріятной для построенія геометрическихъ мѣстъ, по необходимости перемѣнное условіе для каждой прямой должно быть возможно проще, по скольку для этого не окажется необходимымъ усложнять постоянное условіе. Но изъ всѣхъ возможныхъ способовъ опредѣленія двухъ подвижныхъ прямыхъ самымъ удобнымъ для геометрическихъ изслѣдованій является тотъ, при которомъ направленіе каждой прямой остается неизмѣннымъ, и обѣ онѣ только болѣе или менѣе приближаются къ неподвижной оси, или удаляются отъ нея. Было бы, напримѣръ, очевидно, гораздо затруднительнѣе ясно представить себѣ перемѣщеніе точки, опредѣляемой пересѣченіемъ двухъ прямыхъ, изъ которыхъ каждая вращается вокругъ постоянной точки, образуя съ нѣкоторой осью больщій или меньшій уголъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ системѣ координатъ, о которой мы говорили выше. Таково дѣйствительное общее объясненіе основнаго свойства обыкновенной прямолинейной системы, которая, по своей природѣ, болѣе всѣхъ другихъ приспособлена для геометрическаго изображенія уравненій, такъ какъ легче всего даетъ возможность представить себѣ перемѣщеніе точки въ зависимости отъ измѣненія величины ея координатъ. Чтобы вполнѣ усвоить себѣ все значеніе нашего разсужденія, достаточно, напримѣръ, тщательно сравнить обыкновенную прямолинейную систему съ полярной, въ которой простое и легко составляемое геометрическое представленіе о двухъ прямыхъ, перемѣщающихся параллельно соотвѣтствующимъ осямъ, замѣняется сложной картиной безконечнаго множества концентрическихъ круговъ, пересѣкаемыхъ прямою, вращающейся по условію около постоянной точки. Впрочемъ, уже a priori легко представить себѣ, какое огромное значеніе должно имѣть для аналитической геометріи такое глубоко-элементарное свойство, которое должно проявляться на каждомъ шагу и значеніе котораго должно все болѣе возрастать во всѣхъ подобныхъ изслѣдованіяхъ *).

Если дальше развить наше разсужденіе, при помощи котораго мы доказали превосходство обыкновенной системы координатъ надъ всякой другой для цѣлей графическаго изображенія уравненій, то мы можемъ даже уяснить себѣ пользу, приносимую въ этомъ смыслѣ обычнымъ правиломъ — по возможности избирать взаимно перпендикулярныя оси координатъ предпочтительно передъ косоугольными. Для изображенія линій уравненіями, это второстепенное условіе не представляетъ какого-либо всеобщаго преимущества, какъ и сама природа системы (что мы и видѣли раньше); смотря по обстоятельствамъ, каждое другое

---

*) Я долженъ здѣсь ограничиться самымъ общимъ сравненіемъ, и поэтому не разсмотрѣлъ нѣсколькихъ другихъ элементарныхъ неудобствъ полярной системы, которыя, хотя и не имѣютъ такого глубокаго значенія, но тѣмъ не менѣе очень серьезны. Такъ, напримѣръ, полярная система не допускаетъ геометрическаго объясненія для знака радіуса вектора, и даже иногда указываетъ одну точку для нѣсколькихъ различныхъ рѣшеній, вслѣдствіе чего изображеніе уравненія въ этой системѣ неизбѣжно будетъ несовершенно. Но каковы бы ни были эти неудобства, мы не могли принимать ихъ во вниманіе для того, чтобы доказать общее превосходство обыкновенной прямолинейной системы, такъ какъ и кромѣ нея могутъ существовать нѣкоторыя системы, не страдающія подобными недостатками.

наклоненіе осей можетъ оказаться предпочтительнѣй въ этомъ отношеніи. Но съ обратной точки зрѣнія, легко понять, что прямоугольныя оси постоянно позволяютъ проще и даже вѣрнѣе изображать уравненія. Наклонныя оси раздѣляютъ пространство на области, не вполнѣ тождественныя другъ съ другомъ; поэтому, если геометрическое мѣсто уравненія простирается черезъ всѣ эти области, то, въ силу одного лишь неравенства угловъ, въ очертаніи линіи произойдутъ измѣненія, которыя, не соотвѣтствуя какому-либо аналитическому различію, по необходимости исказятъ полную точность изображенія, примѣшиваясь къ результатамъ собственно алгебраическихъ сравненій.

Такъ, напримѣръ, уравненіе $x^m + y^m = c$, которое, въ виду своей полной симметричности, должно бы было изображаться кривой, состоящей изъ четырехъ тождественныхъ частей, въ косоугольной системѣ координатъ будетъ представлено линіей, состоящей изъ четырехъ неравныхъ частей. Ясно, что избѣжать этихъ неудобствъ можно только однимъ способомъ — предполагать, что уголъ между координатными осями прямой.

Предшествующее изслѣдованіе ясно намъ показало, что съ первой изъ основныхъ точекъ зрѣнія, постоянно комбинируемыхъ въ аналитической геометріи, прямолинейная система въ узкомъ смыслѣ слова не имѣетъ никакого постояннаго преимущества передъ всякой другой; но такъ какъ она въ этомъ смыслѣ нисколько не уступаетъ всякой другой системѣ, то ея безусловное и необходимое преимущество для цѣлей графическаго изображенія уравненій обезпечиваетъ за ней общее предпочтеніе, хотя, разумѣется, можетъ случиться, что въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ необходимость упростить уравненія и облегчить ихъ составленіе заставляетъ геометровъ примѣнять менѣе совершенныя системы. Дѣйствительно, всѣ наиболѣе существенныя теоріи общей геометріи, служащія для аналитическаго изображенія важнѣйшихъ геометрическихъ явленій, построены именно съ помощью прямолинейной системы. Если же признается необходимымъ выбрать другую систему, то почти всегда останавливаются на полярной системѣ, такъ какъ природа этой системы на столько противоположна природѣ прямолинейной системы, что уравненія, являющіяся въ послѣдней черезчуръ сложными, въ первой, вообще говоря, въ достаточной степени упрощаются. Полярныя координаты часто имѣютъ то преимущество, что имѣютъ болѣе прямое и болѣе естественное конкретное значеніе, какъ напримѣръ въ механикѣ, въ геометрическихъ вопросахъ, къ которымъ приводитъ теорія вращательныхъ движеній, и почти во всѣхъ случаяхъ небесной геометріи.

До сихъ поръ, чтобы упростить наше введеніе, мы разсматривали основной принципъ аналитической геометріи только въ примѣненіи къ плоскимъ кривымъ; ихъ изученіе было единственнымъ предметомъ великаго философскаго обновленія, произведеннаго Декартомъ. Теперь намъ предстоитъ, чтобы дополнить наше важное разъясненіе, показать въ общихъ чертахъ, какимъ образомъ эта основная мысль была распространена нашимъ знаменитымъ Клэро, около вѣка спустя, на общее изслѣдованіе поверхностей и линій двоякой кривизны. Намѣченныя выше соображенія позволяютъ мнѣ ограничиться бѣглымъ анализомъ только дѣйствительныхъ особенностей этого новаго случая.

Для полнаго аналитическаго опредѣленія положенія точки въ пространствѣ, очевидно, требуется, чтобы были даны значенія трехъ координать ея: такъ, напримѣръ, въ наиболѣе употребительной системѣ, соотвѣтствующей *прямолинейной* системѣ въ геометріи на плоскости, необходимо указать разстоянія точки отъ трехъ постоянныхъ плоскостей, причемъ обыкновенно принимаютъ, что эти три плоскости взаимно перпендикулярны; въ этомъ случаѣ точка является пересѣченіемъ трехъ плоскостей, неизмѣняющихъ своего направленія. Можно бы было также воспользоваться разстояніемъ подвижной точки отъ трехъ постоянныхъ точекъ; въ этомъ случаѣ точка опредѣлялась бы пересѣченіемъ трехъ сферическихъ поверхностей съ постоянными центрами. Точно также, положеніе точки можно опредѣлить, указавъ ея разстояніе отъ нѣкоторой постоянной точки и направленіе этого разстоянія, опредѣляемое двумя углами, образуемыми этой прямой съ двумя неизмѣнными осями; это будетъ *полярная* система, свойственная геометріи трехъ измѣреній; въ этомъ случаѣ точка опредѣляется пересѣченіемъ шаровой поверхности, обладающей неподвижнымъ центромъ, и двухъ прямыхъ конусовъ, съ круговыми основаніями, постоянными осями и неподвижной общей вершиной. Однимъ словомъ, и въ этомъ случаѣ, очевидно, имѣется безконечное разнообразіе различныхъ системъ координатъ, подобно тому, какъ мы это видѣли въ геометріи двухъ измѣреній.

Въ общемъ, необходимо положить, что точка въ пространствѣ всегда опредѣляется пересѣченіемъ какихъ-нибудь трехъ поверхностей, подобно тому, какъ на плоскости—пересѣченіемъ двухъ линій: всѣ условія, опредѣляющія каждую изъ этихъ трехъ поверхностей, должны обладать неизмѣннымъ характеромъ, за исключеніемъ одного, которое и даетъ соотвѣтствующую координату. Его геометрическое значеніе такимъ образомъ выражается въ томъ, что оно принуждаетъ точку лежать на данной поверхности. Теперь уже ясно, что если всѣ три координаты точки совершенно независимы другъ отъ друга, то точка можетъ занимать въ пространствѣ любое мѣсто. Но если точка должна постоянно оставаться на нѣкоторой поверхности, заданной какимъ-бы то ни было образомъ, то, очевидно, достаточно двухъ координатъ, чтобы опредѣлить въ каждый моментъ ея положеніе, такъ какъ данная поверхность замѣнитъ собою условіе, налагаемое третьей координатой. Поэтому, необходимо съ аналитической точки зрѣнія считать эту послѣднюю координату опредѣленной функціей двухъ другихъ, остающихся совершенно независимыми другъ отъ друга. Итакъ, между тремя перемѣнными координатами будетъ существовать нѣкоторое постоянное уравненіе, и притомъ только *единственное*, такъ какъ только въ такомъ случаѣ неопредѣленность положенія точки будетъ выражена вполнѣ точно. Это уравненіе всегда существуетъ, хотя найти его можетъ быть болѣе или менѣе затруднительно; оно будетъ служить аналитическимъ опредѣленіемъ данной поверхности, такъ какъ всѣ точки ея,—и только онѣ,—будутъ ему удовлетворять. Если поверхность претерпитъ какое-нибудь измѣненіе, хотя бы простое перемѣщеніе, то уравненіе должно будетъ претерпѣть соотвѣтствующее болѣе или менѣе значительное измѣненіе. Словомъ всѣ геометрическія явленія, свойственныя поверхностямъ, можно будетъ передать извѣстными равносильными имъ аналитическими условіями, свойственными уравненіямъ съ тремя неизвѣстными; задача аналитической геометріи трехъ измѣреній сведется именно къ нахожденію и разъясненію этой общей и необходимой гармоніи.

Наконецъ, если эту-же основную мысль мы разсмотримъ съ обратной точки зрѣнія, то увидимъ, что каждое уравненіе съ тремя перемѣнными можетъ быть, вообще говоря, выражено геометрически опредѣленной поверхностью, которая прежде всего будетъ опредѣляться тѣмъ характернымъ для нея свойствомъ, что координаты всѣхъ ея точекъ будутъ постоянно связаны соотношеніемъ, выраженнымъ даннымъ уравненіемъ. Это геометрическое мѣсто для одного и того же уравненія, очевидно, будетъ измѣняться вмѣстѣ съ системой координатъ, которая будетъ примѣнена для его построенія. Возьмемъ хотя-бы прямолинейную систему; очевидно, что въ уравненіи между тремя перемѣнными x, y, z каждое частное значеніе, данное z, приведетъ къ уравненію между x и y; геометрическое мѣсто этого уравненія будетъ нѣкоторой линіей, находящейся въ плоскости, параллельной плоскости xy и отдѣленной отъ этой плоскости разстояніемъ, равнымъ частному значенію, данному нами z. Такимъ образомъ, общее геометрическое мѣсто явится какъ бы составленнымъ изъ безконечной послѣдовательности линій, расположенныхъ другъ надъ другомъ въ ряду параллельныхъ плоскостей—если отвлечься отъ тѣхъ перерывовъ, которые могутъ представиться—и, слѣдовательно, образуетъ настоящую поверхность.

То-же самое мы нашли-бы и при разсмотрѣніи всякой иной системы координатъ, хотя намъ было-бы трудно прослѣдить геометрическое построеніе уравненія.

Таковъ основный принципъ—дополненіе къ первоначальной мысли Декарта—на которомъ построена общая геометрія поверхностей. Было бы безполезно повторять здѣсь всѣ наши соображенія, изложенныя выше, когда мы говорили о линіяхъ. Каждый самъ можетъ примѣнить ихъ къ поверхностямъ, частью чтобъ доказать, что каждое опредѣленіе поверхности на основаніи способа ея происхожденія въ дѣйствительности является непосредственнымъ уравненіемъ этой поверхности въ нѣкоторой системѣ координатъ, частью, чтобъ опредѣлить, какая система координатъ изъ всевозможныхъ различныхъ системъ является въ общемъ наиболѣе удобной. По этому поводу я только прибавлю, что необходимое превосходство обыкновенной прямолинейной системы для цѣлей графическаго изображенія уравненій, очевидно, возрастаетъ въ геометріи трехъ измѣреній сравнительно съ геометріей на плоскости: зависитъ это отъ несравненно большей сложности, связанной съ выборомъ всякой другой системы. Это утвержденіе можно очень наглядно провѣрить, если теперь разсмотрѣть для сравненія, напримѣръ, хотя бы полярную систему, которая для поверхностей такъ же, какъ и для линій,—и по тѣмъ же соображеніямъ—является наиболѣе употребительной послѣ прямолинейной системы въ собственномъ смыслѣ слова.

Чтобы дополнить общее изложеніе основного принципа аналитическаго изслѣдованія поверхностей, намъ придется въ четырнадцатой лекціи разсмотрѣть съ философской точки зрѣнія послѣднее очень важное усовершенствованіе, недавно внесенное Монжемъ въ самыя основы этой теоріи для того, чтобы классифицировать линіи въ естественныя группы по способу ихъ происхожденія, выразивъ ихъ алгебраически общими дифференціальными уравненіями или простыми уравненіями, содержащими произвольныя функціи.

Разсмотримъ теперь послѣднюю основную точку зрѣнія аналитической геометріи трехъ измѣреній. Она относится къ алгебраическому представленію кривыхъ, разсматриваемыхъ въ пространствѣ наиболѣе общимъ способомъ. Продолжая слѣдовать тому-же принципу, который мы здѣсь постоянно примѣняли, т. е. стараясь установить соотвѣтствіе между степенью неопредѣленности геометрическаго мѣста и степенью независимости перемѣнныхъ, мы убѣдимся, что, вообще говоря, когда точка должна быть расположена на нѣкоторой кривой, достаточно одной координаты для того, чтобы вполнѣ ее опредѣлить: наша точка будетъ построена пересѣченіемъ данной кривой съ поверхностью, опредѣляемой координатой. Итакъ, въ этомъ случаѣ остальныя двѣ координаты точки должны быть разсматриваемы какъ опредѣленныя и различныя функціи первой.

Изъ этого слѣдуетъ, что всякая линія, разсматриваемая въ пространствѣ, изображается аналитически уже не однимъ уравненіемъ, а совокупностью двухъ уравненій между тремя координатами любой ея точки. Дѣйствительно, ясно, съ другой стороны, что такъ какъ каждое изъ этихъ выраженій въ отдѣльности изображаетъ нѣкоторую поверхность, то ихъ совокупность изображаетъ данную линію, какъ пересѣченіе двухъ опредѣленныхъ плоскостей.

Таковъ наиболѣе общій способъ алгебраическаго изображенія линій въ геометріи трехъ измѣреній.

Этотъ принципъ обыкновенно разсматриваютъ съ черезчуръ узкой точки зрѣнія, когда говорятъ, что линія опредѣляется системой двухъ своихъ *проекцій* на двѣ координатныя плоскости. Такая система характеризуется аналитически той особенностью, что каждое изъ двухъ уравненій линіи содержитъ тогда уже лишь двѣ изъ трехъ координатъ, вмѣсто того, чтобы заключать въ себѣ всѣ три перемѣнныя вмѣстѣ.

Этотъ методъ, въ которомъ линія разсматривается, какъ пересѣченіе двухъ цилиндрическихъ поверхностей, параллельныхъ двумъ изъ трехъ осей координатъ, помимо того неудобства, что его примѣненіе ограничивается обыкновенной прямолинейной системой, отличается еще и тѣмъ недостаткомъ, что вводитъ безполезныя затрудненія въ аналитическое представленіе линіи, такъ какъ комбинація двухъ цилиндрическихъ поверхностей далеко не всегда является наиболѣе удобной для составленія уравненія линіи.

Итакъ, если разсматривать это основное понятіе въ его наиболѣе общей формѣ, то въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ намъ нужно изъ безконечнаго множества тѣхъ поверхностей, которыя, пересѣкаясь попарно, могли бы служить для построенія данной линіи, выбрать пару, легче всего приводящую къ составленію искомаго уравненія, т. е. состоящую изъ наиболѣе извѣстныхъ поверхностей. Такъ, напримѣръ, если мы захотимъ аналитически изобразить окружность въ пространствѣ, мы очевидно должны предпочесть разсматривать ее, какъ пересѣченіе шаровой поверхности и плоскости, а не будемъ искать другой комбинаціи поверхностей, которая привела-бы къ такому-же результату.

На самомъ дѣлѣ, этотъ способъ представлять себѣ изображенія линій уравненіями въ аналитической геометріи трехъ измѣреній, по самой своей природѣ, влечетъ за собою неизбѣжное неудобство: онъ приводитъ къ нѣкоторому аналитическому смѣшенію въ виду того, что та-же самая линія въ той же системѣ координатъ можетъ быть выражена безчисленными парами уравненій, отвѣчающими безчисленнымъ парамъ поверхностей, которыя могутъ образовать данную линію; это обстоятельство можетъ представить нѣкоторыя затрудненія при распознаваніи линіи во всѣхъ алгебраическихъ видоизмѣненіяхъ, какія для нея возможны. Существуетъ, однако, общій и крайне простой методъ для устраненія этого недостатка, причемъ не исчезаютъ и преимущества, связанныя съ этимъ видомъ геометрическихъ построеній.

Въ самомъ дѣлѣ, для этого вполнѣ достаточно, какова-бы ни была аналитическая система, первоначально установленная для нѣкоторой линіи, умѣть вывести изъ нея систему, соотвѣтствующую одной парѣ поверхностей единообразнаго происхожденія,—напримѣръ, парѣ двухъ цилиндрическихъ поверхностей, проектирующихъ данную линію на двѣ координатныя плоскости; эти поверхности, очевидно, всегда останутся тождественными, какимъ-бы путемъ ни была получена линія, и измѣнятся только тогда, когда измѣнится сама линія. Итакъ, выбирая эту неизмѣнную систему, которая дѣйствительно является наиболѣе простой, мы, вообще говоря, будемъ въ состояніи изъ первоначальныхъ уравненій вывести уравненія, соотвѣтствующія этому частному построенію: для этого, при помощи двухъ послѣдовательныхъ исключеній, мы преобразуемъ ихъ въ два уравненія, содержащія только по двѣ перемѣнныхъ координаты и уже въ силу такого условія соотвѣтствующія двумъ проектирующимъ поверхностямъ.

Таково, въ дѣйствительности, главное значеніе этой геометрической комбинаціи: она даетъ намъ неизмѣнное и вѣрное средство для опредѣленія тождественности линій, не смотря на очень значительное иногда различіе ихъ уравненій.

Послѣ общаго разсмотрѣнія основного принципа аналитической геометріи въ наиболѣе элементарныхъ формахъ, представляемыхъ имъ, намъ остается еще, для дополненія въ философскомъ отношеніи нашего очерка, указать здѣсь на общія несовершенства, которыми до сихъ поръ еще страдаетъ этотъ принципъ, какъ относительно геометріи, такъ и относительно анализа.

Относительно геометріи необходимо замѣтить, что уравненія до сихъ поръ могутъ выражать только геометрическія мѣста полностью, а ни въ коемъ случаѣ не опредѣленныя части этихъ геометрическихъ мѣстъ. Однако, во многихъ случаяхъ было бы необходимо имѣть возможность выразить аналитически отрѣзокъ линіи или поверхности, и даже *прерывныя* линіи или поверхности, составленныя изъ ряда отрѣзковъ, принадлежащихъ различнымъ геометрическимъ фигурамъ, какъ напримѣръ периметръ многоугольника или поверхность многогранника. Термологія особенно часто приводитъ къ подобнымъ соображеніямъ, къ которымъ наша современная аналитическая геометрія оказывается безусловно неприложимой.

Тѣмъ не менѣе важно отмѣтить, что за послѣднее время изслѣдованія г. Фурье надъ прерывными функціями начинаютъ уже заполнять этотъ значительный пробѣлъ и этимъ самымъ уже ввели новое существенное усовершенствованіе въ основную мысль Декарта. Но этотъ способъ представленія разнородныхъ или частныхъ формъ основанъ на примѣненіи тригонометрическихъ рядовъ, расположенныхъ по синусамъ безконечнаго ряда кратныхъ дугъ, или-же на примѣненіи опредѣленныхъ интеграловъ, равносильныхъ этимъ рядамъ, но общіе интегралы которыхъ неизвѣстны; поэтому такой способъ является еще черезчуръ сложнымъ для того, чтобы онъ могъ быть непосредственно введенъ въ систему собственно аналитической геометріи.

Относительно анализа необходимо начать съ признанія, что невозможность изобразить геометрически уравненія, содержащія четыре, пять и болѣе перемѣнныхъ, подобно тому, какъ мы изображаемъ всѣ уравненія съ двумя и тремя перемѣнными, не можетъ быть приписана несовершенству нашей системы аналитической геометріи, такъ какъ она, очевидно, зависитъ отъ самой природы предмета. Анализъ неизбѣжно обладаетъ гораздо большей общностью, чѣмъ геометрія, такъ какъ относится ко всѣмъ возможнымъ явленіямъ; поэтому было-бы, съ философской точки зрѣнія, неправильно стараться въ однихъ только геометрическихъ явленіяхъ постоянно находить конкретное изображеніе всѣхъ законовъ, могущихъ быть выраженными при помощи анализа. Но существуетъ другое, менѣе важное несовершенство, которое дѣйствительно надо считать результатомъ самой точки зрѣнія, положенной нами въ основу аналитической геометріи.

Это несовершенство заключается въ томъ, что наше обычное изображеніе уравненій съ двумя и тремя перемѣнными при помощи линій и поверхностей, очевидно, всегда является болѣе или менѣе неполнымъ, такъ какъ при построеніи геометрическихъ мѣстъ, мы обращаемъ вниманіе только на вещественныя *рѣшенія* уравненія, и совершенно упускаемъ изъ виду *мнимыя*. Однако общій ходъ *мнимыхъ* рѣшеній, по своей природѣ, допускаетъ геометрическое изображеніе совершенно такъ же, какъ и ходъ рѣшеній вещественныхъ. Изъ этого упущенія слѣдуетъ, что графическое изображеніе уравненія постоянно является неполнымъ; иногда-же, когда уравненіе допускаетъ лишь мнимыя рѣшенія, неполнота изображенія обращается въ полнѣйшее отсутствіе его.

Однако, даже и въ этомъ послѣднемъ случаѣ, очевидно, слѣдовало-бы, съ геометрической точки зрѣнія, различать уравненія, настолько отличныя отъ другихъ, какъ напримѣръ слѣдующія:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,\ x^4 + y^4 + 1 = 0,\ y^2 + e^x = 0.$$

Помимо того извѣстно, что это основное несовершенство часто влечетъ за собою въ аналитической геометріи двухъ и трехъ измѣреній множество второстепенныхъ неудобствъ въ томъ смыслѣ, что нѣкоторыя аналитическія измѣренія не находятъ соотвѣтствія въ геометрическихъ явленіяхъ.

Одинъ изъ величайшихъ современныхъ геометровъ, г. Пуансо, представилъ весьма остроумное и простое соображеніе, еще не оцѣненное вообще по достоинству, которое, если уравненія не слишкомъ сложны, позволяетъ представить себѣ графическое изображеніе мнимыхъ рѣшеній, ограничиваясь изображеніемъ ихъ отношеній, когда эти отношенія вещественны *). Но это соображеніе, которому нетрудно было-бы придать болѣе общую и отвлеченную форму, до сихъ поръ мало пригодно для дѣйствительнаго примѣненія, такъ какъ методы алгебраическаго рѣшенія уравненій находятся еще въ стадіи крайняго несовершенства, и поэтому видъ мнимыхъ корней часто вполнѣ остается неизвѣстнымъ или же представляется черезчуръ сложнымъ. Необходимы новыя изслѣдованія въ томъ-же направленіи для того, чтобы можно было признать

*) Пуансо показалъ, напримѣръ, въ своемъ прекрасномъ „Мемуарѣ объ анализѣ дѣленій угла", что уравненіе $x^2 + y^2 + a^2 = 0$, обыкновенно устраняемое какъ не представляющее геометрическаго мѣста, можетъ быть очень просто и ясно изображено равносторонней гиперболой, которая по отношенію къ этому уравненію играетъ ту же роль, какъ окружность по отношенію къ уравненію $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

этотъ существенный пробѣлъ въ нашей аналитической геометріи заполненнымъ.

Попытка философскаго изложенія основного принципа аналитической геометріи, содержащаяся въ этой главѣ, ясно показала намъ, что разсматриваемая нами наука имѣетъ главной цѣлью опредѣлить, вообще, аналитическое выраженіе для того или другого геометрическаго явленія, свойственнаго линіямъ и поверхностямъ, и обратно — открыть геометрическое толкованіе того или другаго аналитическаго соображенія.

Теперь намъ предстоитъ разсмотрѣть,—разумѣется, ограничиваясь самыми общими и важными вопросами,—какимъ образомъ геометрамъ дѣйствительно удалось установить эту прекрасную гармонію и тѣмъ придать геометріи, разсматриваемой въ всей ея совокупности, характеръ совершенной раціональности и простоты, въ такой высокой степени присущій ей въ настоящее время.

Таковъ будетъ главный предметъ двухъ слѣдующихъ лекцій; изъ нихъ одна будетъ посвящена общему изслѣдованію линій, другая — общему изслѣдованію поверхностей.

Тринадцатая лекція.

Общая геометрія двухъ измѣреній.

Вслѣдствіе общепринятаго до настоящаго времени порядка изложенія геометріи, истинное назначеніе аналитической геометріи понимается еще крайне несовершенно, далеко несоотвѣтственно взгляду, составленному о томъ же предметѣ истинными геометрами съ тѣхъ поръ, какъ распространеніе аналитическихъ понятій на раціональную механику позволило возвыситься до нѣкоторыхъ общихъ идей о математической философіи. Радикальный переворотъ, произведенный великой идеей Декарта, совершенно еще не оцѣненъ по достоинству въ современной постановкѣ математическаго преподаванія, даже высшаго. Удивительный методъ Декарта—въ томъ видѣ, въ которомъ онъ преподается и, главное, примѣняется—сначала какъ будто бы не имѣетъ иной дѣйствительной цѣли, кромѣ упрощенія изученія коническихъ сѣченій или нѣкоторыхъ другихъ кривыхъ, разсматриваемыхъ, однако, всегда одна за другой, въ соотвѣтствіи съ духомъ геометріи древнихъ, а такая цѣль, безъ сомнѣнія, представляется маловажной. До сихъ поръ еще невыяснено достаточно, что истинный отличительный характеръ современной геометріи, составляющій ея несомнѣнное преимущество, заключается въ томъ, что тамъ изучаются въ наиболѣе общей формѣ различные вопросы, относящіеся къ любымъ линіямъ и поверхностямъ, причемъ всѣ геометрическія соображенія и изслѣдованія преобразуются въ аналитическія. Замѣчательно, что во всѣхъ учрежденіяхъ, служащихъ высшему математическому образованію, — и даже въ наиболѣе знаменитыхъ, пользующихся заслуженной репутаціей,—до сихъ поръ еще не введенъ настоящій догматическій курсъ общей геометріи, въ ясномъ и полномъ изложеніи *).

Однако, такой систематическій очеркъ удобнѣе всего для того,

*) Рутина, которую приходится наблюдать въ этомъ дѣлѣ, особенно въ преподаваніи низшей математики, ясно показываетъ, что хотя со времени появленія геометріи Декарта прошло уже два столѣтія, тѣмъ не менѣе наше обычное математическое преподаваніе далеко еще не соотвѣтствуетъ настоящему положенію науки; это, главнымъ образомъ, зависитъ — чего никакъ нельзя скрывать,—отъ крайней бездарности большинства лицъ, которымъ поручается эта важная отрасль преподаванія, тогда какъ настоящіе авторитеты науки не могутъ оказывать постояннаго и правильнаго вліянія на направленіе математическаго преподаванія.

чтобы ясно обнаружить философскій характеръ математики, такъ какъ онъ съ совершенной точностью раскрылъ бы общую форму отношенія абстрактнаго къ конкретному въ математической теоріи любого класса естественныхъ явленій.

Эти соображенія достаточно ясно указываютъ, какую прямую и особую пользу—помимо его высокаго философскаго значенія—можетъ имѣть тотъ очеркъ, къ которому насъ приводитъ теперь планъ нашего труда.

Итакъ, намъ предстоитъ, исходя изъ основной идеи, изложенной въ предъидущей главѣ относительно аналитическаго представленія геометрическихъ формъ, разсмотрѣть, какимъ образомъ геометрамъ удалось привести всѣ вопросы общей геометріи къ вопросамъ чистаго анализа, и опредѣлить аналитическіе законы всѣхъ геометрическихъ явленій, т. е. алгебраическія видоизмѣненія, соотвѣтствующія имъ въ уравненіяхъ линій и поверхностей. Сначала я ограничусь только разсмотрѣніемъ кривыхъ, и даже плоскихъ кривыхъ, а общее изученіе поверхностей и линій двоякой кривизны отложу до слѣдующей лекціи. Общее направленіе этого труда заставляетъ насъ ограничиться философскимъ разсмотрѣніемъ наиболѣе важныхъ общихъ вопросовъ и, главное, устранить всякое примѣненіе къ частнымъ формамъ. Здѣсь мы должны имѣть въ виду только одну существенную цѣль: съ точностью установить, какимъ образомъ основная идея Декарта привела къ построенію общей системы геометріи на раціональныхъ и точныхъ основахъ. Каждое другое изслѣдованіе входило-бы въ рамки спеціальнаго курса по геометріи; но что касается даннаго вопроса, то разсмотрѣніе его неизбѣжно для разрѣшенія поставленной нами себѣ задачи. Разумѣется, можно понять à priori, какъ я указалъ въ предъидущей лекціи, что разъ только предметъ геометрическихъ изслѣдованій будетъ представленъ въ аналитическомъ видѣ, то всѣ признаки и явленія, свойственныя этому предмету, необходимо должны допускать подобное-же истолкованіе. Но ясно, что подобное разсужденіе ни въ коемъ случаѣ, даже съ чисто-философской точки зрѣнія, не можетъ избавить насъ отъ разсмотрѣнія дѣйствительнаго установленія этой общей гармоніи между геометріей и анализомъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы-бы составили себѣ о ней только смутное, неясное и совершенно недостаточное представленіе.

Первый и самый простой вопросъ, который можетъ быть предложенъ относительно извѣстной кривой, сводится къ нахожденію, по уравненію *) этой кривой, числа точекъ, необходимыхъ для ея опредѣленія. Помимо прямого значенія этого вопроса, до сихъ поръ не разсмотрѣннаго съ достаточно раціональной точки зрѣнія, я считаю необходимымъ подробнѣе остановиться на общемъ рѣшеніи указанной элементарной задачи, такъ какъ мнѣ кажется, что оно, въ виду крайней простоты соотвѣтствующихъ аналитическихъ пріемовъ, особенно пригодно по своему методу для уясненія истиннаго духа аналитической геометріи, т. е. необходимаго и постояннаго соотношенія между абстрактной и конкретной точками зрѣнія.

Чтобы вполнѣ разрѣшить эту задачу, необходимо различать два случая: 1) когда предложенная кривая аналитически опредѣляется своимъ

*) Для опредѣленности изложенія, я буду постоянно разсматривать въ этой и слѣдующей лекціи, если не будетъ сдѣлано особой оговорки, систему обыкновенныхъ прямолинейныхъ координатъ.

наиболѣе общимъ уравненіемъ, т. е. уравненіемъ, отвѣчающимъ всякому положенію кривой относительно осей и 2) когда кривая опредѣляется болѣе частнымъ и простымъ уравненіемъ, соотвѣтствующимъ только одному опредѣленному положенію кривой относительно осей.

Въ первомъ случаѣ очевидно, что условіе, заставляющее кривую проходить черезъ данную точку, равносильно, съ аналитической точки зрѣнія, условію, чтобы произвольныя постоянныя, содержащіяся въ общемъ уравненіи кривой, имѣли между собою соотношеніе, получающееся отъ подстановки въ данное уравненіе частныхъ координатъ этой точки. Поэтому, такъ какъ каждая точка подчиняетъ постоянныя нѣкоторому алгебраическому условію, то для полнаго опредѣленія кривой необходимо указать столько точекъ, сколько въ уравненіи содержится произвольныхъ постоянныхъ. Таково общее правило. Тѣмъ не менѣе слѣдуетъ замѣтить, что оно можетъ привести къ ошибочному заключенію и указать на слишкомъ большое число точекъ въ томъ случаѣ, если въ предложенномъ уравненіи число различныхъ членовъ, содержащихъ произвольныя постоянныя, будетъ меньше, чѣмъ число самыхъ постоянныхъ. Въ этомъ случаѣ, очевидно, пришлось-бы судить о числѣ точекъ, необходимыхъ для полнаго опредѣленія кривой, только по числу этихъ членовъ; съ геометрической точки зрѣнія, это правило означало-бы, что разсматриваемыя постоянныя могутъ подвергнуться нѣкоторымъ измѣненіямъ, которыя не имѣли-бы никакого вліянія на форму самой кривой.

Такой случай имѣлъ-бы мѣсто, если-бы мы, напримѣръ, опредѣлили окружности какъ кривую, описанную вершиной угла постоянной величины, вращающагося такимъ образомъ, что каждая изъ его сторонъ проходитъ черезъ заданную точку.

Необходимо, поэтому, для большей общности, отдѣльно считать число постоянныхъ, входящихъ въ уравненіе, и число членовъ, ихъ содержащихъ, и устанавливать затѣмъ число точекъ, необходимыхъ для полнаго опредѣленія кривой въ соотвѣтствіи съ меньшимъ изъ этихъ двухъ чиселъ, если только они не окажутся равными. Если-же кривая первоначально опредѣлена только уравненіемъ такого рода, который мы назвали выше *частнымъ*, то при помощи постояннаго и крайне простого преобразованія легко можно привести этотъ случай къ предъидущему, надлежащимъ способомъ *обобщая* предложенное уравненіе. Для этого достаточно отнести кривую, по извѣстнымъ формуламъ, къ новой системѣ осей, положеніе которой относительно данныхъ осей признавалось-бы неопредѣленнымъ. Если указанное преобразованіе не измѣнитъ существеннымъ образомъ аналитическаго состава первоначальнаго уравненія, то это будетъ служить доказательствомъ, что уравненіе было достаточно общимъ; въ противномъ случаѣ, оно приметъ общій форму, и тогда уже вопросъ легко будетъ разрѣшенъ при помощи только что установленнаго правила.

Можно даже замѣтить, чтобы еще упростить наше рѣшеніе, что подобное обобщеніе уравненія всегда, каково-бы ни было первоначальное уравненіе, введетъ три новыя произвольныя постоянныя, а именно: двѣ координаты новаго начала и наклоненіе новыхъ осей относительно старыхъ; такимъ образомъ, не производя даже вычисленія, мы будемъ въ состояніи узнать число произвольныхъ постоянныхъ, которыя войдутъ въ наиболѣе общее уравненіе и, слѣдовательно, прямо указать число точекъ, необходимыхъ для опредѣленія данной кривой въ тѣхъ случаяхъ, по крайней мѣрѣ, когда мы можемъ заранѣе быть увѣрены—какъ это бываетъ очень часто—что число членовъ, содержащихъ постоянныя, не будетъ меньше числа самыхъ постоянныхъ.

Чтобы показать, до какой степени легкости можно довести рѣшеніе этой задачи, слѣдуетъ замѣтить, что такъ какъ аналитическая операція, необходимая для рѣшенія задачи, сводится къ простому счету, то это перечисленіе можетъ быть сдѣлано еще раньше, чѣмъ будетъ получено уравненіе кривой, по одному ея геометрическому опредѣленію.

Въ самомъ дѣлѣ, достаточно съ этой точки зрѣнія разсмотрѣть данное опредѣленіе и установить, заданія сколькихъ точекъ, или прямыхъ—по величинѣ или по направленію—или круговъ оно требуетъ для полнаго опредѣленія предложенной кривой. При этихъ условіяхъ мы узнаемъ также заранѣе, сколько произвольныхъ постоянныхъ должно войти въ наиболѣе общее уравненіе этой кривой, принимая во вниманіе, что каждая постоянная точка, заданная опредѣленіемъ, повлечетъ за собой появленіе двухъ постоянныхъ, каждая заданная прямая—также двухъ, каждая заданная длина—одной, каждая заданная окружность—трехъ и т. д. Поэтому можно будетъ сейчасъ же судить о числѣ точекъ, необходимыхъ для опредѣленія кривой, съ такой же точностью, какъ если-бы мы имѣли передъ глазами полное общее уравненіе этой кривой, по крайней мѣрѣ, за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, когда число членовъ, содержащихъ произвольныя постоянныя, менѣе числа постоянныхъ. Но это ограниченіе часто можно будетъ признавать непримѣнимымъ, когда анализъ опредѣленія ясно покажетъ, что каждое измѣненіе установленныхъ имъ данныхъ,—будутъ-ли они измѣняться въ отдѣльности, или вмѣстѣ—повлечетъ за собой нѣкоторое измѣненіе кривой. Но въ тѣхъ случаяхъ, когда такое ограниченіе дѣйствительно должно имѣть мѣсто, изложенное соображеніе установитъ сначала лишь высшій предѣлъ искомаго числа; что же касается до самаго числа, то для его нахожденія придется, дѣйствительно, прибѣгнуть къ общему уравненію кривой.

До сихъ поръ я предполагалъ, что для опредѣленія кривой пользуются безусловно произвольными точками, но, чтобы дополнить методъ, необходимо разсмотрѣть тотъ случай, когда въ число ихъ вводятся *особыя* точки, т. е. точки, отличающіяся отъ всѣхъ другихъ какимъ-нибудь характеристическимъ признакомъ, какъ, напримѣръ, такъ называемые *фокусы* въ коническихъ сѣченіяхъ, *вершины*, *центры*, точки *изгиба* и *возврата*. Всѣ эти точки характерны тѣмъ, что являются *единичными*, или, по крайней мѣрѣ, опредѣленными для данной кривой; поэтому каждая изъ ихъ координатъ является опредѣленной—извѣстной или неизвѣстной—функціей тѣхъ постоянныхъ, которыя точно характеризуютъ данную кривую. Поэтому, если мы зададимъ одну такую точку, то мы этимъ самымъ подчинимъ произвольныя постоянныя кривой двумъ алгебраическимъ условіямъ, что аналитически соотвѣтствуетъ заданію двухъ обыкновенныхъ точекъ. Итакъ, общее и крайне простое правило сводится въ этомъ случаѣ къ тому, чтобы считать за двѣ точки каждую *особую* точку, какимъ бы свойствомъ она ни была опредѣлена: соблюдая это условіе, можно пользоваться установленнымъ выше закономъ.

Каждое частное приложеніе изложенной мною общей теоріи было бы здѣсь не на мѣстѣ. Но тѣмъ не менѣе я считаю полезнымъ отмѣтить по поводу этого примѣненія, что число точекъ, необходимыхъ для полнаго опредѣленія каждой кривой, хотя и является очень важнымъ условіемъ, не связано, однако, такъ тѣсно, какъ можно бы было ожидать сначала, съ аналитической природой уравненія или съ геометрической формой линіи. Такъ, напримѣръ, слѣдуя указанному выше методу, можно найти, что обыкновенная парабола (и даже всѣ классы параболъ), логариѳмика, циклоида, Архимедова спираль и т. д., одинаково требуютъ четырехъ точекъ для своего опредѣленія, хотя между этими кривыми, столь различными по своей аналитической и геометрической природѣ, до сихъ поръ еще не удалось открыть ни одного другого общаго свойства. Тѣмъ не менѣе вѣроятно, что эта аналогія не является совершенно обособленной.

За второй интересный примѣръ, изъ основныхъ вопросовъ, относящихся къ общему изслѣдованію линій, я выберу опредѣленіе *центра* нѣкоторой плоской кривой. Такъ какъ съ геометрической точки зрѣнія центръ фигуры характеризуется тѣмъ свойствомъ, что онъ является серединой всѣхъ проходящихъ черезъ него хордъ, то отсюда, очевидно, слѣдуетъ, что если помѣстить въ него начало прямолинейной системы координатъ, то всѣ точки кривой, попарно, будутъ имѣть по отношенію къ такому началу равныя и противуположныя по знаку координаты. Поэтому можно прямо по уравненію нѣкоторой кривой судить о томъ, помѣщается ли начало координатъ въ ея центрѣ, или нѣтъ; для этого достаточно узнать только, нарушается-ли это уравненіе отъ единовременнаго измѣненія знаковъ двухъ перемѣнныхъ координатъ; въ томъ случаѣ, если въ уравненія входятъ только алгебраическія, раціональныя и цѣлыя функціи, это возможно лишь тогда, когда всѣ члены будутъ либо четной, либо нечетной степенью, въ зависимости отъ степени уравненія. Если при этихъ условіяхъ указанное измѣненіе знаковъ нарушаетъ уравненіе, то необходимо перенести начало координатъ въ неопредѣленную точку и попытаться такимъ образомъ воспользоваться двумя новыми произвольными перемѣнными, введенными этимъ измѣненіемъ въ наше уравненіе въ видѣ координатъ новаго начала, чтобы уравненіе пріобрѣло вышеуказанное свойство по отношенію къ новой системѣ осей.

Если удастся найти для координатъ новаго начала такія вещественныя значенія, что всѣ выраженія, благодаря которымъ уравненіе не имѣло указаннаго аналитическаго свойства, исчезнутъ, то кривая будетъ обладать центромъ, и по найденнымъ значеніямъ мы будемъ въ состояніи опредѣлить его положеніе; въ противномъ случаѣ будетъ доказано, что кривая не обладаетъ центромъ.

Среди вопросовъ общей геометріи двухъ измѣреній, полное рѣшеніе которыхъ зависитъ только отъ обыкновеннаго анализа, я считаю нужнымъ выдѣлить здѣсь одинъ вопросъ, относящійся къ опредѣленію условій *подобія* кривыхъ одного и того же *рода*, т. е. такихъ кривыхъ, которыя задаются однимъ и тѣмъ же опредѣленіемъ или могутъ быть выражены однимъ и тѣмъ же уравненіемъ, но отличаются другъ отъ друга значеніями нѣкоторыхъ произвольныхъ постоянныхъ, вліяющихъ на величину каждой изъ нихъ. Этотъ вопросъ самъ по себѣ является очень важнымъ и представляетъ особенное значеніе съ точки зрѣнія метода, такъ какъ геометрическое явленіе, подлежащее въ этомъ случаѣ аналитической характеристикѣ, очевидно, вполнѣ относится къ формѣ, а никакъ не къ положенію; какъ мы видѣли въ прошлой лекціи, это обстоятельство всегда приводитъ къ особаго рода затрудненіямъ, свойственнымъ нашей системѣ аналитической геометріи, въ которой только идеи положенія разсматриваются прямо и непосредственно.

Примѣненіе дифференціальнаго исчисленія сейчасъ-же привело-бы къ рѣшенію этой общей задачи, такъ какъ оно прямо распространило-бы на кривыя, какъ эти и слѣдуетъ, элементарное опредѣленіе подобія, установленное для прямолинейныхъ фигуръ. Дѣйствительно, было бы достаточно: во 1-хъ вычислить, по уравненію каждой изъ этихъ кривыхъ, уголъ *смежности* въ нѣкоторой точкѣ и выразить, что этотъ уголъ имѣетъ одинаковыя значенія для соотвѣтствующихъ точекъ обѣихъ кривыхъ; во 2-хъ, пользуясь дифференціальнымъ выраженіемъ длины безконечно — малаго элемента каждой кривой, установить, что между соотвѣтственными элементами обѣихъ кривыхъ существуетъ постоянное соотношеніе. Аналитическія условія подобія, такимъ образомъ, зависѣли бы отъ двухъ первыхъ производныхъ ординаты по абсциссѣ. Но эта задача можетъ быть рѣшена гораздо проще и въ то-же время въ такомъ-же общемъ видѣ, хотя и менѣе прямо, простымъ приложеніемъ обыкновеннаго анализа.

Для этого прежде всего необходимо замѣтить элементарное свойство, которымъ всегда обладаютъ двѣ подобныя фигуры любой формы, когда онѣ расположены *параллельно*, т. е. такимъ образомъ, что всѣ элементы каждый изъ двухъ фигуръ параллельны соотвѣтственно элементамъ другой; это очевидно, всегда возможно, благодаря подобію данныхъ фигуръ.

Нетрудно убѣдиться, что если въ этомъ положеніи соединить попарно соотвѣтственныя точки обѣихъ фигуръ, то всѣ соединяющія прямыя по необходимости встрѣтятся въ одной общей точкѣ, причемъ отрѣзки этихъ прямыхъ, заключенные между общей точкой и точками двухъ подобныхъ фигуръ, будутъ имѣть нѣкоторое постоянное отношеніе, равное отношенію обѣихъ фигуръ.

Изъ этого свойства, съ аналитической точки зрѣнія, вытекаетъ непосредственно, что если помѣстить начало прямолинейныхъ координатъ въ отмѣченную выше точку, то соотвѣтственныя точки двухъ подобныхъ кривыхъ будутъ постоянно обладать пропорціальными координатами, такъ что уравненіе первой кривой преобразуется въ уравненіе второй при замѣнѣ x черезъ mx и y черезъ my, гдѣ m будетъ нѣкоторая произвольная постоянная, равная линейному отношенію двухъ фигуръ. Примѣняя полярныя координаты z и φ и помѣщая полюсъ въ ту же самую точку, мы, чтобы сдѣлать уравненія тождественными, должны-бы были только въ одной изъ нихъ на мѣсто z поставить mz, не измѣняя φ.

Поэтому, очевидно, достаточно провѣрить это алгебраическое свойство, чтобы установить подобіе. Но если это алгебраическое свойство и отсутствуетъ, то отсюда нельзя еще прямо заключить, что данныя фигуры не подобны; можетъ случиться, что начало или полюсъ не находятся вовсе въ той единственной точкѣ, для которой эти отношенія имѣютъ мѣсто, или даже что двѣ кривыя не находятся въ данной моментъ въ параллельномъ положеніи.

Тѣмъ не менѣе, легко обобщить и дополнить нашъ методъ и съ той и съ другой стороны, хотя на первый взглядъ и кажется, что невозможно аналитически измѣнить взаимное положеніе двухъ кривыхъ. Но для этого достаточно только измѣнить, при помощи извѣстныхъ формулъ, одновременно и начало и направленіе осей въ системѣ прямолинейныя координатъ, или полюсъ и направленіе оси въ системѣ полярныхъ координатъ, производя это измѣненіе только въ одномъ изъ двухъ данныхъ уравненій.

Затѣмъ попытаемся придать тремъ произвольнымъ постояннымъ, введеннымъ этой операціей, такія значенія, чтобы измѣненное уравненіе пріобрѣло относительно другого то аналитическое свойство, о которомъ мы говорили выше. Если при нѣкотрыхъ вещественныхъ значеніяхъ произвольныхъ постоянныхъ это отношеніе въ самомъ дѣлѣ будетъ имѣть мѣсто, то обѣ кривыя подобны; въ противномъ случаѣ будетъ доказано, что онѣ не подобны.

Хотя здѣсь не мѣсто останавливаться на частныхъ примѣненіяхъ изложенной теоріи, однако я считаю полезнымъ сдѣлать по этому поводу одно общее замѣчаніе. Во всѣхъ случаяхъ, когда уравненіе кривой, по возможности упрощенное выборомъ осей, будетъ содержать только одну произвольную постоянную, всѣ кривыя этого рода непремѣнно будутъ подобными. Можно еще усилить пользу этого замѣчанія въ томъ отношеніи, что, даже не обращаясь къ уравненію данной кривой, достаточно въ этихъ случаяхъ провѣрить, не зависитъ ли окончательное опредѣленіе величины линіи, на основаніи первоначальнаго геометрическаго опредѣленія ея, отъ одного единственнаго условія *). Если же, напротивъ, простѣйшее уравненіе кривой содержитъ *двѣ* произвольныя постоянныя или больше или-же, что совершенно равносильно, если по опредѣленію величина ея зависитъ отъ нѣсколькихъ различныхъ данныхъ, тогда такія кривыя будутъ *подобными* лишь при наличности извѣстныхъ соотношеній между этими постоянными или этими данными, соотношеній, которыя обыкновенно будутъ заключаться въ пропорціональности этихъ количествъ.

Такъ, напримѣръ, всѣ параболы одного порядка, и притомъ любаго, подобны между собою, также какъ и всѣ логариѳмическія кривыя, обыкновенныя циклоиды, всѣ окружности, и т. д.; тогда какъ два эллипса или напримѣръ, двѣ гиперболы подобны только въ томъ случаѣ, если ихъ оси пропорціональны.

Я ограничусь этимъ небольшимъ числомъ общихъ вопросовъ, относящихся къ линіямъ и рѣшаемыхъ при помощи обыкновеннаго анализа. Къ этимъ вопросамъ не слѣдуетъ причислять опредѣленіе *фокусовъ*, нахожденіе *діаметровъ* и т. д., и еще нѣсколько подобныхъ задачъ: хотя ихъ можно поставить и разрѣшать для любыхъ кривыхъ, но дѣйствительный интересъ они представляютъ только по отношенію къ коническимъ сѣченіямъ. Напримѣръ, что касается *діаметровъ*, т. е. геометрическихъ мѣстъ серединъ произвольной системы параллельныхъ хордъ, то нетрудно предложить общій методъ, дающій возможность вывести изъ уравненія кривой общее уравненіе всѣхъ ея діаметровъ. Но подобное изслѣдованіе только въ тѣхъ случаяхъ можетъ облегчить изученіе кривой, когда діаметры являются болѣе простыми и извѣстными

*) Впрочемъ, это свойство, являющееся очевиднымъ слѣдствіемъ только что изложенной теоріи, можетъ быть прямо доказано при помощи очень простого соображенія. Достаточно замѣтить, что въ этомъ случаѣ различныя кривыя такого вида могли-бы совпасть, если бы ихъ построить въ различныхъ масштабахъ, откуда ясно вытекаетъ необходимость ихъ подобія.

линіями, чѣмъ первоначальная кривая; болѣе того, дѣйствительная польза подобнаго изслѣдованія ограничивается случаемъ, когда всѣ діаметры—прямыя линіи. Но это условіе удовлетворяется только относительно кривыхъ втораго порядка. Для всѣхъ остальныхъ кривыхъ діаметры, вообще говоря, являются не болѣе извѣстными кривыми, чѣмъ сами данныя кривыя, и часто еще труднѣе поддаются изученію чѣмъ первоначальныя. Вотъ почему я здѣсь не считаю нужнымъ вдаваться въ разсмотрѣніе ни этого, ни подобныхъ ему вопросовъ, хотя въ спеціальныхъ трактатахъ по аналитической геометріи слѣдовало-бы излагать ихъ въ началѣ и въ наиболѣе общемъ видѣ.

Итакъ, я прямо перехожу къ разсмотрѣнію тѣхъ теорій общей геометріи двухъ измѣреній, которыя могутъ быть вполнѣ установлены только съ помощью трансцендентнаго анализа.

Первый и самый простой изъ этихъ вопросовъ состоитъ въ опредѣленіи касательныхъ къ плоскимъ кривымъ. Такъ какъ мы уже имѣли случай въ шестой лекціи указать на общее рѣшеніе этого важнаго вопроса, съ каждой изъ различныхъ основныхъ точекъ зрѣнія на трансцендентный анализъ, то безполезно возвращаться къ нему здѣсь. Я только замѣчу по этому поводу, что тамъ, при разсмотрѣніи основной задачи, предполагалось, что точка касанія прямой съ кривой извѣстна, тогда какъ касательная можетъ быть опредѣлена многими другими условіями; ихъ надо свести къ предъидущимъ, опредѣляя сначала координаты точки касанія, что въ большинствѣ случаевъ очень легко сдѣлать.

Такъ, напримѣръ, если касательная должна проходить черезъ точку, лежащую внѣ кривой, то координаты этой точки должны удовлетворять общему уравненію касательной, содержащему неизвѣстныя координаты точки касанія; эта точка будетъ опредѣлена указаннымъ соотношеніемъ ея координатъ, рѣшеннымъ совмѣстно съ уравненіемъ данной кривой.

Точно также, если искомая касательная должна быть параллельна данной прямой, то необходимо приравнять общій коэффиціентъ, обозначающій ея направленіе и выраженный въ функціи координатъ точки касанія, соотвѣтствующему коэффиціенту данной прямой; это условіе, вмѣстѣ съ уравненіемъ данной кривой, дастъ возможность узнать координаты точки касанія.

Чтобы освѣтить съ болѣе широкой точки зрѣнія вопросы, относящіеся къ касательнымъ, можетъ быть полезнымъ выразить опредѣленно соотношеніе, которое должно существовать между двумя произвольными постоянными, содержащимися въ общемъ уравненіи прямой линіи, и различными постоянными, свойственными нѣкоторой данной линіи, для того, чтобы прямая была касательной къ извѣстной кривой. Для этого достаточно замѣтить, что такъ какъ двѣ постоянныя, опредѣляющія въ каждый моментъ положеніе касательной, являются извѣстными функціями координатъ точки касанія, то исключеніе этихъ двухъ координатъ изъ обѣихъ формулъ и уравненія данной кривой приведетъ къ соотношенію, независящему отъ точки касанія и содержащему только постоянныя двухъ линій; это соотношеніе и будетъ искомымъ аналитическимъ выраженіемъ касанія вообще. Такими выраженіями можно бы, напримѣръ, воспользоваться для опредѣленія общей касательной къ двумъ даннымъ кривымъ, вычисляя двѣ постоянныя, принадлежащія этой прямой, по двумъ соотношеніямъ, являющимся слѣдствіемъ касанія къ той и другой кривой.

Основной вопросъ о касательныхъ является исходной точкой для нѣсколькихъ болѣе или менѣе важныхъ общихъ изслѣдованій относительно кривыхъ; нетрудно показать зависимость этихъ изслѣдованій отъ теоріи касательныхъ. Наиболѣе прямымъ и простымъ изъ этихъ второстепенныхъ вопросовъ является вопросъ объ опредѣленіи *ассимптотъ*, или, по крайней мѣрѣ, прямолинейныхъ *ассимптотъ*, которыя, говоря вообще, только однѣ представляютъ интересъ, такъ какъ лишь онѣ дѣйствительно облегчаютъ изученіе кривыхъ. Извѣстно, что *ассимптотой* называется прямая, приближающаяся къ кривой столь близко, сколь угодно, но никогда съ ней не встрѣчающаяся точно. Поэтому ассимптоту можно разсматривать какъ касательную съ безконечно удаленной точкой касанія. Итакъ, чтобы ее опредѣлить, достаточно придать безконечное большое значеніе координатамъ точки касанія въ двухъ общихъ формулахъ, выражающихъ, въ соотвѣтствіи съ уравненіемъ кривой, двѣ произвольныя постоянныя, опредѣляющія положеніе касательной, какъ функціи этихъ координатъ. Если двѣ произвольныя постоянныя получатъ тогда вещественныя и совмѣстимыя значенія, то данная кривая обладаетъ ассимптотами, и изложенное вычисленіе укажетъ ихъ число и положеніе; если-же эти значенія будутъ мнимыми или несовмѣстимыми, то это обстоятельство послужитъ доказательствомъ, что данная кривая не обладаетъ ассимптотами—по крайней мѣрѣ, прямолинейными.

Какъ видно, нахожденіе ассимптотъ совершенно аналогично съ опредѣленіемъ касательной, проведенной черезъ нѣкоторую точку кривой, имѣющую конечныя координаты. Слѣдуетъ только отмѣтить, что въ довольно большомъ числѣ случаевъ искомыя значенія представятся въ неопредѣленномъ видѣ; это общій недостатокъ всѣхъ алгебраическихъ формулъ, хотя, разумѣется, онъ чаще встрѣчается въ тѣхъ случаяхъ, когда перемѣннымъ приписываются безконечныя значенія. Но, какъ извѣстно, существуетъ общій аналитическій методъ для нахожденія истиннаго значенія подобныхъ выраженій; въ данномъ случаѣ достаточно будетъ прибѣгнуть къ нему.

Точно также, хотя и гораздо болѣе косвеннымъ образомъ, можно связать съ теоріей касательныхъ всю теорію различныхъ *особыхъ* точекъ; опредѣленіе ихъ въ значительной степени облегчаетъ знакомство съ кривой, на которой онѣ находятся. Таковы, напр. точки *перегиба*, *кратныя* точки, точки *возврата* и т. д.

Относительно точекъ *перегиба*, т. е. точекъ, въ которыхъ вогнутая часть кривой переходитъ въ выпуклую, или наоборотъ, необходимо сначала изслѣдовать аналитическій признакъ, непосредственно опредѣляющій вогнутость или выпуклость; эти же элементы зависятъ отъ того, какимъ образомъ измѣняется направленіе касательной. Когда кривая вогнута по направленію къ оси абсциссъ, она составляетъ съ ней все меньшій и меньшій уголъ, по мѣрѣ того, какъ отъ нея удаляется; напротивъ, когда кривая выпукла, уголъ, образуемый ею съ осью все болѣе увеличивается по мѣрѣ удаленія отъ этой оси. Поэтому, можно всегда по уравненію кривой прямо опредѣлить характеръ ея кривизны въ каждый моментъ: достаточно только разсмотрѣть, возрастаютъ-ли или уменьшаются значенія коэффиціента, обозначающаго наклоненіе касательной—т. е. производной ординаты—по мѣрѣ того, какъ возрастаетъ сама ордината; въ первомъ случаѣ выпуклость кривой обращена къ оси абсциссъ; во второмъ—ея вогнутость. При этихъ условіяхъ ясно, что если въ какой нибудь точкѣ наблюдается перегибъ, т. е. измѣняется знакъ кривизны, то въ этой точкѣ наклоненіе касательной достигнетъ *максимума* или *минимума*, въ зависимости отъ того, переходитъ-ли выпуклость въ вогнутость, или наоборотъ. Итакъ, при помощи обыкновенной теоріи maxima и minima мы найдемъ, въ какихъ точкахъ можетъ имѣть мѣсто это явленіе, причемъ, примѣняя ее къ данному случаю, установимъ, очевидно, что для абсциссы точки *перегиба* вторая производная ординаты должна равняться нулю; это условіе достаточно для доказательства существованія такой точки и для опредѣленія ея положенія. Такимъ образомъ это изслѣдованіе можетъ быть связано съ теоріей касательныхъ, хотя оно обыкновенно излагается въ связи съ теоріей соприкасающагося круга. То же можно-бы установить, съ большими или меньшими затрудненіями, относительно всѣхъ остальныхъ *особыхъ* точекъ.

Вторымъ основнымъ вопросомъ, связаннымъ съ общимъ изслѣдованіемъ кривыхъ и требующимъ для своего рѣшенія болѣе широкаго примѣненія трансцендентнаго анализа, является важный вопросъ объ измѣреніи *кривизны* кривыхъ при помощи *соприкасающагося* круга, касательнаго въ каждой точкѣ кривой; даже открытія одного этого принципа было-бы достаточно, чтобы обезсмертить имя великаго Гюйгенса.

Такъ какъ кругъ является единственной кривой, обладающей во всѣхъ своихъ точкахъ одинаковой кривизной, обратно пропорціональной величинѣ радіуса, то, когда геометры задались мыслью подвергнуть точному опредѣленію кривизну всѣхъ остальныхъ кривыхъ, они естественно должны были сравнивать ее въ каждой точкѣ съ кругомъ, имѣющимъ съ нею возможно болѣе тѣсное соприкосновеніе; по этой причинѣ такой кругъ былъ названъ *соприкасающимся*, въ отличіе отъ простыхъ касательныхъ круговъ, которыхъ въ той же точкѣ кривой можетъ быть безконечное множество, тогда какъ соприкасающійся кругъ, очевидно, всегда одинъ.

Разсматривая этотъ вопросъ съ другой точки зрѣнія, легко понять, что кривизна нѣкоторой кривой въ каждой точкѣ можетъ быть также опредѣлена при помощи бо́льшаго или ме́ньшаго угла двухъ послѣдовательныхъ элементовъ, называемаго угломъ *смежности*. Но легко убѣдиться, что обѣ эти мѣры по необходимости равнозначущи, такъ какъ центръ соприкасающагося круга будетъ тѣмъ болѣе удаленъ, чѣмъ болѣе тупымъ будетъ уголъ смежности; ясно даже, что съ аналитической точки зрѣнія выраженіе для радіуса этого круга непосредственно приводитъ къ величинѣ угла смежности. Вслѣдствіе этого очевиднаго совпаденія обѣихъ точекъ зрѣнія, геометры должны были предпочесть разсмотрѣніе *соприкасающагося* круга, такъ какъ оно является болѣе общимъ и болѣе пригоднымъ для вывода остальныхъ геометрическихъ теорій, исходящихъ изъ этого основнаго представленія.

При этихъ условіяхъ, наиболѣе простой и прямой пріемъ для опредѣленія *соприкасающагося* круга будетъ заключаться въ слѣдующемъ: примемъ, согласно методу безконечно малыхъ въ собственномъ смыслѣ этого слова, что соприкасающійся кругъ проходитъ черезъ три точки, безконечно близкія къ данной кривой, или, другими словами, что онъ имѣетъ съ ней общими два послѣдовательныхъ элемента; это условіе ясно отличитъ его отъ всѣхъ простыхъ касательныхъ круговъ, которые имѣютъ съ данной кривой только одинъ элементъ общій.

Изъ этого опредѣленія, если принять во вниманіе построеніе, необходимое для того, чтобы описать кругъ, проходящій черезъ три точки, слѣдуетъ, что на центръ соприкасающагося круга, или, какъ его обыкновенно называютъ, *на центръ кривизны* кривой въ каждой точкѣ, мы можемъ смотрѣть, какъ на пересѣченіе двухъ безконечно близкихъ нормалей; такимъ образомъ вопросъ сводится къ нахожденію этой послѣдней точки. Но это изслѣдованіе нетрудно: составивъ по общему уравненію касательной нѣкоторой кривой уравненіе нормали, которая должна быть перпендикулярна къ этой касательной, въ этомъ послѣднемъ уравненіи измѣнимъ на безконечно-малую величину координаты точки касанія, чтобы перейти къ безконечно-близкой нормали; рѣшая совмѣстно эти уравненія—первой степени относительно двухъ координатъ точки пересѣченія—мы найдемъ двѣ общія формулы, выражающія координаты центра кривизны данной кривой въ нѣкоторой точкѣ. Какъ только будутъ получены эти формулы, нахожденіе радіуса кривизны не представитъ уже никакой трудности, такъ какъ вопросъ сведется къ вычисленію разстоянія центра кривизны до соотвѣтствующей точки кривой. Обозначая черезъ α и β прямолинейныя координаты центра кривизны нѣкоторой кривой точкѣ, координаты которой будутъ x и y и обозначая черезъ r—радіусъ кривизны, мы найдемъ съ помощью изложеннаго метода извѣстныя формулы:

$$\alpha = x + \frac{\frac{dx}{dy}\left[1 + \frac{dy}{dx}\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Легко понять, какое значеніе имѣетъ опредѣленіе радіуса кривизны, и насколько изслѣдованіе общаго хода измѣненій его въ различныхъ точкахъ кривой должно содѣйствовать болѣе глубокому изученію этой кривой. Этотъ элементъ среди другихъ, изслѣдуемыхъ обыкновенно въ аналитической геометріи, особенно замѣчателенъ тѣмъ, что непосредственно, по своей природѣ, относится къ самой формѣ кривой, не завися никоимъ образомъ отъ ея положенія. Съ аналитической точки зрѣнія, онъ требуетъ единовременнаго разсмотрѣнія двухъ первыхъ производныхъ ординаты.

Теорія центровъ кривизны естественно приводитъ къ важному понятію объ *эволютахъ*—кривыхъ, которыя въ настоящее время опредѣляются, какъ геометрическія мѣста всѣхъ центровъ кривизны кривой въ различныхъ ея точкахъ, хотя въ первоначальномъ изложеніи этой отрасли геометріи Гюйгенсъ, наоборотъ, вывелъ понятіе о соприкасающемся кругѣ изъ понятія объ эволютѣ, разсматривая ее прямо, какъ линію, развертка которой опредѣляла-бы первоначальную кривую или эвольвенту. Легко понять, что эти двѣ точки зрѣнія тождественны. Эволюта, очевидно, по отношенію къ той кривой, изъ которой она получается, представляетъ два общія и необходимыя свойства, какимъ-бы способомъ она ни была получена. Во-первыхъ, ея касательныя являются нормалями эвольвенты; во-вторыхъ, длина ея дугъ равна длинѣ соотвѣтственныхъ радіусовъ кривизны эвольвенты *). Что-же касается пріема, при помощи котораго получается уравненіе эволюты данной кривой, то ясно, что изъ двухъ вышеприведенныхъ формулъ, выражающихъ координаты центра кривизны, достаточно исключить, въ каждомъ случаѣ, координаты x и y соотвѣтственной точки данной кривой, при помощи уравненія этой кривой; уравненіе между α и β, которое получится послѣ такого исключенія, и будетъ уравненіемъ искомой эволюты. Точно также мы могли-бы рѣшить вопросъ и въ обратномъ порядкѣ, т. е. найти эвольвенту по эволютѣ. Но надо замѣтить, что исключеніе, аналогичное предъидущему, привело-бы въ этомъ случаѣ къ уравненію, содержащему, кромѣ x и y, двѣ производныя $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$; поэтому, послѣ этого подготовительнаго преобразованія для полнаго рѣшенія задачи нужно было-бы интегрировать дифференціальное уравненіе второго порядка; въ виду крайняго несовершенства интегральнаго исчисленія, эта операція чаще всего была-бы невозможна, если-бы, по самой природѣ такого изслѣдованія, искомая кривая, какъ я это имѣлъ случай указать въ седьмой лекціи, не должна-бы представиться *особеннымъ* рѣшеніемъ, которое можно получить простымъ дифференцированіемъ, тогда какъ общій интегралъ представитъ здѣсь только систему соприкасающихся круговъ; изученіе же этой системы не входитъ совсѣмъ въ предложенную задачу. То-же обстоятельство будетъ имѣть мѣсто во всѣхъ случаяхъ, когда приходится опредѣлять кривую по нѣкоторому свойству ея радіуса кривизны.

Этотъ классъ вопросовъ совершенно аналогиченъ болѣе простымъ задачамъ, составлявшимъ въ первыя времена трансцендентнаго анализа особую группу вопросовъ подъ названіемъ *„обратный методъ касательныхъ“*: здѣсь ставилось цѣлью опредѣлить кривую по данному свойству касательной въ какой нибудь точкѣ ея.

При помощи болѣе или менѣе сложныхъ геометрическихъ соображеній, подобныхъ тѣмъ, къ которымъ приводятъ эволюты, геометры изъ одной и той же первоначальной кривой вывели разныя вторичныя кривыя; уравненія послѣднихъ могутъ быть получены аналогичнымъ способомъ. Самыми замѣчательными изъ нихъ являются *каустическія* кривыя, получаемыя при отраженіи или преломленіи лучей; первая идея о нихъ принадлежитъ Чиригаусу, хотя только Яковъ Бернулли далъ ихъ истинную общую теорію. Эти кривыя, какъ извѣстно, образуются послѣдовательнымъ пересѣченіемъ безконечно близкихъ лучей свѣта, по предположенію, отражаемыхъ отъ первоначальной кривой или преломляемыхъ ею.

Если исходить изъ геометрическаго закона отраженія или преломленія свѣта—уголъ паденія равенъ углу отраженія или синусъ угла преломленія находится въ постоянномъ и извѣстномъ отношеніи къ синусу угла паденія—то ясно, что нахожденіе этихъ *каустическихъ* линій сводится къ чисто геометрическому вопросу, совершенно подобному вопросу объ эволютахъ, если разсматривать послѣднія какъ геометрическое мѣсто пересѣченія безконечно-близкихъ нормалей. Поэтому указанная задача аналитически разрѣшится аналогичнымъ способомъ, и здѣсь было-бы излишнимъ вдаваться въ подробныя указанія по этому предмету; только

*) Извѣстная теорема формулирована здѣсь неточно и даже непонятно: *разность радіусовъ кривизны равна дугѣ эвольвенты, заключающейся между соотвѣтственными точками.* *(Прим. Ред.).*

выкладки будутъ сложнѣе, особенно, если не сдѣлать предположенія, что падающіе лучи параллельны или исходятъ изъ общей точки.

Эволюты, каустическія линіи и всѣ другія линіи, выведенныя изъ нѣкоторой основной первоначальной кривой при помощи аналогичныхъ построеній, образованы непрерывнымъ пересѣченіемъ безконечно-близкихъ прямыхъ, подчиненныхъ нѣкоторому закону. Но, по возможности обобщая это геометрическое соображеніе, мы могли бы представить себѣ кривыя, образуемыя непрерывнымъ пересѣченіемъ безконечно-близкихъ кривыхъ, подчиненныхъ одно и тому же закону.

Этотъ законъ обыкновенно сводится къ тому, что всѣ эти кривыя представляются общимъ уравненіемъ, совершенно произвольнымъ; изъ этого уравненія отдѣльныя кривыя выводятся послѣдовательно, путемъ подстановки различныхъ значеній на мѣсто нѣкоторой произвольной постоянной. Въ этомъ случаѣ можно задаться мыслью найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія послѣдовательныхъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ безконечно-близкимъ значеніямъ произвольной постоянной, если представить себѣ, что непрерывно измѣняется послѣдняя. Лейбницъ первый приступилъ къ подобнымъ изслѣдованіямъ, которыя затѣмъ были сильно расширены трудами Клэро и, главнымъ образомъ, Лагранжа. Чтобы разсмотрѣть наиболѣе простой случай, который и былъ только что охарактеризованъ мною, очевидно достаточно продифференцировать данное общее уравненіе по разсматриваемой произвольной постоянной, и затѣмъ исключить эту постоянную изъ первоначальнаго уравненія и полученнаго диффенціальнаго уравненія; такимъ образомъ мы между двумя перемѣнными координатами установимъ уравненіе, независящее отъ произвольной постоянной: это уравненіе и будетъ уравненіемъ искомой кривой, форма которой часто въ значительной степени будетъ отличаться отъ формы производящихъ кривыхъ. Относительно этого геометрическаго соотношенія Лагранжъ установилъ интересную общую теорему, показавъ, что, съ аналитической точки зрѣнія, полученная такимъ образомъ кривая и производящія кривыя необходимо удовлетворять одному и тому-же дифференціальному уравненію, полный интегралъ котораго представитъ систему производящихъ, тогда какъ особенное рѣшеніе соотвѣтствуетъ кривой точекъ пересѣченія.

До сихъ поръ я разсматривалъ теорію кривизны кривыхъ сообразно съ духомъ метода безконечно-малыхъ въ собственномъ смыслѣ слова; онъ дѣйствительно удобнѣе всѣхъ другихъ примѣняется къ изслѣдованіямъ подобнаго рода.

Воззрѣніе Лагранжа относительно трансцендентнаго анализа прежде всего по природѣ своей представляло значительныя частныя трудности для прямого рѣшенія подобнаго вопроса, какъ я это уже замѣтилъ въ шестой лекціи. Но эти трудности такъ счастливо возбудили геній Лагранжа, что привели его къ созданію общей теоріи соприкасанія: прежняя теорія соприкасающагося круга является только частнымъ и очень простымъ случаемъ этой общей теоріи.

Для цѣли нашего труда необходимо теперь ознакомиться съ этой прекрасной идеей, которая съ философской точки зрѣнія является можетъ быть наиболѣе интереснымъ вопросомъ, затронутымъ до сихъ поръ аналитической геометріей.

Сравнимъ какую-нибудь кривую $y = f(x)$ съ другой перемѣнной кривой $z = \varphi(x)$, и постараемся составить себѣ точное представленіе о различныхъ возможныхъ для нихъ степеняхъ близости въ общей ихъ точкѣ, въ зависимости отъ предполагаемаго нами соотношенія между функціями f и φ. Съ этой цѣлью достаточно принять во вниманіе вертикальное разстояніе кривыхъ въ другой точкѣ и, затѣмъ приближая послѣднюю все болѣе и болѣе къ первой, сдѣлать это разстояніе настолько малымъ, насколько это допускаетъ соотношеніе между обѣими функціями f и φ. Если черезъ h обозначить приращеніе абсциссы, соотвѣтствующее переходу къ этой новой точкѣ, то указанное разстояніе, равное разности двухъ соотвѣтствующихъ ординатъ, можетъ быть разложено, на основаніи формулы Тэйлора, по восходящимъ степенямъ h, и выразится рядомъ:

$$D = [f'(x) - \varphi'(x)]h + [f''(x) - \varphi''(x)]\frac{h^2}{1 \,.\, 2} + [f'''(x) - \varphi'''(x)]\frac{h^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ \ldots$$

Предположимъ—это очевидно всегда возможно—h настолько малымъ, чтобъ первый членъ ряда былъ больше суммы всѣхъ остальныхъ; тогда, очевидно, кривыя z и y будутъ подходить другъ къ другу тѣмъ ближе, чѣмъ больше членовъ этого разложенія позволитъ уничтожить перемѣнная функція φ. Степень близости обѣихъ кривыхъ будетъ слѣдовательно точно опредѣлена, съ аналитической точки зрѣнія, большимъ или меньшимъ числомъ послѣдовательныхъ производныхъ ординатъ, которыя въ разсматриваемой точкѣ будутъ имѣть одинаковыя значенія.

Отсюда вытекаетъ важное общее представленіе о различныхъ порядкахъ болѣе или менѣе совершеннаго соприкасанія; сравненіе соприкасающагося круга съ кругами просто касательными до сихъ поръ представляло только частный случай этого общаго понятія. Итакъ, первая послѣ простого пересѣченія степень близости двухъ кривыхъ имѣетъ мѣсто, когда первыя производныя ихъ ординатъ равны; это — касаніе перваго порядка или—какъ его обыкновенно называютъ—простое касаніе, такъ какъ долгое время только оно одно и было извѣстно. Касаніе второго порядка требуетъ, чтобы кромѣ того и вторыя производныя функціи f и φ были равны; присоединяя къ этому равенство третьихъ производныхъ, мы установимъ касаніе третьяго порядка и такъ до безконечности. Послѣ касанія перваго порядка, касанія часто носятъ названіе *соприкасаній* перваго, втораго и проч. порядковъ.

Касанія перваго и втораго порядка могутъ быть геометрически охарактеризованы слѣдующимъ общимъ замѣчаніемъ: очевидно, что обѣ сравниваемыя кривыя имѣютъ въ общей точкѣ въ первомъ случаѣ — общую касательную, а во второмъ—общій кругъ кривизны, такъ какъ касательная каждой кривой зависитъ отъ первой производной ея ординаты, а кругъ кривизны—отъ обѣихъ первыхъ производныхъ.

Но это соображеніе непримѣнимо для выясненія геометрической идеи касанія выше второго порядка; Лагранжъ ограничился въ этомъ отношеніи указаніемъ на общее свойство кривыхъ, вытекающее непосредственно изъ вышеизложеннаго изслѣдованія: допустимъ, что кривая z имѣетъ съ кривой y касаніе n-наго порядка, которое аналитически выражается равенствомъ всѣхъ производныхъ до производной n-наго порядка; тогда никакая другая кривая z, которая принадлежала бы къ тому же виду, какъ первая, но удовлетворяла бы только меньшему числу аналитическихъ условій, т. е. имѣла бы съ кривой y касаніе низшаго порядка, — не могла бы пройти между этими двумя кривыми, такъ какъ разстояніе между ними получило наименьшее значеніе, возможное при данномъ соотношеніи обоихъ уравненій.

Въ томъ случаѣ, когда видъ кривой z, которую мы по отношенію къ кривизнѣ сравниваемъ съ нѣкоторой данной кривой y, опредѣленъ, то, очевидно, порядокъ наиболѣе тѣснаго ея касанія съ этой кривой зависитъ отъ бо́льшаго или ме́ньшаго числа произвольныхъ постоянныхъ, заключающихся въ наиболѣе общей формѣ ея уравненія, такъ какъ касаніе n-наго порядка требуетъ $n+1$ аналитическихъ условій, которые могутъ быть удовлетворены только въ томъ случаѣ, если мы располагаемъ такимъ же числомъ произвольныхъ постоянныхъ. Поэтому прямая линія, наиболѣе общее уравненіе которой заключаетъ въ себѣ только двѣ произвольныя постоянныя, можетъ имѣть съ какой-либо кривой только касаніе перваго порядка: отсюда вытекаетъ обыкновенная теорія касательныхъ.

Такъ какъ въ уравненіи круга содержатся вообще три произвольныя постоянныя, то кругъ можетъ имѣть съ какой-либо кривой касаніе второго порядка, а отсюда, какъ частный случай, вытекаетъ прежняя теорія соприкасающагося круга.

Разсматривая параболу, мы увидимъ, что такъ какъ въ уравненіи ея въ наиболѣе общемъ и простомъ видѣ содержатся 4 произвольныя постоянныя, то она, при сравненіи ея съ какой-либо другой кривой, можетъ имѣть болѣе тѣсное касаніе, до касанія третьяго порядка; точно также эллипсъ можетъ имѣть касаніе четвертаго порядка и т. д.

Такое разсужденіе можетъ привести къ геометрическому толкованію изложенной общей теоріи касанія и, какъ мнѣ кажется, дополнитъ работу Лагранжа, такъ какъ оно, для прямого опредѣленія различныхъ порядковъ касанія, указываетъ на болѣе простой и ясный конкретный признакъ, чѣмъ разсмотрѣнный Лагранжемъ.

Дѣйствительно, такъ какъ большее или меньшее число произвольныхъ постоянныхъ, содержащихся въ уравненіи, геометрически изображается (какъ мы установили въ началѣ этой лекціи) числомъ точекъ, необходимыхъ для полнаго опредѣленія соотвѣтствующей кривой, то обратно—это послѣднее число обозначаетъ ту степень близости, которая возможна для данной кривой относительно всякой другой. Но, съ другой стороны, аналитическій законъ, выражающій это касаніе съ помощью равенства извѣстнаго числа послѣдовательныхъ производныхъ обѣихъ ординатъ, очевидно, показываетъ, что обѣ кривыя въ этомъ случаѣ имѣютъ столько же безконечно близкихъ общихъ точекъ, такъ какъ по самой природѣ дифференціаловъ ясно, что разность n'аго порядка зависитъ отъ сравненія $n+1$ послѣдовательныхъ ординатъ.

Поэтому, можно составить себѣ ясное представленіе о различныхъ порядкахъ касанія, утверждая, что оно приводится къ совмѣщенію большаго или меньшаго числа безконечно близкихъ точекъ двухъ кривыхъ.

Выражаясь болѣе строго, мы, напримѣръ, опредѣлили бы соприкасающійся эллипсъ третьяго порядка какъ предѣлъ, къ которому стремятся эллипсы, проходящіе черезъ 5 точекъ данной кривой, по мѣрѣ того какъ 4 изъ этихъ точекъ, принимаемыя нами за подвижныя, приближаются къ пятой точкѣ, принятой за постоянную.

Эта общая теорія касаній, очевидно, по своей природѣ, можетъ все глубже и глубже знакомить насъ съ кривизной нѣкоторой кривой, послѣдовательно сравнивая съ ней различныя извѣстныя кривыя, которыя могутъ все тѣснѣй и тѣснѣй соприкасаться съ изучаемой кривой. Это обстоятельство позволило бы опредѣлить мѣру кривизны съ любой степенью точности, надлежащимъ образомъ измѣняя кривыя для сравненія. По вышеизложеннымъ соображеніямъ ясно, что совмѣщеніе каждой безконечно-малой дуги кривой съ дугой параболы привело бы къ болѣе точному опредѣленію мѣры кривизны этой кривой, чѣмъ примѣненіе соприкасающагося круга; сравненіе съ эллипсомъ еще болѣе повысило-бы степень точности, и т. д.: такимъ образомъ, предназначая каждый первоначальный видъ для болѣе глубокаго изученія послѣдующаго типа, можно было-бы безпредѣльно совершенствовать теорію кривыхъ. Но такъ какъ необходимо имѣть ясное и простое представленіе о кривой, принятой за единицу мѣры кривизны, то геометры принуждены были отказаться отъ этого высокаго умозрительнаго совершенства и ограничиться на практикѣ сравненіемъ всѣхъ кривыхъ только съ кругомъ, въ виду характернаго для этой фигуры постоянства ея кривизны. Дѣйствительно, нѣтъ ни одной другой кривой, которая съ этой стороны была-бы достаточно проста и достаточно изучена для того, чтобы ее съ пользой можно было примѣнить здѣсь, хотя теперь ужъ извѣстно, что съ отвлеченной точки зрѣнія кругъ далеко не является наиболѣе удобной единицей кривизны. Поэтому Лагранжъ въ концѣ концовъ и ограничился тѣмъ, что вывелъ изъ своихъ общихъ положеній теорію соприкасающагося круга, которая такимъ образомъ и была представлена съ чисто-аналитической точки зрѣнія. Замѣчательно даже, что онъ изъ одного этого соображенія легко вывелъ два основныя свойства эволютъ, о которыхъ мы упоминали выше, хотя казалось бы, что одинъ анализъ мало пригоденъ для нахожденія ихъ.

Я счелъ необходимымъ разсмотрѣть теорію касанія кривыхъ въ наиболѣе широкомъ и отвлеченномъ видѣ, чтобы помочь читателю надлежащимъ образомъ понять ея истинный характеръ. Хотя, въ концѣ концовъ, ее и приходится свести на простое опредѣленіе соприкасающагося круга, но есть тѣмъ не менѣе, съ философской точки зрѣнія, несомнѣнно большая разница, считать ли этотъ послѣдній результатъ какъ-бы крайнимъ предѣломъ усилій человѣческаго духа въ изученіи кривыхъ, какъ это дѣлали до Лагранжа, или, наоборотъ, разсматривать его какъ простой частный случай обширной общей теоріи, зная, что на практикѣ приходится ограничиваться изслѣдованіемъ этого случая, но въ то же время не забывая, что другія сравненія могли-бы еще болѣе усовершенствовать указанную геометрическую теорію.

Послѣ разсмотрѣнія главнѣйшихъ вопросовъ общей геометріи, относящихся къ свойствамъ кривымъ, мнѣ остается еще указать на задачи, связанныя съ выпрямленіемъ кривыхъ и квадратурами; въ разрѣшеніи этихъ вопросовъ, согласно объясненію, данному нами въ 10-ой лекціи, и состоитъ конечная цѣль всей геометріи. Но такъ какъ я ужъ имѣлъ случай (см. 6-ую лекцію) установить общія формулы, выражающія при помощи извѣстныхъ интеграловъ длину и площадь нѣкоторой плоской кривой, уравненіе которой въ прямолинейныхъ координатахъ дано, и такъ какъ я здѣсь не имѣю основанія разсматривать какое-бы то ни было приложеніе къ частнымъ кривымъ,—то эта важная часть нашего предмета представляется уже исчерпанной. Я ограничусь только указаніемъ формулъ для опредѣленія поверхностей и объемовъ тѣлъ, образуемыхъ вращеніемъ плоскихъ кривыхъ около ихъ осей.

Предположимъ,—а мы всегда имѣемъ право сдѣлать подобное предположеніе—что эта ось вращенія принята за ось абсциссъ; представимъ себѣ затѣмъ, согласно съ духомъ метода безконечно малыхъ, который до сихъ поръ является единственнымъ методомъ, примѣнимымъ въ подобнаго рода изслѣдованіяхъ, что абсцисса возрастаетъ на безконечно-малую величину: это приращеніе абсциссы опредѣлитъ аналогичныя дифференціальныя приращенія дуги и площади данной кривой, которыя, при вращеніи около оси, образуютъ *элементы* искомой поверхности и искомаго объема. Легко убѣдиться, что, пренебрегая только безконечно малой величиной второго порядка, мы можемъ разсматривать эти элементы, какъ равныя поверхности и объему соотвѣтствующаго усѣченнаго конуса или цилиндра, высотою которыхъ будетъ дифференціалъ абсциссы, а радіусомъ основанія—ордината разсматриваемой точки. Поэтому, если обозначить черезъ S и V искомую поверхность и искомый объемъ, то на основаніи простѣйшихъ предложеній элементарной геометріи непосредственно получатся слѣдующія общія дифференціальныя уравненія:

$$dS=2\pi y dx,\ dV=\pi y^2 dx.$$

Отсюда, если соотношеніе между y и x будетъ дано для каждаго частнаго случая, значенія S и V будутъ выражены двумя интегралами:

$$S=2\pi\int y dx,\ V=\pi\int y^2 dx,$$

взятыми между соотвѣтственными предѣлами.

Таковы неизмѣнныя формулы, по которымъ, со времени Лейбница, геометры рѣшили большое число подобныхъ вопросовъ, насколько развитіе интегральнаго исчисленія допускало такое рѣшеніе.

Можно-бы было также къ числу задачъ общей геометріи двухъ измѣреній отнести опредѣленіе центровъ тяжести дугъ и поверхностей, принадлежащихъ нѣкоторымъ кривымъ, хотя это изысканіе по своему происхожденію относится къ раціональной механикѣ. Дѣйствительно, опредѣляя центръ тяжести, какъ *центръ среднихъ разстояній*, т. е. какъ такую точку, разстояніе которой отъ данной плоскости или оси равно среднему ариѳметическому разстояній всѣхъ точекъ даннаго тѣла отъ этой плоскости или оси, мы, очевидно, превращаемъ предложенный вопросъ въ чисто-геометрическій и можемъ его разсматривать, совершенно не прибѣгая къ механикѣ. Но, несмотря на такое разсужденіе, которое, какъ мы увидимъ позже, является очень важнымъ для полнаго и болѣе легкаго обобщенія понятія о центрѣ тяжести, все-же, съ другой стороны, несомнѣнно, что въ виду главнаго назначенія этого изслѣдованія, впредь слѣдуетъ причислять его къ вопросамъ механики; тѣмъ не менѣе, оно, по своей природѣ и по аналитическому характеру соотвѣтствующаго метода, дѣйствительно относится къ геометріи, что меня и побудило, забѣгая впередъ, указать на этотъ вопросъ уже здѣсь.

Таковы главнѣйшіе основные вопросы, составляющіе въ настоящее время систему нашей общей геометріи двухъ измѣреній. Мы видѣли, что, съ аналитической точки зрѣнія, они могутъ быть разбиты на три рѣзко разграниченные класса: къ первому относятся геометрическія изысканія, основанныя исключительно на обыкновенномъ анализѣ; ко второму—вопросы, требующіе примѣненія дифференціальнаго исчисленія; къ третьему—вопросы, разрѣшаемые только при помощи интегральнаго исчисленія.

Намъ остается теперь, въ слѣдующей лекціи, съ той-же точки зрѣнія разсмотрѣть систему общей геометріи трехъ измѣреній.

Четырнадцатая лекція.

Объ общей геометріи трехъ измѣреній.

Изученіе поверхностей состоитъ изъ ряда общихъ вопросовъ, совершенно аналогичныхъ вопросамъ, разсмотрѣннымъ въ предшествующей лекціи относительно линіи. Изслѣдовать здѣсь подробно вопросы, зависящіе только отъ обыкновеннаго анализа, было бы безполезно, такъ какъ они рѣшаются при помощи методовъ, по существу совершенно подобныхъ уже разсмотрѣннымъ выше; таковы вопросы о нахожденіи числа точекъ, необходимыхъ для опредѣленія поверхности, объ отысканіи центровъ, о точныхъ условіяхъ подобія двухъ поверхностей одного и того же рода, и пр. Аналитически вся разница заключается только въ томъ, что вмѣсто уравненія съ двумя перемѣнными приходится разсматривать уравненія съ тремя перемѣнными. Итакъ, я перейду непосредственно къ вопросамъ, которые требуютъ примѣненія трансцендентнаго анализа, обращая особенное вниманіе только на новыя соображенія, возникающія по поводу поверхностей.

Первая общая теорія, на которой мы остановимся—это теорія касательныхъ плоскостей. Пользуясь методомъ безконечно малыхъ въ собственномъ смыслѣ слова, легко найти уравненіе плоскости, касательной къ нѣкоторой поверхности въ данной точкѣ; она опредѣляется, какъ плоскость, совпадающая съ безконечно малой частью поверхности, расположенной вокругъ точки касанія. Дѣйствительно, достаточно принять во вниманіе, что это условіе будетъ удовлетворено, если безконечно-малое приращеніе вертикальной ординаты, соотвѣтствующее безконечно-малымъ приращеніямъ обѣихъ горизонтальныхъ координатъ, будетъ однимъ и тѣмъ же для плоскости и для данной поверхности, независимо отъ всякаго опредѣленнаго соотношенія между двумя послѣдними приращеніями; въ противномъ случаѣ не будетъ совпаденія во всѣхъ направленіяхъ. На основаніи этого соображенія, анализъ непосредственно приводитъ къ общему уравненію касательной плоскости

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y'),$$

гдѣ x', y', z' обозначаютъ координаты точки касанія.

Поэтому опредѣленіе касательной плоскости, въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ сводится къ простому дифференцированію уравненія данной поверхности.

Можно также получить это общее уравненіе касательной плоскости, исходя при составленіи его только изъ теоріи касательныхъ къ плоскимъ кривымъ.

Для этого необходимо представить себѣ, что касательная плоскость опредѣляется касательными къ двумъ какимъ-нибудь плоскимъ сѣченіямъ данной поверхности, проведеннымъ черезъ точку касанія: такъ обыкновенно и поступаютъ въ начертательной геометріи. Если мы проведемъ плоскости сѣченій параллельно двумъ изъ координатныхъ плоскостей, то непосредственно получимъ указанное уравненіе. Этотъ способъ опредѣленія касательной плоскости даетъ намъ возможность легко установить слѣдующую важную теорему общей геометріи, впервые доказанную Монжемъ: касательныя ко всѣмъ кривымъ, которыя могутъ быть проведены на нѣкоторой поверхности черезъ данную ея точку, всегда лежатъ въ одной плоскости.

Наконецъ, мы можемъ еще придти къ общему уравненію касательной плоскости, разсматривая ее какъ плоскость, перпендикулярную къ соотвѣтствующей нормали, и опредѣляя эту нормаль тѣмъ прямымъ геометрическимъ ея свойствомъ, что она является наименьшимъ или наибольшимъ разстояніемъ внѣшней точки до данной поверхности. Достаточно примѣнить обыкновенный методъ maxima и minima, чтобы, слѣдуя этому опредѣленію, составить оба уравненія нормали; для этого надо выразить разстояніе между двумя точками—одной лежащей на поверхности, и другой—внѣшней, причемъ первую сначала слѣдуетъ принимать за перемѣнную и только затѣмъ, когда аналитическія условія будутъ уже выражены, признать за постоянную, тогда какъ вторую, наоборотъ, первоначально надо принимать за постоянную и, затѣмъ, за подвижную, описывающую искомую прямую. Какъ только уравненія нормали будутъ получены, то изъ нихъ уже легко вывести уравненіе касательной плоскости. Этимъ остроумнымъ способомъ составленія уравненія касательной плоскости мы также обязаны Монжу.

Разсмотрѣнный только что основной вопросъ, какъ это было и для кривыхъ, является исходной точкой для большого числа изысканій, связанныхъ съ опредѣленіемъ касательной плоскости, если мы заданіе точки касанія замѣнимъ другими равнозначущими условіями. Касательная плоскость, очевидно, не можетъ быть вполнѣ опредѣлена заданіемъ одной единственной внѣшней точки, какъ касательная прямая; для опредѣленія этой плоскости необходимо задать прямую, черезъ которую она должна проходить; но, за исключеніемъ этого пункта, аналогія является полной, и оба вопроса разрѣшаются одинаковыми пріемами.

То-же самое имѣетъ мѣсто, если касательная плоскость должна быть параллельной данной плоскости; это условіе опредѣляетъ величину двухъ постоянныхъ, задающихъ направленіе плоскости, и, слѣдовательно, опредѣляетъ и координаты точки касанія, такъ какъ эти постоянныя являются для каждой поверхности опредѣленными функціями координатъ точки касанія.

Наконецъ, какъ и для линій, мы можемъ найти аналитическое соотношеніе, которое въ общей формѣ выражаетъ явленіе касанія между плоскостью и нѣкоторой поверхностью, не опредѣляя точки этого касанія; изъ этого соотношенія вытекаетъ рѣшеніе нѣсколькихъ вопросовъ, относящихся къ касательнымъ плоскостямъ,—между прочимъ, и вопроса объ опредѣленіи плоскости, касательной одновременно къ трэмъ поверхностямъ; эта задача аналогична нахожденію общей касательной къ двумъ кривымъ.

Общая теорія соприкасаній между нѣкоторыми двумя поверхностями,—соприкасаній, которыя могутъ быть болѣе или менѣе тѣсными въ зависимости отъ большаго или меньшаго числа соотношеній, связывающихъ уравненія данныхъ поверхностей,—составлена при помощи метода, совершенно подобнаго тому, о которомъ мы говорили въ предшествующей главѣ относительно кривыхъ. Мы выражаемъ, при помощи ряда Тэйлора для функціи двухъ перемѣнныхъ, вертикальное разстояніе обѣихъ поверхностей во второй точкѣ, смежной съ точкой ихъ пересѣченія, въ предположеніи, что горизонтальныя координаты этой точки получаютъ два приращенія h и k, совершенно независимыя другъ отъ друга.

Разсматривая это разстояніе, разложенное по возрастающимъ степенямъ h и k, и приравнивая нулю послѣдовательно сперва всѣ члены первой степени относительно h и k, затѣмъ второй и т. д., мы выведемъ аналитическія условія соприкасанія различныхъ порядковъ, которое можетъ существовать между обѣими поверхностями, въ зависимости отъ большаго или меньшаго числа произвольныхъ постоянныхъ, содержащихся въ общемъ уравненіи той поверхности, которую мы разсматриваемъ, какъ перемѣнную.

Но, несмотря на единообразіе метода, между этой теоріей и теоріей соприкасанія линій имѣется существенное различіе, относящееся къ числу условій, такъ какъ въ этомъ случаѣ намъ приходится разсматривать два независимыхъ приращенія вмѣсто одного. Отсюда, дѣйствительно, можно сдѣлать слѣдующій выводъ: для того, чтобы каждое соприкасаніе происходило во всѣхъ направленіяхъ отъ общей точки, необходимо въ отдѣльности приравнять нулю всѣ различные члены одинаковой степени, соотвѣтствующей порядку соприкасанія; число этихъ членовъ будетъ тѣмъ больше, чѣмъ выше будетъ данная степень или данный порядокъ соприкасанія.

Такъ, напримѣръ, кромѣ равенства двухъ вертикальныхъ ординатъ z, необходимаго для простого пересѣченія, мы найдемъ, что соприкасаніе перваго порядка требуетъ двухъ различныхъ соотношеній, заключающихся въ равенствѣ двухъ частныхъ производныхъ перваго порядка отъ каждой вертикальной ординаты. Переходя къ соприкасанію второго порядка, мы должны будемъ прибавить еще три новыя условія, принимая во вниманіе три различные члена второй степени относительно h и k, содержащіеся въ выраженіи разстоянія; для полнаго уничтоженія этихъ членовъ потребуется равенство трехъ частныхъ производныхъ второго порядка, относящихся къ ординатѣ z каждой поверхности. Такимъ-же образомъ мы найдемъ, что соприкасаніе третьяго порядка приводитъ сверхъ того къ четыремъ другимъ соотношеніямъ, и т. д.; число частныхъ производныхъ каждаго порядка постоянно остается равнымъ числу членовъ соотвѣтствующей степени относительно h и k. Легко заключить изъ этого, что, вообще говоря, общее число различныхъ условій, необходимыхъ для соприкасанія n-наго порядка, равняется $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, тогда какъ для кривыхъ это число равнялось просто $n + 1$.

Вслѣдствіе одного этого существеннаго различія, теорія поверхностей далеко не является въ этомъ отношеніи такой-же легкой и не представляетъ такого-же совершенства, какъ теорія линій.

Если ограничиться соприкасаніемъ перваго порядка, то соотвѣтствіе будетъ полнымъ, такъ какъ это соприкасаніе требуетъ только трехъ условій, которымъ всегда можно удовлетворить при помощи трехъ произвольныхъ постоянныхъ, содержащихся въ общемъ уравненіи плоскости: отсюда, какъ частный случай, вытекаетъ теорія касательныхъ плоскостей, совершенно аналогичная теоріи касательныхъ къ кривымъ, и являющаяся одинаково полезной при изученіи формы всякой поверхности Но дѣло представится въ иномъ видѣ, если разсматривать соприкасаніе второго порядка, чтобы измѣрить кривизну поверхностей.

Въ этомъ случаѣ было-бы естественно сравнить всѣ поверхности съ шаровой поверхностью, такъ какъ она одна обладаетъ постоянной кривизной, подобно тому, какъ всѣ кривыя мы сравнивали съ кругомъ. Но такъ какъ соприкасаніе второго порядка между двумя поверхностями требуетъ шести условій, а общее уравненіе шаровой поверхности содержитъ только четыре произвольныя постоянныя,—то невозможно для каждой точки нѣкоторой поверхности найти шаровую поверхность, совершенно соприкасающуюся во всѣхъ направленіяхъ; между тѣмъ, какъ мы видѣли выше, безконечно-малую дугу кривой всегда можно вполнѣ совмѣстить съ нѣкоторой дугой круга. Въ виду невозможности измѣрить кривизну поверхности въ каждой точкѣ при помощи единственной шаровой поверхности, геометры опредѣлили координаты центра и радіусъ такой шаровой поверхности, которая, хотя и не соприкасается одинаково во всѣхъ направленіяхъ, но обладаетъ этимъ свойствомъ въ одномъ направленіи, соотвѣтствующемъ данному отношенію между двумя приращеніями h и k. Въ этомъ случаѣ, чтобы установить *относительное* соприкасаніе второго порядка, достаточно прибавить къ тремъ обычнымъ условіямъ соприкасанія перваго порядка одно условіе, выражающее, что всѣ члены второй степени относительно h и k, разсматриваемыя совмѣстно, обращаются въ нуль, причемъ не нужно вовсе приравнивать нулю каждый въ отдѣльности; число соотношеній въ этомъ случаѣ будетъ равно только числу произвольныхъ постоянныхъ, содержащихся въ уравненіи шаровой поверхности, которая, такимъ образомъ, окажется вполнѣ опредѣленной.

Этотъ способъ приводитъ по существу къ изученію кривизны поверхности въ каждой точкѣ съ помощью кривизны различныхъ кривыхъ, которыя получились-бы на этой поверхности при пересѣченіи ея рядомъ плоскостей, проведенныхъ черезъ соотвѣтствующіе нормали.

Исходя изъ общей формулы, выражающей радіусъ кривизны каждаго изъ этихъ нормальныхъ сѣченій въ функціи его направленія, Эйлеръ, которому почти всецѣло принадлежитъ вся эта теорія, открылъ нѣсколько важныхъ теоремъ, относящихся къ любымъ поверхностямъ.

Онъ сначала безъ труда установилъ, что между всѣми нормальными сѣченіями нѣкоторой поверхности въ одной и той-же точкѣ можно различать два главныхъ, кривизна которыхъ, въ сравненіи съ кривизной всѣхъ остальныхъ, будетъ для первой—*минимальной*, а для второй—*максимальной*. Плоскости этихъ сѣченій замѣчательны тѣмъ, что онѣ постоянно перпендикулярны другъ къ другу. Затѣмъ онъ показалъ, что какова-бы ни была данная поверхность, и даже независимо отъ ея опредѣленія, кривизны этихъ двухъ новыхъ сѣченій достаточно, чтобы вполнѣ опредѣлить кривизну всякаго другаго нормальнаго сѣченія съ помощью неизмѣнной и очень простой формулы, въ зависимости отъ наклоненія плоскости этого сѣченія къ плоскости сѣченія съ наибольшей или съ наименьшей кривизной. Разсматривая эту формулу, какъ полярное уравненіе нѣкоторой плоской кривой, онъ вывелъ изъ нея остроумное построеніе, въ высшей степени замѣчательное по своей общности и простотѣ; оно заключается въ слѣдующемъ: построимъ такой эллипсъ, чтобы разстоянія одного изъ его фокусовъ до двухъ концовъ большей оси были-бы равны радіусамъ *наибольшей* и *наименьшей* кривизны; тогда радіусъ кривизны каждаго другого нормальнаго сѣченія будетъ равенъ тому изъ радіусовъ-векторовъ эллипса, который составитъ съ осью уголъ вдвое большій, чѣмъ уголъ наклоненія плоскости даннаго сѣченія къ плоскости одного изъ главныхъ сѣченій.

Этотъ эллипсъ обращается въ гиперболу, построенную съ помощью того же пріема, въ случаѣ, если вогнутости двухъ главныхъ сѣченій направлены въ разные стороны; наконецъ, онъ становится параболой, если данная поверхность принадлежитъ къ классу такихъ поверхностей, которыя могутъ быть произведены перемѣщеніемъ прямой линіи, или-же если она въ данной точкѣ представляетъ перегибъ.

Изъ этого изящнаго основного соотношенія позднѣе было выведено много болѣе или менѣе интересныхъ второстепенныхъ теоремъ; но здѣсь не мѣсто ихъ разсматривать. Я долженъ остановиться только на основной теоремѣ Менье, дополняющей трудъ Эйлера и связывающей кривизну всѣхъ кривыхъ, которыя могутъ быть проведены на поверхности черезъ одну и ту-же точку, съ кривизною нормальныхъ сѣченій,—единственныхъ сѣченій, разсмотрѣнныхъ Эйлеромъ. На основаніи этой теоремы, центръ кривизны каждаго наклоннаго сѣченія можно разсматривать, какъ проекцію на плоскость этого сѣченія центра кривизны, соотвѣтствующаго нормальному сѣченію, проходящему черезъ ту-же касательную: отсюда Менье вывелъ очень простое построеніе, согласно которому, примѣняя кругъ, аналогичный эллипсу Эйлера, можно опредѣлить кривизну наклонныхъ сѣченій, зная кривизну нормальныхъ сѣченій: такимъ образомъ, комбинируя эти двѣ теоремы, достаточно знать кривизну двухъ *главныхъ* нормальныхъ сѣченій, чтобы опредѣлить кривизну всѣхъ остальныхъ кривыхъ, которыя могутъ быть проведены на нѣкоторой поверхности черезъ данную ея точку.

Изложенная теорія позволяетъ вполнѣ изслѣдовать, точка за точкой, кривизну всякой поверхности. Чтобы легче связать между собой замѣчанія, относящіяся къ различнымъ точкамъ той-же поверхности, геометры пытались опредѣлить такъ называемыя *линіи кривизны* поверхностей, т. е. линіи, обладающія тѣмъ свойствомъ, что на смежныя нормали къ поверхности, проходящія черезъ нихъ, можно смотрѣть, какъ на лежащія въ одной плоскости. Черезъ каждую точку любой поверхности проходятъ двѣ такихъ линіи, всегда перпендикулярныя другъ къ другу, направленіе которыхъ въ началѣ совпадаетъ съ направленіемъ двухъ нормальныхъ сѣченій, разсмотрѣнныхъ выше; это обстоятельство можетъ избавить отъ необходимости разсматривать послѣднія. Опредѣленіе линіи кривизны производится очень просто для наиболѣе извѣстныхъ поверхностей, напр. для цилиндрическихъ, коническихъ и поверхностей вращенія. Это новое основное понятіе сдѣлалось исходной точкой для нѣсколькихъ другихъ общихъ изысканій, обладающихъ не меньшимъ значеніемъ, какъ напр. относительно *поверхностей кривизны*, т. е. такихъ поверхностей, которыя являются геометрическими мѣстами центровъ кривизны различныхъ главныхъ сѣченій, или-же относительно развертывающихся поверхностей, образуемыхъ нормалями къ поверхности въ различныхъ точкахъ линіи кривизны.

Чтобы закончить разсмотрѣніе теоріи кривизны, мнѣ остается еще указать въ общихъ чертахъ на соображенія, относящіяся къ *кривымъ двоякой кривизны*, т. е. къ такимъ кривымъ, которыя не лежатъ въ одной плоскости.

Что касается опредѣленія ихъ касательныхъ, то оно, очевидно, не представляетъ никакой трудности. Если кривая аналитически задана уравненіями ея проекціи на двѣ координатныя плоскости, то уравненіями касательныхъ къ этой кривой будутъ просто уравненія касательныхъ къ этимъ проекціямъ; такимъ образомъ этотъ вопросъ приводится къ общей теоріи плоскихъ кривыхъ. Если-же, съ болѣе общей точки зрѣнія, кривая аналитически опредѣляется, какъ это было показано въ XII лекціи, системой уравненій двухъ поверхностей, причемъ данная линія является ихъ пересѣченіемъ, то касательную необходимо разсматривать, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей, касательныхъ къ этимъ двумъ поверхностямъ, и задача будетъ сведена къ вопросу о касательныхъ плоскостяхъ, разрѣшенному нами выше.

Кривизна этого рода кривыхъ приводитъ къ установленію новаго и весьма важнаго понятія. Въ самомъ дѣлѣ, въ плоской кривой мы можемъ съ достаточной точностью оцѣнить кривизну, измѣряя большій или меньшій уголъ между двумя послѣдовательными элементами, который косвенно опредѣляется радіусомъ соприкасающагося круга. Но для кривой, не лежащей въ одной плоскости, дѣло представляется въ совершенно иномъ видѣ. Такъ какъ послѣдовательные элементы кривой въ этомъ случаѣ не лежатъ уже больше въ одной и той-же плоскости, то для того, чтобы составить себѣ точное понятіе о кривизнѣ, необходимо разсматривать въ отдѣльности углы, образуемые ими другъ съ другомъ, а также взаимныя наклоненія тѣхъ плоскостей, въ которыхъ они лежатъ. Поэтому, прежде всего, необходимо установить, какую плоскость мы будемъ постоянно принимать за *плоскость кривой*; эту плоскость можно опредѣлить съ помощью трехъ безконечно близкихъ точекъ, и поэтому она называется *соприкасающейся* плоскостью; она непрерывно измѣняется при переходѣ отъ одной точки къ другой. Какъ только положеніе этой плоскости будетъ найдено, измѣреніе обыкновенной кривизны съ помощью соприкасающагося круга не представитъ уже, очевидно, никакихъ новыхъ затрудненій. Что-же касается *второй кривизны*, то она измѣряется величиной угла, образуемаго двумя послѣдовательными соприкасающимися плоскостями; ея аналитическое выраженіе, вообще говоря, легко можетъ быть найдено. Чтобы еще увеличить аналогію между теоріей этой кривизны и теоріей обыкновенной кривизны, мы могли-бы ее измѣрять также косвенно, съ помощью радіуса *соприкасающейся* шаровой поверхности, проходящей черезъ 4 безконечно-близкія точки кривой; уравненіе этой шаровой поверхности составляется по тому-же пріему, какъ и уравненіе соприкасающейся плоскости. Радіусъ ея обыкновенно опредѣляютъ, какъ maximum кривизны, представляемой въ разсматриваемой точкѣ развертывающейся поверхностью, которая является геометрическимъ мѣстомъ касательныхъ къ данной кривой.

Мы должны теперь перейти къ разсмотрѣнію вопросовъ общей геометріи трехъ измѣреній, рѣшаемыхъ съ помощью интегральнаго исчисленія. Къ этимъ вопросамъ принадлежатъ квадратуры кривыхъ поверхностей и кубатуры соотвѣтствующихъ имъ объемовъ.

Что касается квадратуры кривыхъ поверхностей, то для составленія общаго дифференціальнаго уравненія необходимо представить себѣ, что поверхность раздѣлена на безконечно-малые во всѣхъ направленіяхъ плоскіе элементы четырьмя плоскостями, причемъ двѣ изъ этихъ плоскостей перпендикулярны къ оси иксовъ, а двѣ—къ оси игрековъ. Каждый изъ этихъ элементовъ лежитъ въ соотвѣтствующей касательной плоскости; горизонтальной его проекціей, очевидно, будетъ прямоугольникъ, образуемый дифференціалами двухъ горизонтальныхъ координатъ, и обладающій площадью, равной $dx\,dy$. Изъ этой площади мы, на основаніи простой элементарной теоремы, можемъ вывести площадь самаго элемента, дѣля площадь проекціи на косинусъ угла, образуемаго касательной плоскостью съ плоскостью xy. Такимъ образомъ, мы найдемъ, что общее выраженіе этого элемента будетъ:

$$d^2 S = dx\,dy \sqrt{\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2} + 1}.$$

Поэтому, въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, площадь данной поверхности опредѣлится двукратнымъ интегрированіемъ этой дифференціальной формулы по двумъ перемѣннымъ, насколько позволитъ намъ это сдѣлать современное несовершенство интегральнаго исчисленія. Предѣлы каждаго послѣдовательнаго интеграла будутъ опредѣлены видомъ тѣхъ поверхностей, которыя, пересѣкаясь съ разсматриваемой поверхностью, ограничатъ часть ея, подлежащую измѣренію; поэтому, при примѣненіи изложеннаго общаго метода, необходимо обращать особое вниманіе на способъ опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ, или произвольныхъ функцій, вводимыхъ интегрированіемъ.

Что-же касается вычисленія объемовъ, ограниченныхъ кривыми поверхностями, то та-же система плоскостей, при помощи которой мы только что опредѣлили дифференціалъ площади, можетъ служить намъ также непосредственно для разложенія объема на многогранные элементы. Дѣйствительно, ясно, что безконечно-малый объемъ второго порядка, заключенный между этими четырьмя плоскостями, долженъ быть, по смыслу метода безконечно-малыхъ, приравненъ прямоуголному параллелепипеду, высота котораго равна вертикальной ординатѣ z разсматриваемой точки, а основаніе равно $dx\,dy$, такъ какъ разница между этимъ тѣломъ и разсматриваемой частью пространства, очевидно, есть величина безконечно-малая третьяго порядка, меньшая $dx\,dy\,dz$. Отсюда, на основаніи одной изъ простѣйшихъ теоремъ элементарной геометріи, мы прямо выведемъ для дифференціальнаго выраженія искомаго объема слѣдующее общее уравненіе:

$$d^2 V = z\,dx\,dy;$$

Изъ этихъ формулъ послѣ двукратнаго интегрированія мы для каждаго отдѣльнаго случая выведемъ дѣйствительную величину искомаго объема, причемъ, какъ и въ первомъ случаѣ, необходимо обратить вниманіе на опредѣленіе предѣловъ каждаго интеграла, въ зависимости отъ вида поверхностей, которыми данный объемъ будетъ ограниченъ съ боковъ.

Здѣсь не мѣсто вдаваться въ какія-бы то ни было подробности относительно окончательнаго рѣшенія этихъ двухъ основныхъ вопросовъ; было-бы, однако, не безполезно показать на этихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ общую и своеобразную аналогію, которая по необходимости существуетъ между этими вопросами и которая позволяетъ преобразовать всякое изслѣдованіе относительно квадратуры въ соотвѣтствующее изслѣдованіе кубатуръ. Въ самомъ дѣлѣ, легко убѣдиться, что оба дифференціальныя уравненія отличаются другъ отъ друга только тѣмъ, что при переходѣ отъ второго къ первому на мѣсто z приходится поставить

$$\sqrt{\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}+1}.$$

Поэтому, площадь нѣкоторой кривой поверхности можетъ считаться численно равной объему тѣла, ограниченнаго такой поверхностью, что ея вертикальная ордината постоянно равна по своей величинѣ секансу угла, образуемаго горизонтальной плоскостью съ касательной къ первоначальной поверхности. Разумѣется, мы предполагаемъ, что предѣлы въ обоихъ случаяхъ одинаковы.

Что закончить философскій разборъ общей геометріи трехъ измѣреній, мнѣ остается еще въ общихъ чертахъ разсмотрѣть изящную и глубокую мысль Монжа относительно аналитической классификаціи поверхностей въ ихъ естественныя семейства; эти классификаціи надо считать самымъ замѣчательнымъ усовершенствованіемъ, которое геометрія получила со времени Декарта и Лейбница.

Приступая къ изученію частныхъ свойствъ различныхъ поверхностей съ общей точки зрѣнія, мы прежде всего испытываемъ извѣстныя затрудненія вслѣдствіе отсутствія хорошей классификаціи, основанной на наиболѣе существенныхъ геометрическихъ признакахъ и въ то-же время достаточно простой. Съ самаго основанія аналитической геометріи, геометры совершенно безсознательно стали классифицировать поверхности, какъ и кривыя, по степени и формѣ ихъ уравненій, т. е. на основаніи единственнаго принципа, который самъ собою представляется человѣческому уму въ качествѣ основанія для подобнаго раздѣленія.

Но легко понять, что этотъ принципъ классификаціи, вполнѣ примѣнимый уравненіямъ первой и второй степени, не удовлетворяетъ ни одному изъ основныхъ условій, которыя должны быть соблюдены при такомъ трудѣ. Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что Ньютонъ, изслѣдуя общее уравненіе третьей степени съ двумя перемѣнными, показалъ, что—если даже ограничиться простымъ перечисленіемъ различныхъ плоскихъ кривыхъ, которыя могутъ быть изображены этимъ уравненіемъ,—то, хотя всѣ эти кривыя и являются безусловно неопредѣленными во всѣхъ отношеніяхъ все-таки необходимо различать 74 различныхъ вида ихъ, которые также отличны другъ отъ друга, какъ три кривыя второго порядка.

Хотя никто не изслѣдовалъ съ этой-же точки зрѣнія уравненія четвертой степени съ двумя перемѣнными, однако не подлежитъ сомнѣнію, что оно дало бы еще гораздо болѣе значительное число различныхъ кривыхъ; и это число, очевидно, съ чрезвычайной быстротой возрастало-бы съ возрастаніемъ степени уравненія.

Если мы перейдемъ теперь къ уравненіямъ съ тремя перемѣнными, которыя, въ силу своей большей сложности, необходимо представляютъ гораздо большее разнообразіе то, очевидно, что число дѣйствительно различныхъ поверхностей, выражаемыхъ ими, должно быть еще гораздо многочисленнѣе и будетъ возрастать съ возрастаніемъ степени гораздо быстрѣе.

Этихъ поверхностей такъ много, что ученые всегда ограничивались изслѣдованіемъ уравненій двухъ первыхъ степеней, и ни одинъ геометръ не попытался произвести такое же изслѣдованіе поверхностей третьяго порядка, какое произвелъ Ньютонъ относительно соотвѣтствующихъ кривыхъ. Отсюда вытекаетъ очевидный выводъ, что даже въ томъ случаѣ, если несовершенство алгебры не мѣшало-бы неограниченному примѣненію подобнаго способа изслѣдованія, все-же общая классификація поверхностей по степени и формѣ ихъ уравненій была-бы совершенно невозможна на практикѣ. Но это соображеніе не является единственнымъ мотивомъ, который побуждаетъ насъ отказаться отъ подобной классификаціи: оно даже не является самымъ важнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, этотъ способъ распредѣленія поверхностей, помимо его практической непримѣнимости, прямо противорѣчитъ главному назначенію всякой хорошей классификаціи: возможно тѣснѣе сближать такіе предметы, которые связаны наиболѣе важными соотношеніями, и удалять другъ отъ друга предметы, связанные лишь второстепенными аналогіями.

Тождество степени уравненій является для поверхностей лишь второстепеннымъ геометрическимъ признакомъ: оно даже точно не указываетъ, какое число точекъ необходимо для полнаго опредѣленія каждой поверхности.

Наиболѣе важное общее свойство поверхностей, подлежащее нашему разсмотрѣнію, очевидно, заключается въ способѣ ихъ происхожденія: всѣ поверхности, образованныя по тому-же способу, необходимо должны обладать значительными геометрическими аналогіями, тогда какъ поверхности, способы произведенія которыхъ существенно-различны, будутъ обладать только очень ничтожнымъ сходствомъ. Такъ, напримѣръ, всѣ цилиндрическія поверхности, какова-бы ни была форма ихъ основанія, составляютъ одно естественное семейство, различныя разновидности котораго обладаютъ большимъ числомъ общихъ признаковъ первостепенной важности; тоже можно сказать относительно всѣхъ коническихъ поверхностей, или всѣхъ поверхностей вращенія и проч.

Но это естественное распредѣленіе совершенно уничтожается классификаціей, основанной на степени уравненія. Дѣйствительно, поверхности, происходящія по тому-же способу, какъ напр. цилиндрическія поверхности, могутъ выражаться уравненіями всевозможныхъ степеней, въ зависимости отъ различія ихъ основаній,—различія, имѣющаго совершенно второстепенное значеніе. Съ другой стороны, уравненія той-же степени часто выражаютъ поверхности, принадлежащія къ самымъ разнороднымъ геометрическимъ семействамъ: однѣ—къ цилиндрическимъ, другія—къ коническимъ, третьи—къ поверхностямъ вращенія и проч. Поэтому, указанная аналитическая классификація совершенно ошибочна; то, что нужно соединить, она разъединяетъ; а то, что нужно разграничить—сводитъ въ одну группу.

Однако, такъ какъ общая геометрія всецѣло основана на примѣненіи аналитическихъ соображеній и методовъ, то и въ этомъ случаѣ необходимо, чтобы классификація могла принять аналитическій характеръ.

Въ такомъ именно видѣ представлялось основное затрудненіе, такъ счастливо устраненное Монжемъ: естественныя семейства поверхностей были ясно установлены съ геометрической точки зрѣнія, по способу ихъ происхожденія; надо было опредѣлить характеръ аналитическихъ соотношеній, предназначенный для постояннаго абстрактнаго толкованія этого конкретнаго свойства. Это важное открытіе было совершенно необходимо для окончанія построенія общей теоріи поверхностей. Принципъ, примѣненный Монжемъ для достиженія этой цѣли, сводится къ слѣдующему простому и ясному общему соображенію: всѣ поверхности, подчиненныя тому-же способу происхожденія, необходимо характеризуются нѣкоторымъ общимъ свойствомъ касательныхъ плоскостей въ любой точкѣ ихъ; поэтому, выражая аналитически это свойство по общему уравненію плоскости, касательной къ нѣкоторой поверхности, мы составимъ дифференціальное уравненіе, которымъ будутъ представлены одновременно всѣ поверхности этого семейства.

Такъ, напримѣръ, всякая цилиндрическая поверхность обладаетъ слѣдующимъ исключительнымъ признакомъ: плоскость, касательная въ любой точкѣ поверхности, постоянно параллельна неизмѣнной прямой, указывающей направленіе производящихъ. Отсюда легко увидѣть, что, если мы примемъ за уравненія этой прямой уравненія

$$x=az,\ y=bz,$$

то общее уравненіе касательной плоскости, которое было установлено нами выше, приведетъ къ слѣдующему дифференціальному уравненію, общему для всѣхъ цилиндрическихъ поверхностей:

$$a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1.$$

Точно также, всѣ коническія поверхности характеризуются съ этой точки зрѣнія тѣмъ необходимымъ свойствомъ, что касательная плоскость въ любой точкѣ постоянно проходитъ черезъ вершину конуса. Поэтому, если мы обозначимъ черезъ α, β, γ координаты этой вершины, то мы непосредственно придемъ къ дифференціальному уравненію

$$(x-\alpha)\frac{dz}{dx}+(y-\beta)\frac{dz}{dy}=z-\gamma;$$

это уравненіе является выраженіемъ всего семейства коническихъ поверхностей.

Въ поверхностяхъ вращенія касательная плоскость въ любой точкѣ постоянно перпендикулярна къ плоскости меридіана, т. е. къ плоскости, проходящей черезъ эту точку и черезъ ось поверхности.

Чтобы наиболѣе просто аналитически выразить это свойство, предположимъ, что ось вращенія принята за ось z-овъ: дифференціальное уравненіе, общее всему этому семейству поверхностей, будетъ

$$y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=0.$$

Было-бы излишне приводить здѣсь еще большее число примѣровъ, чтобы ясно установить, что, вообще говоря, каковъ-бы ни былъ способъ ихъ происхожденія, всѣ поверхности, принадлежащія къ тому-же естественному семейству, можно выразить аналитически однимъ и тѣмъ-же уравненіемъ съ частными производными, содержащимъ произвольныя постоянныя; это уравненіе можно составить на основаніи одного свойства касательной плоскости, общаго всѣмъ этимъ поверхностямъ. Чтобы дополнить это основное и необходимое соотвѣтствіе между геометрической и аналитической точкой зрѣнія, Монжъ разсмотрѣлъ еще конечныя уравненія, которыя являются интегралами этихъ дифференціальныхъ уравненій и почти всегда могутъ быть легко получены прямыми изслѣдованіями. Каждое изъ этихъ конечныхъ уравненій — какъ извѣстно изъ общей теоріи интегрированія — должно содержать одну произвольную функцію, если дифференціальное уравненіе только перваго порядка; но это совсѣмъ не препятствуетъ тому, чтобы подобныя уравненія имѣли ясно опредѣленный смыслъ, какъ въ геометрическомъ, такъ и въ аналитическомъ отношеніи, хотя они и являются гораздо болѣе общими, чѣмъ тѣ уравненія, которыя разсматриваются обыкновенно.

Эта произвольная функція соотвѣтствуетъ тѣмъ свойствамъ поверхностей, которыя не опредѣлены способомъ ихъ происхожденія, такъ напр. основанію въ цилиндрическихъ и коническихъ поверхностяхъ, меридіану въ поверхностяхъ вращенія и т. д. *).

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ конечное уравненіе семейства поверхностей содержитъ сразу двѣ произвольныя функціи, зависящія отъ различныхъ комбинацій перемѣнныхъ координатъ; это имѣетъ мѣсто въ случаѣ, когда соотвѣтствующее дифференціальное уравненіе должно быть второго порядка; съ геометрической точки зрѣнія, эта большая степень неопредѣленности указываетъ на болѣе общее, но, тѣмъ не менѣе, строго опредѣленное семейство.

Таково, напримѣръ, семейство развертывающихся поверхностей, въ которое, въ качествѣ подчиненныхъ видовъ, входятъ всѣ цилиндрическія поверхности, всѣ коническія поверхности и еще множество подобныхъ видовъ; однако, всѣ поверхности, относящіяся къ этому семейству, могутъ быть ясно опредѣлены съ наиболѣе общей точки зрѣнія, какъ огибающія положенія, пройденныя нѣкоторой плоскостью, которая, перемѣщаясь, остается постоянно касательной къ двумъ опредѣленнымъ поверхностямъ, или-же какъ геометрическія мѣста всѣхъ касательныхъ къ нѣкоторой кривой двоякой кривизны. Этой естественной группѣ поверхностей соотвѣтствуетъ слѣдующее неизмѣнное дифференціальное уравненіе между тремя частными производными второго порядка, открытое Эйлеромъ:

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}$$

Соотвѣтствующее этому уравненію конечное уравненіе необходимо содержитъ двѣ произвольныя функціи, которыя геометрически соотвѣтствуютъ тѣмъ двумъ неопредѣленнымъ поверхностямъ, по которымъ должна скользить производящая плоскость, или какимъ-либо двумъ уравненіямъ направляющей кривой.

Хотя полезно разсматривать конечныя уравненія естественныхъ семействъ поверхностей, тѣмъ не менѣе ясно, что въ виду неопредѣленности произвольныхъ функцій, въ нихъ по необходимости содержащихся, они являются мало пригодными для дальнѣйшихъ аналитиче-

---

*) Мы можемъ найти, напримѣръ, — либо при помощи прямыхъ соображеній аналитической геометріи, либо на основаніи методовъ интегрированія, — что цилиндрическія и коническія поверхности изображаются слѣдующими конечными уравненіями:

$$x - \alpha z = \varphi(y - \beta z); \quad \frac{x-\alpha}{z-\gamma} = \varphi\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right),$$

гдѣ φ обозначаетъ совершенно произвольную функцію.

скихъ изслѣдованій; поэтому предпочтительнѣй примѣнять дифференціальныя уравненія, куда входятъ только простыя произвольныя постоянныя, несмотря на косвенный характеръ этихъ уравненій. Такимъ путемъ общее и правильное изученіе свойствъ различныхъ поверхностей сдѣлалось дѣйствительно осуществимымъ, такъ какъ анализъ получилъ возможность схватывать и выдѣлять общую точку зрѣнія.

Нетрудно понять, что такой принципъ позволилъ придти къ выводамъ, по общности и по интересу значительно превосходящимъ всѣ результаты, которые можно было получить раньше. Приведемъ только одинъ очень простой примѣръ,—хотя онъ далеко не является самымъ замѣчательнымъ,—подобный методъ аналитической геометріи позволилъ установить слѣдующую любопытную особенность каждаго *однороднаго* уравненія съ тремя перемѣнными: такое уравненіе необходимо изображаетъ коническую поверхность, вершина которой совпадаетъ съ началомъ координатъ.

Точно также, среди болѣе трудныхъ изысканій, можно указать, что при помощи варьяціоннаго исчисленія удалось опредѣлить кратчайшее разстояніе между двумя точками на любой развертывающейся поверхности, не прибѣгая къ отдѣльному разсмотрѣнію частныхъ случаевъ и проч.

Я считалъ своимъ долгомъ подробнѣе остановиться на философскомъ изложеніи указанной прекрасной идеи Монжа, которая, безъ всякаго сомнѣнія, лучше всего обезпечиваетъ славу ея создателю; высокое значеніе этого принципа, по моему мнѣнію, никѣмъ еще не понято достаточно, за исключеніемъ Лагранжа, справедливѣйшаго цѣнителя своихъ соперниковъ. Я даже сожалѣю, что естественные предѣлы моего труда заставляютъ меня ограничиться такимъ несовершеннымъ очеркомъ, въ которомъ я не могъ указать на благодѣтельное воздѣйствіе этой новой геометріи на усовершенствованіе анализа, и въ частности—на общую теорію дифференціальныхъ уравненій со многими перемѣнными.

Размышляя объ этой философской классификаціи поверхностей, по существу своему аналогичной тѣмъ естественнымъ методамъ, которые физіологи пытались примѣнить въ зоологіи и въ ботаникѣ, я невольно ставилъ себѣ вопросъ: не слѣдуетъ-ли такой-же пріемъ перенести и въ теорію кривыхъ? Такъ какъ разнообразіе кривыхъ несравненно меньше, то рѣшеніе такой задачи одновременно менѣе важно и болѣе затруднительно: ибо признаки, которые могли-бы служить основаніемъ для классификаціи, гораздо менѣе рѣзко выражены. Поэтому было естественно, что человѣческій умъ сначала занялся классификаціей поверхностей.

Но, безъ сомнѣнія, надо надѣяться, что такой методъ изслѣдованія впослѣдствіи будетъ перенесенъ и на кривыя. Можно уже даже уловить въ нихъ нѣсколько естественныхъ семействъ, какъ напр. семейство параболъ какого-либо порядка, или гиперболъ, и проч. Тѣмъ не менѣе до сихъ поръ еще не было создано ни одного общаго принципа, на основаніи котораго можно-бы было прямо установить такую классификацію.

Я изложилъ возможно яснѣе въ этой главѣ и въ четырехъ предъидущихъ истинный философскій характеръ наиболѣе общаго и простого отдѣла конкретной математики; теперь я долженъ исполнить туже задачу относительно обширной и болѣе сложной науки—раціональной механики. Это и будетъ предметомъ четырехъ слѣдующихъ лекцій.

Пятнадцатая лекція.

Философскія соображенія объ основныхъ принципахъ раціональной механики.

Механическія явленія, по самой природѣ своей, какъ мы замѣтили уже выше, одновременно носятъ и болѣе частный, и болѣе сложный, и болѣе конкретный характеръ, чѣмъ явленія геометрическія. Поэтому, слѣдуя энциклопедической схемѣ, установленной въ этомъ трудѣ, при философскомъ изложеніи конкретной математики, мы помѣстимъ раціональную механику послѣ геометріи, ибо ея изученіе, по необходимости, труднѣе и, слѣдовательно, окажется и менѣе совершеннымъ. Геометрическіе вопросы стоятъ всегда совершенно независимо отъ всякихъ механическихъ соображеній, тогда какъ механическіе вопросы постоянно осложняются соображеніями геометрическими: форма тѣлъ неизбѣжно должна вліять на явленія движенія или равновѣсія.

Это осложненіе часто настолько велико, что одного самаго простого измѣненія формы тѣла достаточно, чтобы значительно увеличить трудность соотвѣтствующей задачи механики; объ этомъ предметѣ можно составить нѣкоторое представленіе, разсматривая напримѣръ, опредѣленіе взаимнаго тяготѣнія двухъ тѣлъ, какъ результата притяженія всѣхъ ихъ частицъ; вопросъ этотъ до сихъ поръ разрѣшенъ вполнѣ только въ предположеніи, что тѣла имѣютъ сферическую форму и, слѣдовательно, основное затрудненіе возникаетъ здѣсь, очевидно, вслѣдствіе геометрическихъ обстоятельствъ.

Такъ какъ мы въ предшествующихъ лекціяхъ убѣдились, что философскій характеръ геометріи все еще до извѣстной степени искаженъ остаткомъ весьма замѣтнаго вліянія духа метафизики, то мы, естественно, въ виду гораздо большей, по необходимости, сложности раціональной механики и должны ожидать, что вліяніе на нее метафизики окажется гораздо глубже; это обстоятельство и въ самомъ дѣлѣ очень легко доказать. Характеръ естественной науки, очевидно, присущій механикѣ еще въ гораздо большей степени, чѣмъ геометріи, въ настоящее время совершенно затемненъ для всѣхъ умовъ введеніемъ онтологическихъ разсужденій. Относительно всѣхъ основныхъ понятій этой науки наблюдается глубокое и постоянное смѣшеніе точекъ зрѣнія абстрактной и конкретной, что и препятствуетъ ясному различенію физически реальнаго отъ чисто логическаго, и точному отдѣленію искусственныхъ построеній, предназначенныхъ исключительно для облегченія установленія общихъ законовъ равновѣсія или движенія, отъ явленій природы, указанныхъ дѣйствительнымъ наблюденіемъ внѣшняго міра и составляющихъ реальныя основанія науки.

Можно даже признать, что громадное усовершенствованіе раціональной механики за послѣднее столѣтіе, какъ въ смыслѣ расширенія ея теорій, такъ и въ смыслѣ ихъ соотношеній, заставило философское пониманіе этой науки, если можно такъ выразиться, пойти въ указанномъ направленіи назадъ: теперь наука излагается обыкновенно гораздо хуже, чѣмъ это сдѣлано Ньютономъ. Въ самомъ дѣлѣ, своего развитія раціональная механика достигла, главнымъ образомъ, благодаря все болѣе и болѣе исключительному пользованію математическимъ анализомъ; преимущественное значеніе этого замѣчательнаго орудія заставило постепенно усвоить привычку видѣть въ раціональной механикѣ только простые вопросы анализа; благодаря совершенно неправильному, хотя и очень естественному, распространенію такого взгляда, пытались доказывать a priori, на основаніи чисто аналитическихъ разсужденій, даже основные принципы этой науки, тогда какъ Ньютонъ ограничился тѣмъ, что изложилъ ихъ какъ результаты одного наблюденія. Такимъ именно образомъ, напримѣръ, Даніилъ Бернулли, д'Аламберъ и, въ наше время, Лапласъ пытались доказать элементарное правило сложенія силъ при помощи однихъ только аналитическихъ соображеній; только Лагранжъ ясно замѣтилъ, что доказательства эти по необходимости совершенно недостаточны. Тоже направленіе и теперь еще болѣе или менѣе преобладаетъ у всѣхъ геометровъ. Но тѣмъ не менѣе ясно, говоря вообще, какъ мы нѣсколько разъ уже замѣчали, что математическій анализъ, несмотря на крайнюю его важность, — о чемъ я постарался дать правильное представленіе — по самой природѣ своей, можетъ быть только могучимъ орудіемъ дедукціи; это орудіе, если его возможно примѣнить, позволяетъ усовершенствовать до самой высокой степени науку, основанія которой уже установлены; но для самаго установленія основаній ея оно всегда окажется недостаточнымъ.

Если-бы было возможно всецѣло построить науку механики на простыхъ аналитическихъ соображеніяхъ, то было-бы непонятно, какимъ образомъ такая наука была-бы примѣнима къ дѣйствительному изученію природы. Напротивъ, реальность раціональной механики объясняется именно тѣмъ, что она основана на нѣсколькихъ общихъ фактахъ, непосредственно данныхъ наблюденіемъ и, съ точки зрѣнія истиннаго положительнаго философа, какъ мнѣ кажется, не поддающихся никакому объясненію. Несомнѣнно, что въ раціональной механикѣ аналитическимъ методомъ злоупотребляли еще болѣе чѣмъ въ геометріи. Спеціальная задача настоящей лекціи—указать, какимъ образомъ, при современномъ состояніи науки, можно ясно установить ея истинный философскій характеръ и совершенно освободить ее отъ всякаго метафизическаго вліянія, постоянно отдѣляя конкретную точку зрѣнія отъ абстрактной и проводя точную грань между исключительно опытной и чисто-раціональной частями науки. Согласно съ основной цѣлью нашего труда, такое введеніе необходимо должно предшествовать общимъ соображеніямъ о дѣйствительномъ составѣ науки, которыя будутъ изложены послѣдовательно въ трехъ слѣдующихъ лекціяхъ.

Начнемъ съ точнаго указанія общаго предмета разсматриваемой науки. Обыкновенно сначала отмѣчають,—и совершенно законно,—что механика совсѣмъ не останавливается не только на первичныхъ причинахъ движенія,—ихъ разсмотрѣніе выходило бы изъ предѣловъ положительной философіи—но даже и на обстоятельствахъ, которыми эти движенія вызываются; въ различныхъ отрасляхъ *физики* обстоятельства, производящія движенія, дѣйствительно являются важнымъ предметомъ положительнаго изученія, но они совершенно исключены изъ области механики, которая ограничивается разсмотрѣніемъ самаго движенія, не заботясь о томъ, чѣмъ оно было вызвано.

Силы въ механикѣ являются ничѣмъ инымъ, какъ движеніями совершающимися или долженствующими совершиться; двѣ силы, сообщающія одному и тому же тѣлу одну и ту-же скорость въ одномъ и томъ-же направленіи, разсматриваются, какъ тождественныя, какъ бы различно ни было ихъ происхожденіе и независимо отъ того, является ли движеніе результатомъ мышечныхъ сокращеній животнаго, или тяготѣнія къ нѣкоторому притягивающему центру, или удара нѣкотораго тѣла, или же расширенія эластичной жидкости и т. п. Но хотя эта точка зрѣнія, къ счастію, сдѣлалась за послѣднее время совершенно обычной, все же геометрамъ предстоитъ еще произвести весьма существенную реформу,—если не въ понятіи, то по крайней мѣрѣ въ обычной терминологіи,—чтобы окончательно устранить старинное метафизическое понятіе о *силахъ* и яснѣе, чѣмъ это дѣлается до сихъ поръ, намѣтить истинную точку зрѣнія механики *).

Теперь можно уже очень точно установить общую задачу раціональной механики. Она заключается въ томъ, чтобы опредѣлить, какое дѣйствіе на данное тѣло произведутъ нѣсколько различныхъ силъ, приложенныя одновременно, если намъ извѣстны простыя движенія, которыя явились-бы результатомъ отдѣльнаго дѣйствія каждой изъ этихъ силъ; или-же, ставя задачу въ обратномъ смыслѣ,—опредѣлить тѣ простыя движенія, комбинація которыхъ приводитъ къ извѣстному сложному движенію. Это положеніе ясно показываетъ, каковы, по необходимости, должны быть данныя и неизвѣстныя въ каждой задачѣ механики. Легко понять, что изученіе дѣйствія отдѣльной силы, собственно говоря, совершенно не относится къ области раціональной механики: тамъ всегда предполагается, что дѣйствіе силы уже извѣстно, такъ какъ вторая общая задача поддается рѣшенію только какъ обратный случай первой.

Поэтому вся механика по существу занимается комбинаціей силъ, все равно, приводятъ-ли ихъ взаимодѣйствія къ сложному движенію — и въ такомъ случаѣ нужно изучить различныя условія этого движенія,— или-же, благодаря ихъ взаимному уничтоженію, тѣло переходитъ въ состояніе равновѣсія,—тогда необходимо опредѣлить характерныя условія такого равновѣсія.

Обѣ общія проблемы, одна—прямая, другая—обратная, въ разрѣшеніи которыхъ заключается цѣль механики, какъ науки, съ точки зрѣнія ея при-

*) Необходимо также замѣтить, что даже само названіе науки въ высшей степени неудобно, такъ какъ оно обозначаетъ только одно изъ второстепенныхъ приложеній этой науки: это заставляетъ часто прибавлять прилагательное „раціональная", что, хотя и необходимо, но крайне стѣснительно. Нѣмецкіе философы, чтобы избѣжать этого неудобства, ввели гораздо болѣе философскій терминъ „*форономія*", примѣненный въ курсѣ Германна. Было бы очень желательно, чтобы этотъ терминъ былъ принятъ повсюду.

мѣненій, имѣютъ одинаковое значеніе. Дѣйствительно, въ нѣкоторыхъ случаяхъ простыя движенія могутъ быть изучены непосредственно съ помощью наблюденія, тогда какъ ознакомленіе съ движеніемъ, которое произойдетъ отъ ихъ комбинацій, возможно только на основаніи теоріи; въ другихъ-же случаяхъ — наоборотъ—можно наблюдать одно только дѣйствительное движеніе, тогда какъ простыя движенія, результатомъ которыхъ мы его себѣ представляемъ, можно опредѣлить только путемъ умозрѣнія. Такъ, напримѣръ, въ случаѣ наклоннаго паденія тяжелыхъ тѣлъ на поверхности земли извѣстны оба простыя движенія, которыя совершало бы тѣло при отдѣльномъ дѣйствіи каждой изъ приложенныхъ къ нему силъ, — т. е. извѣстны направленіе и скорость равномѣрнаго движенія, которое произошло бы отъ одного толчка, и законъ ускоренія перемѣннаго вертикальнаго движенія, которое явилось бы результатомъ одной только тяжести; поэтому и ставится вопросъ—найти различныя обстоятельства сложнаго движенія, вызваннаго совмѣстнымъ дѣйствіемъ этихъ двухъ силъ, т. е. опредѣлить траекторію, описываемую движущимся тѣломъ, направленіе и пріобрѣтенную имъ скорость въ каждый моментъ движенія, время необходимое для достиженія извѣстнаго положенія и т. д.; для большей общности, можно присоединить къ двумъ даннымъ силамъ и сопротивленіе окружающей среды, если только законъ его также извѣстенъ.

Небесная механика представляетъ главный примѣръ обратной задачи,—опредѣлить силы, вызывающія движеніе планетъ вокругъ солнца и спутниковъ вокругъ планетъ.

Тутъ непосредственно извѣстно только сложное движеніе, и по обстоятельствамъ, характеризующимъ это движеніе,—а они въ краткой формѣ выражены законами Кеплера, — надо найти элементарныя силы, которыя слѣдуетъ считать приложенными къ небеснымъ тѣламъ для того, чтобы сообщить имъ дѣйствительныя движенія. Если эти силы опредѣлены, то геометры съ пользой могутъ разсмотрѣть вопросъ съ обратной точки зрѣнія, что сначала было бы невозможно.

Итакъ, изложивъ ясно истинное общее назначеніе раціональной механики, разсмотримъ теперь основные принципы, на которыхъ она покоится. Сначала изслѣдуемъ чрезвычайно важный философскій пріемъ, опредѣляющій точку зрѣнія, съ которой должны быть разсматриваемы тѣла въ механикѣ. Этотъ вопросъ тѣмъ болѣе заслуживаетъ нашего вниманія, что обыкновенно онъ все еще окутывается густымъ туманомъ метафизики, благодаря которому истинная природа его понимается неправильно.

Было бы совершенно невозможно установить какое бы то ни было общее положеніе относительно абстрактныхъ законовъ равновѣсія или движенія, если бы мы не смотрѣли на тѣла какъ на абсолютно *инертныя*, т. е. какъ на неспособныя самовольно измѣнять дѣйствіе силъ, къ нимъ приложенныхъ. По обычный способъ выраженія этого основнаго понятія мнѣ кажется совершенно неправильнымъ. Прежде всего, указанное абстрактное понятіе, которое является только логическимъ пріемомъ, изобрѣтеннымъ человѣческимъ умомъ для облегченія построенія раціональной механики или, скорѣе, для самаго созданія ея, очень часто смѣшивается съ тѣмъ, что называется, —но очень неточно, — *закономъ инерціи*; на послѣдній же нужно смотрѣть,—мы увидимъ это ниже, — какъ на общій результатъ наблюденія. Далѣе, характеръ этого понятія обыкновенно настолько неопредѣленъ, что совершенно неизвѣстно въ точности, представляется ли подобное пассивное состояніе тѣлъ чисто гипотетическимъ, или оно имѣетъ реальность явленія природы. Наконецъ, такая неопредѣленность часто приводитъ къ тому, что нашъ умъ вынужденъ невольно смотрѣть на общіе законы раціональной механики какъ на законы, примѣнимые, по самой природѣ своей, къ такъ называемымъ неорганическимъ тѣламъ, тогда какъ они, напротивъ, такъ же хорошо оправдываются и на тѣлахъ органическихъ, хотя въ этомъ случаѣ ихъ точное примѣненіе встрѣчаетъ гораздо болѣе затрудненій. Весьма важно провѣрить съ указанныхъ различныхъ точекъ зрѣнія общепринятыя понятія.

Прежде всего мы должны ясно установить, что указанное пассивное состояніе тѣлъ есть чистая абстракція, прямо противоположная ихъ дѣйствительному состоянію.

Въ первоначальной системѣ философіи, принятой человѣческимъ разумомъ, признавалось, что матерія дѣйствительно по самой природѣ своей существенно инертна или пассивна, и что всѣ ея дѣйствія проистекаютъ извнѣ, подъ вліяніемъ извѣстныхъ сверхъестественныхъ существъ или извѣстныхъ метафизическихъ сущностей. Но съ тѣхъ поръ какъ начала распространяться положительная философія, и человѣческій разумъ ограничился изученіемъ истиннаго состоянія тѣлъ, не касаясь первоначальныхъ и основныхъ *причинъ*, съ тѣхъ поръ для всякаго наблюдателя стало ясно, что различныя тѣла природы проявляютъ передъ нами болѣе или менѣе обширную самопроизвольную дѣятельность. Въ этомъ отношеніи между тѣлами неорганическими и тѣми, которыя мы называемъ преимущественно *одушевленными*, есть только простое различіе степеней. Прежде всего успѣхи естественной философіи вполнѣ показали,—какъ мы установимъ ниже, — что не существуетъ особаго рода живой матеріи въ собственномъ смыслѣ, такъ какъ въ тѣлахъ одушевленныхъ найдены элементы совершенно тождественные съ тѣми, изъ которыхъ состоятъ тѣла неодушевленныя. Далѣе, въ послѣднихъ тѣлахъ легко подмѣтить самостоятельную дѣятельность, совершенно аналогичную съ дѣятельностью живыхъ тѣлъ, но только менѣе разнообразную. Если бы даже всѣ матеріальныя молекулы не имѣли другихъ свойствъ, кромѣ тяжести, то и этого было бы достаточно, чтобы воспрепятствовать физику смотрѣть на нихъ, какъ на тѣла пассивныя по существу. Было бы безполезно стараться представить тѣла вполнѣ инертными и при проявленіи дѣйствія силы тяжести, утверждая, что при паденіи они только повинуются притяженію земного шара. Если бы такое разсужденіе и было вполнѣ справедливо, то оно очевидно, только перемѣстило бы трудность вопроса, такъ какъ способность самостоятельныхъ дѣйствій, которую мы отняли бы у отдѣльныхъ частицъ, была бы перенесена на всю массу земли. Кромѣ того, ясно, что при своемъ паденіи къ центру земли тяжелое тѣло точно такъ же активно, какъ и самая земля, ибо доказано, что каждая частица тѣла притягиваетъ равную ей частицу земли такъ же, какъ сама притягивается ею, хотя, въ виду громаднаго неравенства массъ, только послѣднее притяженіе производитъ замѣтное дѣйствіе. Наконецъ, въ цѣлой массѣ другихъ явленій совершенно общаго характера, тепловыхъ, электрическихъ или химическихъ, матерія обнаруживаетъ передъ нами, очевидно, весьма разнообразную и самостоятельную способность дѣйствія, и мы не можемъ представить себѣ матеріи, совершенно лишенной этой способности.

Въ этомъ отношеніи живыя тѣла представляютъ собою въ дѣйствительности только ту особенность, что они обнаруживаютъ, кромѣ вышеприведенныхъ видовъ самостоятельныхъ дѣйствій, еще нѣкоторыя другія, свойственная имъ однимъ; впрочемъ, физіологи все болѣе и болѣе стремятся къ тому, чтобы и ихъ разсматривать, какъ простыя видоизмѣненія предъидущихъ. Какъ бы то ни было, неоспоримо, что то чисто пассивное состояніе, которое приписывается тѣламъ въ раціональной механикѣ, представляетъ собою съ точки зрѣнія физики несомнѣнный абсурдъ.

Разберемъ теперь, какимъ образомъ, не создавая новыхъ затрудненій, можно было ввести подобное предположеніе при установленіи отвлеченныхъ законовъ равновѣсія и движенія, и затѣмъ съ полнымъ удобствомъ примѣнять эти законы къ дѣйствительнымъ тѣламъ.

Для этого достаточно обратить вниманіе на приведенное выше важное предварительное замѣчаніе, что въ раціональной механикѣ движенія разсматриваются просто сами по себѣ, безъ всякаго отношенія къ способу ихъ происхожденія. Отсюда, очевидно, вытекаетъ, — если слѣдовать общепринятой терминологіи, — возможность замѣнять по желанію всякую силу другой силой какой угодно природы, лишь бы только она могла сообщить тѣлу совершенно то же самое движеніе. На основаніи этого очевиднаго соображенія понятно, что можно отвлечься отъ различныхъ силъ, присущихъ въ дѣйствительности самимъ тѣламъ, и считать, что они находятся подъ дѣйствіемъ только внѣшнихъ силъ, — такъ какъ вмѣсто внутреннихъ силъ можно подставить внѣшнія, механически равныя имъ. Такъ, напримѣръ, хотя всѣ тѣла по необходимости имѣютъ вѣсъ, и мы не можемъ даже и представить себѣ въ дѣйствительности тѣла, не имѣющаго его, геометры изучаютъ въ отвлеченной механикѣ тѣла, какъ бы лишенныя предварительно этого свойства: послѣднее неявно включается въ число внѣшнихъ силъ, если разсматривается, какъ и слѣдуетъ, совершенно общая система силъ. Движется ли тѣло при паденіи подъ вліяніемъ внутренняго притяженія, или оно повинуется простому внѣшнему толчку, это безразлично для раціональной механики, если дѣйствительныя движенія были вполнѣ тождественны и можно поэтому отдать предпочтеніе послѣдней точкѣ зрѣнія. То же самое по необходимости должно имѣть мѣсто и для всякаго другого естественнаго свойства тѣлъ, и всегда можно замѣнить его предварительнымъ внѣшнимъ дѣйствіемъ, избраннымъ такъ, чтобы вызвать то же самое движеніе. Благодаря указанному обстоятельству и можно представлять себѣ всякое тѣло вполнѣ пассивнымъ; только по мѣрѣ того, какъ наблюденіе и опытъ укажутъ съ большею точностью законы этихъ внутреннихъ силъ, необходимо будетъ всякій разъ измѣнять соотвѣтствующимъ образомъ систему внѣшнихъ силъ, которая, по нашему предположенію, ихъ замѣняетъ, — а это часто будетъ приводить къ очень большимъ усложненіямъ. Напримѣръ, такъ какъ наблюденіе показало, что вертикальное движеніе тѣла вслѣдствіе его тяжести неравномѣрно, и непрерывно ускоряется, то это движеніе нельзя вовсе приравнять движенію, которое сообщило бы тѣлу одинъ ударъ, дѣйствіе котораго болѣе не возобновлялось бы, такъ какъ результатомъ удара являлась бы постоянная скорость. Необходимо, слѣдовательно, принять, что тѣло получало послѣдовательно, черезъ безконечно малые промежутки времени, безконечный рядъ безконечно малыхъ ударовъ, такъ что скорость, произведенная каждымъ изъ нихъ, будетъ непрерывно складываться съ скоростью, соотвѣтствующей совокупности предшествующихъ ударовъ, и полученное движеніе будетъ неопредѣленно мѣняться. Если опытъ показываетъ, что ускореніе движенія происходитъ равномѣрно, то должно предположить, что всѣ эти толчки постоянно равны между собою: во всякомъ другомъ случаѣ надо будетъ предположить между ними, какъ по отношенію къ направленію, такъ и по отношенію къ интенсивности соотношеніе, вполнѣ соотвѣтствующее дѣйствительному закону измѣненія движенія; ясно, что при такихъ условіяхъ подобная замѣна силъ будетъ всегда возможна.

Было бы безполезно останавливаться долго на доказательствахъ неизбѣжности предположенія, что тѣла находятся въ указанномъ совершенно пассивномъ состояніи, вслѣдствіе чего достаточно разсматривать только приложенныя къ нимъ внѣшнія силы, чтобы установить абстрактные законы равновѣсія или движенія. Понятно, что если бы съ самаго начала приходилось принимать во вниманіе всякое измѣненіе, которое тѣло можетъ произвести, вслѣдствіе присущихъ ему естественныхъ свойствъ, въ дѣйствіи на него каждой изъ внѣшнихъ силъ, то невозможно было бы установить въ раціональной механикѣ ни одного общаго положенія,—тѣмъ болѣе, что подобное видоизмѣненіе въ большинствѣ случаевъ далеко не извѣстно точно. Слѣдовательно, только вполнѣ отвлекаясь отъ него въ началѣ и принимая во вниманіе лишь взаимодѣйствіе силъ другъ на друга, мы получаемъ возможность основать абстрактную механику, и потомъ ужъ отъ нея перейти къ механикѣ конкретной, возстановляя естественныя активныя свойства тѣлъ, первоначально исключенныя изъ разсмотрѣнія. Это возстановленіе и на самомъ дѣлѣ составляетъ основное затрудненіе, испытываемое при переходѣ отъ абстрактнаго къ конкретному въ механикѣ,—затрудненіе, которое особенно ограничиваетъ въ дѣйствительности главныя примѣненія этой науки, тогда какъ теоретическая ея область сама по себѣ по необходимости безконечна. Чтобы дать представленіе о значеніи этого основнаго препятствія, можно сказать, что при современномъ состояніи математики только одно естественное и общее свойство тѣлъ мы безпрепятственно можемъ принимать во вниманіе,—это тяготѣніе, какъ земное, такъ и всеобщее; но и въ этомъ послѣднемъ случаѣ надо еще предположить, что форма тѣлъ достаточна проста.

Если же указанное свойство соединяется еще съ какими нибудь другими физическими обстоятельствами,—какъ то съ сопротивленіемъ среды, треніемъ и т. п.,—если даже предположить только, что тѣла находятся въ жидкомъ состояніи, то вліяніе этихъ условій на механическія явленія до сихъ поръ оцѣнивается еще крайне несовершеннымъ образомъ. Тѣмъ болѣе невозможно принимать въ разсчетъ электрическія и химическія свойства тѣла, и еще болѣе—свойства физіологическія. Поэтому наиболѣе важныя приложенія раціональной механики ограничены до сихъ поръ на самомъ дѣлѣ одними небесными явленіями, и то лишь явленіями нашей солнечной системы, гдѣ достаточно принять во вниманіе одно только общее притяженіе, законъ котораго простъ и хорошо опредѣленъ; тѣмъ не менѣе и этотъ законъ представляетъ трудности, которыхъ до сихъ поръ не умѣютъ преодолѣть вполнѣ, если только пожелаютъ точно оцѣнить всѣ второстепенныя дѣйствія, могущія оказать замѣтное вліяніе; отсюда видно, до какой степени должны усложняться вопросы при переходѣ къ земной механикѣ, большая часть явленій которой, даже и самыхъ простыхъ, вѣроятно, никогда не поддастся, вслѣдствіе слабости нашихъ дѣйствительныхъ средствъ, чисто раціональному и, несмотря на это, точному изслѣдованію на основаніи законовъ абстрактной механики, хотя знаніе этихъ законовъ, — очевидно, необходимое, — часто можетъ привести къ важнымъ *указаніямъ*.

Выяснивъ истинную природу основнаго взгляда на состояніе тѣлъ, которое мы имъ должны приписывать въ раціональной механикѣ, намъ остается еще разсмотрѣть общіе факты или *физическіе законы движенія*, имѣющіе послужить реальнымъ основаніемъ теорій, составляющихъ эту науку. Это важное объясненіе тѣмъ болѣе необходимо, что, — какъ я уже указывалъ выше—съ тѣхъ поръ какъ геометры уклонились съ пути, которому слѣдовалъ Ньютонъ, истинный характеръ этихъ законовъ совершенно упущенъ изъ виду и обычный взглядъ на нихъ до сихъ поръ еще остается по существу метафизическимъ.

Основные законы движенія могутъ быть сведены, какъ мнѣ кажется. къ тремъ положеніямъ, на которыя нужно смотрѣть просто какъ на результаты наблюденія; было бы совершеннымъ абсурдомъ стараться установить ихъ реальность a priori, — хотя это часто пытались дѣлать.

Первый законъ очень неудачно называется *закономъ инерціи*. Онъ былъ открытъ Кеплеромъ. Собственно говоря, законъ этотъ заключается въ томъ, что всякое движеніе, по самой природѣ своей, прямолинейно и равномѣрно, — т. е., что всякое тѣло, которое подверглось мгновенному дѣйствію какой нибудь силы, движется непрерывно по прямой линіи съ неизмѣнною скоростью. Вліяніе духа метафизики особенно ясно обнаруживается въ обычномъ способѣ выраженія этого закона. Вмѣсто того, чтобы ограничиться указаніемъ на него, какъ на результатъ наблюденія, пытались доказать его абстрактно, примѣняя принципъ достаточнаго основанія, который самъ совершенно неустойчивъ. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы объяснить, напримѣръ, необходимость прямолинейнаго движенія, говорили, что тѣло должно двигаться по прямой линіи потому, что нѣтъ никакой причины, по которой оно уклонилось бы отъ своего первоначальнаго направленія скорѣе въ одну сторону, чѣмъ въ другую. Легко показать совершенную несостоятельность и даже полную недостаточность такой аргументаціи. Прежде всего, какъ можемъ мы удостовѣриться, что *нѣтъ основанія* для того, чтобы тѣло уклонилось съ своего пути? Что можемъ мы знать относительно этого предмета, если не прибѣгнемъ къ опыту? Не должны ли быть совершенно и по необходимости исключены изъ положительной философіи умозаключенія *a priori*, основанныя на *природѣ* вещей?

Кромѣ того, указанный принципъ, даже если его принять, допускаетъ только неясное и произвольное примѣненіе. Ибо понятно, что въ самомъ началѣ движенія, — т. е. въ тотъ самый моментъ, когда этотъ аргументъ долженъ быть примѣненъ, — траекторія тѣла вовсе еще не имѣетъ опредѣленнаго геометрическаго характера, и только послѣ того, какъ оно прошло извѣстное разстояніе, можно опредѣлить, какую линію оно описываетъ. Изъ соображеній геометрическихъ очевидно, что вмѣсто того, чтобы разсматривать начальное движеніе какъ прямолинейное, можно было бы безразлично считать его круговымъ, параболическимъ, или совершающимся по какой угодно другой линіи, касательной къ дѣйствительной траекторіи; такимъ образомъ, примѣнивъ тотъ же самый аргументъ къ каждой изъ этихъ линій, — что было бы вполнѣ законно, — мы пришли бы къ совершенно неопредѣленному заключенію. Стоитъ немного вникнуть въ это разсужденіе, чтобы сейчасъ же признать, что оно, какъ и всѣ мнимыя метафизическія объясненія, сводится въ дѣйствительности къ повторенію въ отвлеченныхъ выраженіяхъ самаго факта и къ утвержденію, что всѣ тѣла имѣютъ естественное стремленіе двигаться прямолинейно,— а именно это положеніе и требовалось доказать. Ничтожность этихъ туманныхъ и произвольныхъ разсужденій сдѣлается совершенно очевидной, если замѣтить, что на основаніи подобнаго же рода аргументовъ философы древности,—и въ особенности Аристотель,—признавали, наоборотъ, за наиболѣе естественное движеніе для звѣздъ движеніе по окружности, какъ наиболѣе *совершенное*; такое положеніе тоже представляетъ собою ничто иное, какъ абстрактное выраженіе плохо понятаго явленія.

Я ограничился изложеніемъ критики обыкновенныхъ доказательствъ одной первой части закона инерціи. Но совершенно аналогичныя замѣчанія можно сдѣлать и по поводу второй части, относительно неизмѣняемости скорости: послѣднюю также считали возможнымъ доказывать отвлеченно, ограничиваясь утвержденіемъ, что нѣтъ никакого основанія, чтобы тѣло когда-нибудь стало двигаться медленнѣе или быстрѣе, чѣмъ въ началѣ движенія.

Не такими разсужденіями можно прочно установить столь важный законъ, представляющій одинъ изъ необходимыхъ основаній всей раціональной механики: онъ реаленъ лишь постольку, поскольку мы его признаемъ за результатъ наблюденія. Но съ этой точки зрѣнія справедливость его обнаруживается на самыхъ общихъ фактахъ. Мы постоянно имѣемъ случаи убѣждаться, что тѣло, подвергнутое дѣйствію одной только силы, движется всегда по прямой линіи; если тѣло отклоняется отъ нея, то мы легко можемъ установить, что это измѣненіе происходитъ отъ одновременнаго дѣйствія какой-нибудь другой, активной или пассивной, силы; наконецъ, самыя криволинейныя движенія ясно показываютъ,—черезъ посредство различныхъ явленій, связанныхъ съ такъ называемой *центробѣжной силой*,—что тѣла постоянно сохраняютъ свое естественное стремленіе двигаться по прямой линіи. Можно сказать, что нѣтъ въ природѣ ни одного явленія, которое не могло бы представить намъ наглядной провѣрки этого закона; на немъ отчасти основана вся экономія вселенной. То же самое можно сказать и о равномѣрности движенія. Всѣ факты доказываютъ намъ, что если первоначально сообщенное движеніе постепенно все замедляется и, наконецъ, прекращается совсѣмъ, то это происходитъ отъ сопротивленія, встрѣчаемаго тѣломъ непрерывно, безъ котораго—какъ заставляетъ насъ думать опытъ—скорость безконечно оставалась бы постоянной, такъ какъ мы видимъ, что продолжительность движенія замѣтно увеличивается по мѣрѣ того, какъ мы уменьшаемъ значеніе этихъ препятствій. Извѣстно, что простое качаніе маятника, отклоненнаго отъ вертикали, качаніе которое при обыкновенныхъ условіяхъ могло продолжаться едва нѣсколько минутъ, продолжалось болѣе тридцати часовъ, во время опытовъ Борда въ обсерваторіи Парижа для опредѣленія отношенія длины секунднаго маятника къ метру, когда треніе въ точкѣ привѣса было насколько возможно уменьшено и тѣло заставили качаться въ почти пустомъ пространствѣ.

Геометры—и весьма основательно—приводятъ еще, какъ явное доказательство естественнаго стремленія тѣлъ сохранять до безконечности пріобрѣтенную ими скорость, строгую неизмѣнность, столь ясно наблюдаемую въ небесныхъ движеніяхъ, которыя, происходя въ крайне разрѣженной средѣ, находятся въ самыхъ благопріятныхъ условіяхъ для наиболѣе совершеннаго наблюденія закона инерціи: какъ точно ни изучаютъ небесныя тѣла уже двадцать столѣтій, ихъ движеніе не представляетъ ни малѣйшаго извѣстнаго намъ измѣненія ни относительно продолжительности обращеній, ни относительно возмущеній; впрочемъ теченіе времени и усовершенствованіе нашихъ средствъ наблюденія, вѣроятно, должны открыть намъ впослѣдствіи кое-какія измѣненія, до сихъ поръ намъ неизвѣстныя.

Итакъ, на самопроизвольное стремленіе всѣхъ тѣлъ двигаться прямолинейно и съ равномѣрною скоростью слѣдуетъ смотрѣть какъ на великій законъ природы. Въ виду крайней неясности общихъ предсталеній, относящихся къ этому первому основному принципу, было бы, быть можетъ, полезно замѣтить именно здѣсь, что этотъ законъ природы точно также примѣнимъ къ живымъ тѣламъ, какъ и къ неодушевленнымъ, хотя часто считается, что онъ установленъ исключительно для послѣднихъ. Откуда ни происходилъ бы толчекъ, полученный живымъ тѣломъ, оно стремится, какъ и тѣло неодушевленное, сохранить направленіе своего движенія и пріобрѣтенную скорость: только оно можетъ развить въ самомъ себѣ силы, способныя измѣнить или уничтожить это движеніе, тогда какъ въ другихъ тѣлахъ эти измѣненія происходятъ исключительно подъ вліяніемъ внѣшнихъ факторовъ. Но даже и въ этомъ случаѣ мы можемъ получить прямое и субъективное доказательство всеобщности закона инерціи, наблюдая то очень замѣтное усиліе, которое мы должны сдѣлать, чтобы измѣнить направленіе или скорость нашего дѣйствительнаго движенія,—настолько замѣтное, что, если наше движеніе очень быстро, то для насъ невозможно измѣнить или остановить его въ тотъ именно моментъ, когда мы это пожелаемъ.

Вторымъ основнымъ закономъ движенія мы обязаны Ньютону. Законъ этотъ заключается въ принципѣ постояннаго и необходимаго равенства дѣйствія и противодѣйствія, — иначе говоря въ томъ, что всякій разъ, когда одно тѣло какимъ нибудь образомъ приводится въ движеніе другимъ, первое оказываетъ на него въ обратномъ направленіи такое дѣйствіе, что второе тѣло, если принять въ разсчетъ ихъ массы, теряетъ количество движенія, въ точности равное пріобрѣтенному первымъ. Нѣсколько разъ пытались вывести a priori и эту общую теорему естественной философіи,—но это для нея такъ же невыполнимо, какъ и для предыдущей; однако, указанная теорема была предметомъ софистическихъ умозаключеній въ гораздо меньшей степени и теперь уже почти всѣ геометры согласились смотрѣть на нее, слѣдуя взгляду Ньютона, какъ на простой результатъ наблюденія; это избавляетъ меня отъ разсужденій, подобныхъ приведеннымъ выше по поводу закона инерціи. Равенство взаимодѣйствія тѣлъ другъ на друга имѣетъ мѣсто во всѣхъ явленіяхъ природы, независимо отъ того, проявляется ли дѣйствіе въ толчкѣ, или въ притяженіи; было бы излишнимъ приводить здѣсь примѣры такого равенства Мы такъ часто имѣемъ случай устанавливать это взаимодѣйствіе въ нашихъ самыхъ обыденныхъ наблюденіяхъ, что не въ состояніи представить ни одного тѣла, дѣйствующаго на другое, не вызывая въ немъ противодѣйствія.

Я считаю нужнымъ по поводу этого второго закона движенія сдѣлать только одно замѣчаніе, которое мнѣ кажется важнымъ, и которое, впрочемъ, будетъ развито соотвѣтствующимъ образомъ въ семнадцатой лекціи.

Оно заключается въ томъ, что извѣстный принципъ д'Аламбера, на основаніи котораго можно такъ удачно преобразовать всѣ вопросы динамики въ простыя задачи статики, есть на самомъ дѣлѣ не что иное, какъ полное обобщеніе закона Ньютона, распространеннаго на какую-угодно систему силъ.

Въ самомъ дѣлѣ, этотъ принципъ, очевидно, совпадаетъ съ принципомъ равенства дѣйствія и противодѣйствія, если разсматривать только двѣ силы. Указанное соотношеніе позволяетъ разсматривать отнынѣ общее предложеніе д'Аламбера какъ основанное на опытѣ, тогда какъ до сихъ поръ оно устанавливалось обыкновенно только на мало удовлетворительныхъ абстрактныхъ разсужденіяхъ.

Третій основный законъ движенія состоитъ, какъ мнѣ кажется, въ томъ, что я предлагаю назвать принципомъ *независимости* или *совмѣстимости движеній*, и что непосредственно приводитъ къ такъ называемому сложенію силъ. Истиннымъ творцомъ этого закона былъ, собственно говоря, Галилей, хотя онъ понималъ его вовсе не въ той именно формѣ, которую я считаю нужнымъ предпочесть теперь. Съ наиболѣе простой точки зрѣнія этотъ законъ сводится къ тому общему факту, что всякое движеніе, совершенно одинаковое для всѣхъ тѣлъ какой-нибудь системы, совсѣмъ не измѣняетъ частныхъ движеній этихъ различныхъ тѣлъ относительно другъ друга,—движеній, которыя совершаются неизмѣнно, какъ будто бы вся совокупность системы была неподвижна.

Чтобы выразить этотъ важный принципъ съ полною точностью, не требующей никакихъ другихъ оговорокъ, надо представить себѣ, что всѣ точки описываютъ одновременно параллельныя и равныя прямыя, и это общее движеніе, съ какой скоростью и въ какомъ направленіи оно бы ни совершалось, нисколько не повліяетъ на относительныя движенія.

Было бы тщетно пытаться установить a priori, съ помощью какого-нибудь умозрѣнія, этотъ великій основный законъ: подобная попытка такъ же мало выполнима, какъ и относительно двухъ предшествующихъ законовъ. Можно было бы, самое большее, замѣтить, что если тѣла системы находятся въ покоѣ относительно другъ друга, то указанное общее перемѣщеніе, не измѣняющее, очевидно, ни ихъ разстояній, ни ихъ относительныхъ положеній, не могло бы измѣнить и относительнаго ихъ покоя; но абсолютное и неизбѣжное невѣдѣніе наше относительно внутренней природы тѣлъ и явленій не позволяетъ намъ утверждать съ полною увѣренностью, на основаніи однихъ умозаключеній, что введеніе этого новаго обстоятельства не измѣнитъ неизвѣстнымъ намъ образомъ первоначальныхъ условій системы.

Недостаточность приведенной аргументаціи дѣлается особенно замѣтной, если попытаться примѣнить ее къ болѣе широкому и важному случаю,—къ случаю, когда различныя тѣла системы находятся въ движеніи относительно другъ друга. Стараясь насколько возможно отвлечься отъ столь общеизвѣстныхъ и разнообразныхъ наблюденій, которыя заставляютъ насъ признать физическую точность разсматриваемаго принципа, легко показать, что никакое теоретическое разсужденіе не даетъ намъ права заключить a priori, что общее движеніе не вызоветъ никакихъ измѣненій въ частныхъ движеніяхъ.

Это замѣчаніе настолько вѣрно, что, когда Галилей въ первый разъ изложилъ указанный великій законъ природы, со всѣхъ сторонъ поднялось множество возраженій, имѣвшихъ цѣлью доказать a priori теоретическую невозможность подобнаго положенія; оно было единогласно признано только послѣ того, когда логическая точка зрѣнія была оставлена и замѣнена точкою зрѣнія экспериментальною.

Итакъ, этотъ законъ дѣйствительно можетъ быть прочно установленъ только какъ общій результатъ наблюденія и опыта. Съ этой же точки зрѣнія ни одно положеніе естественной философіи не основывается на столь многочисленныхъ, простыхъ, разнообразныхъ и легко провѣряемыхъ наблюденіяхъ, какъ указанный законъ.

Въ дѣйствительности не совершается ни одного динамическаго явленія, которое не могло бы представить собою яснаго доказательства этого закона; да и вся экономія вселенной была бы совершенно разстроена, если предположить, что его болѣе не существуетъ.

Такъ, напримѣръ, въ общемъ движеніи корабля, какъ бы быстро и по какому направленію оно ни совершалось, относительныя перемѣщенія происходятъ неизмѣнно, — исключая тѣхъ, которыя вызываются килевою и боковою качкой,—какъ будто бы корабль былъ неподвиженъ, и для наблюдателя, находящагося внѣ движенія, эти относительныя перемѣщенія складываются съ движеніемъ всего корабля. Точно также, мы постоянно видимъ, какъ общія перемѣщенія химическихъ печей или живыхъ тѣлъ нисколько не вліяютъ на происходящія въ нихъ внутреннія движенія. Чтобы привести наиболѣе важный примѣръ, обратимъ особенное вниманіе на тотъ фактъ, что движеніе земного шара нисколько не нарушаетъ механическихъ явленій, происходящихъ на его поверхности или въ его нѣдрахъ. Извѣстно, что незнаніе этого третьяго закона движенія и было главнымъ препятствіемъ научнаго характера, столь долгое время не допускавшимъ установленія теоріи Коперника; указанное обстоятельство представляло, дѣйствительно, непреодолимыя возраженія противъ нея, и до открытія Галилея приверженцы Коперника пытались возразить на нихъ только съ помощью совершенно пустыхъ метафизическихъ хитросплетеній. Но, съ тѣхъ поръ какъ движеніе земли было признано вполнѣ, геометры стали указывать на него,—и вполнѣ правильно,—какъ на фактъ, представляющій существенное подтвержденіе справедливости указаннаго закона. Лапласъ высказалъ по этому предмету очень остроумное соображеніе косвеннаго характера, которое я считаю полезнымъ привести здѣсь, такъ какъ оно открываетъ передъ нами провѣрку принципа независимости движеній путемъ постояннаго и весьма нагляднаго опыта. Это соображеніе состоитъ въ томъ, что если бы общее движеніе земли могло какимъ-нибудь образомъ измѣнять частныя движенія, происходящія на ея поверхности, то эти измѣненія, очевидно, не были бы одинаковы для движеній всѣхъ направленій, — эти движенія конечно подверглись бы различнымъ видоизмѣненіямъ въ зависимости отъ величины угла, образуемаго направленіемъ частныхъ движеній съ направленіемъ движенія земного шара. Такъ, напримѣръ, колебаніе маятника должно было бы представлять весьма замѣтное для насъ различіе въ зависимости отъ азимута вертикальной плоскости, въ которой происходитъ качаніе; этотъ азимутъ сообщалъ бы колебаніямъ то одинаковое направленіе съ движеніемъ земного шара, то направленіе отличное отъ него на большую или меньшую величину; между тѣмъ опытъ не обнаружилъ передъ нами ни малѣйшаго измѣненія въ этомъ отношеніи,—даже при изслѣдованіи явленія съ наибольшею точностью, какую допускаетъ современное состояніе нашихъ методовъ наблюденія.

Чтобы предупредить всякое неточное толкованіе и неправильное примѣненіе третьяго закона движенія, важно замѣтить, что, по самой природѣ своей, онъ относится только къ поступательнымъ движеніямъ, и что его ни въ какомъ случаѣ нельзя распространять на вращательныя движенія.

Поступательныя движенія, очевидно, единственныя, которыя могутъ быть строго одинаковы, какъ по скорости, такъ и по направленію для различныхъ частей системы. Это строгое равенство никогда не могло бы имѣть мѣста по отношенію къ вращательному движенію, ибо оно необходимо должно быть неодинаково для различныхъ частей системы въ зависимости отъ большаго или меньшаго разстоянія ихъ отъ центра вращенія. Вотъ почему всякое вращательное движеніе постоянно стремится измѣнить состояніе системы,—и измѣняетъ его на самомъ дѣлѣ, если условія связи различныхъ частей не оказываютъ достаточнаго сопротивленія. Такъ, напримѣръ, не общее поступательное движеніе корабля нарушаетъ частныя движенія; ихъ измѣненія происходятъ исключительно подъ вліяніемъ второстепенныхъ движеній,—боковой и килевой качки, которыя представляютъ собою движенія вращательныя. Если часы просто перенести въ какомъ нибудь направленіи съ какою угодно скоростью, но безъ малѣйшаго поворота,—они отъ этого никогда не испортятся; тогда какъ уже незначительнаго вращательнаго движенія достаточно, чтобы скоро испортить ихъ ходъ. Разница между вліяніемъ вращательнаго и поступательнаго движенія дѣлается особенно чувствительной, если повторить опытъ надъ живымъ тѣломъ.

Наконецъ, благодаря этому различію мы не имѣли возможности доказать дѣйствительность поступательнаго движенія земного шара при помощи однихъ только земныхъ явленій и его удалось обнаружить только благодаря наблюденіямъ надъ небесными тѣлами. Что же касается вращенія земли, то оно, благодаря тому, что величины центробѣжной силы въ различныхъ точкахъ земного шара не одинаковы, производятъ на его поверхности хотя и незначительныя, но весьма замѣтныя явленія, анализа которыхъ вполнѣ достаточно, чтобы убѣдиться въ существованіи этого вращенія независимо отъ всякихъ астрономическихъ наблюденій.

Если принципъ независимости или совмѣстимости движеній установленъ, то легко понять что онъ приводитъ прямо къ извѣстному элементарному правилу, обыкновенно прилагаемому къ такъ называемому *сложенію силъ*; послѣднее представляетъ собою на самомъ дѣлѣ только другой способъ разсмотрѣнія и выраженія третьяго закона движенія. Въ самомъ дѣлѣ, теорема о параллелограммѣ силъ, разсматриваемая съ точки зрѣнія наиболѣе положительной, заключается, собственно въ томъ, что если тѣлу сообщены одновременно два равномѣрныхъ движенія въ различныхъ направленіяхъ, то по совокупности этихъ движеній оно опишетъ діагональ параллелограмма, стороны котораго оно прошло бы въ то же самое время, если бы каждое движеніе было ему сообщено въ отдѣльности. Развѣ это правило не представляетъ прямого примѣненія принципа независимости движеній, на основаніи котораго частное движеніе тѣла по направленію извѣстной прямой нисколько не нарушается общимъ движеніемъ, перемѣщающимъ всю эту прямую параллельно самой себѣ вдоль нѣкоторой другой прямой? Послѣднее соображеніе тотчасъ приводитъ къ геометрическому построенію, выражаемому правиломъ параллелограмма силъ. Мнѣ казалось, что въ такомъ видѣ,—прямо какъ законъ природы или, по крайней мѣрѣ, какъ непосредственное проявленіе одного изъ наиболѣе великихъ ея законовъ,—и слѣдуетъ представлять эту основную теорему раціональной механики.

Таковъ, по моему мнѣнію, единственный истинно философскій способъ положительнаго доказательства этого важнаго предложенія, который окончательно разгонялъ бы всѣ метафизическія туманности, до сихъ поръ окружающія указанный законъ, и совершенно оградилъ бы его отъ дѣйствительныхъ возраженій. Всѣ мнимыя аналитическія доказательства, построенныя на чисто абстрактныхъ умозаключеніяхъ, которыя приводились одно за другимъ,—помимо того, что они обыкновенно основываются на неправильномъ толкованіи и невѣрномъ примѣненіи аналитическаго принципа однородности,—предполагаютъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, что это предположеніе само по себѣ *очевидно* въ извѣстныхъ частныхъ случаяхъ,—напримѣръ, когда двѣ силы дѣйствуютъ по одной и той же прямой; но такая очевидность можетъ явиться только какъ результатъ наблюденія надъ закономъ природы о независимости движеній; необходимость послѣдняго, такимъ образомъ, доказывается неопровержимо. Было бы странно въ самомъ дѣлѣ,—для всякаго, кто взглянулъ бы на этотъ вопросъ прямо съ философской точки зрѣнія,—что человѣческій духъ, при помощи простыхъ логическихъ сопоставленій, могъ такимъ образомъ открыть дѣйствительный законъ природы, вовсе не обращаясь къ внѣшнему міру.

Эта мысль представляетъ крайнюю важность для выясненія воззрѣній на раціональную механику; въ значительной степени уклоняясь отъ пути, которому обыкновенно слѣдуютъ въ настоящее время, я считаю необходимымъ представить тоже замѣчаніе еще съ одной точки зрѣнія, чтобы окончательно разъяснить его и показать, что несмотря на всѣ усилія геометровъ избавиться въ этомъ отношеніи отъ пользованія результатами опыта, физическій законъ независимости движеній остается скрыто,—и это по единогласному ихъ признанію,—однимъ изъ существенныхъ основаній механики, хотя онъ и излагается ими въ различной формѣ и въ различныхъ мѣстахъ.

Достаточно для указанной цѣли признать, что всѣ геометры, вмѣсто того чтобы излагать этотъ законъ прямо въ введеніи въ механику, приводятъ его гораздо позже, при установленіи принципа пропорціональности скоростей силамъ—необходимаго основанія обыкновенной динамики.

Чтобы вѣрно понять истинный характеръ разсматриваемаго вопроса, надо замѣтить, что отношенія двухъ силъ могутъ быть опредѣлены двумя различными способами: статически и динамически. Въ самомъ дѣлѣ, мы не всегда судимъ объ отношеніи двухъ силъ по большей или меньшей интензивности движеній, которыя онѣ могутъ сообщить одному и тому же тѣлу. Мы часто оцѣниваемъ ихъ просто путемъ разсмотрѣнія ихъ взаимнаго равновѣсія, считая равными такія силы, которыя, приложенныя въ противоположныхъ направленіяхъ по одной и той же прямой, взаимно уничтожаются, и считая одну силу вдвое, втрое и т. д. больше другой, если она уравновѣшиваетъ двѣ, три и т. д. силы, равныя и прямо противоположныя второй. Этимъ новымъ способомъ измѣренія силъ на самомъ дѣлѣ мы пользуемся такъ же часто, какъ и первымъ.

При этихъ условіяхъ вопросъ по существу заключается въ томъ, чтобы опредѣлить, являются-ли оба средства постоянно и необходимо равнозначущими, т. е. слѣдуетъ-ли изъ простого статическаго опредѣленія взаимнаго отношенія силъ, что онѣ, съ динамической точки зрѣнія, сообщатъ одной и той-же массѣ скорости, точно имъ пропорціональныя. Это соотношеніе вовсе не очевидно само по себѣ; въ лучшемъ случаѣ a priori можно будетъ сказать, что бо́льшія силы необходимо должны придавать бо́льшія скорости. Но только опытъ можетъ рѣшить, будетъ-ли скорость пропорціональна первой степени силы или какой-либо другой возрастающей ея функціи.

По мнѣнію всѣхъ геометровъ и въ частности Лапласа, для нахожденія истиннаго закона природы въ этомъ именно случаѣ и необходимо изслѣдовать общій фактъ независимости или совмѣстимости движеній.

Легко убѣдиться, слѣдуя разсужденіямъ Лапласа, что теорія пропорціональности скоростей силамъ является непосредственнымъ и неизбѣжнымъ слѣдствіемъ этого общаго факта, если примѣнить его къ двумъ силамъ, дѣйствующимъ въ одинаковомъ направленіи.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть тѣло подъ вліяніемъ нѣкоторой силы прошло опредѣленное разстояніе по нѣкоторой прямой; приложимъ къ этому тѣлу вторую силу, равную первой и дѣйствующую по тому же направленію: тогда, по закону независимости движеній, эта сила только перенесетъ весь отрѣзокъ прямой, по которой двигалось тѣло, на такое-же разстояніе въ то же время, не измѣняя движенія самаго тѣла по этой прямой. Поэтому, благодаря сложенію этихъ движеній, данное тѣло дѣйствительно пройдетъ разстояніе вдвое большее, чѣмъ разстояніе, соотвѣтствовавшее первоначальной силѣ. Таковъ единственный способъ, при помощи котораго можно установить общую пропорціональность скоростей силамъ: эту пропорціональность я не могу разсматривать, какъ четвертый основный законъ движенія, такъ какъ она входитъ въ третій законъ.

Очевидно, поэтому, что послѣ того, какъ общій законъ независимости движеній былъ признанъ въ механикѣ излишнимъ для установленія основного правила сложенія силъ, это послѣднее философское предложеніе пришлось по необходимости разсматривать вновь, какъ одну изъ необходимыхъ основъ науки, какъ только потребовалось доказать не менѣе важный законъ о пропорціональности силъ скоростямъ: это обстоятельство устраняетъ послѣднія сомнѣнія въ необходимости закона. Итакъ, къ какому-же дѣйствительному результату привели всѣ усилія ума, направленныя на то, чтобы устранить прямое введеніе въ основы механики этого важнаго факта? Только къ тому, что онъ какъ будто устраненъ въ статикѣ и принимается во вниманіе только при переходѣ къ динамикѣ. Все, стало быть, сводится въ дѣйствительности къ простой перестановкѣ. Ясно, что такой незначительный результатъ совершенно не соотвѣтствуетъ тѣмъ хитросплетеніямъ косвенныхъ методовъ, при помощи которыхъ онъ былъ достигнутъ, даже въ томъ случаѣ, если бы эти методы были логически-безупречны,— а намъ удалось ясно доказать противное.

Поэтому во всѣхъ отношеніяхъ будетъ лучше, если мы открыто и прямо будемъ подчиняться философскимъ требованіямъ науки, и, —

разъ она не можетъ обойтись безъ основанія, почерпнутаго изъ опыта,— ясно признаемъ это основаніе съ самаго начала. Никакимъ другимъ способомъ нельзя сдѣлать науки совершенно положительной, такъ какъ. не имѣя подобныхъ основъ, она навсегда сохранитъ нѣсколько метафизическій характеръ.

Таковы, слѣдовательно. три физическіе закона движенія, служащіе достаточной опытной основой для раціональной механики и позволяющіе человѣческому уму, простыми логическими операціями, не прибѣгая болѣе къ наблюденію внѣшняго міра, прочно и систематически установить зданіе науки. Хотя эти три закона мнѣ кажутся вполнѣ достаточными. я a priori не вижу никакой причины, которая препятствовала бы увеличенію ихъ числа. если удалось-бы дѣйствительно установить, что они не являются совершенно полными. Такое увеличеніе числа основныхъ законовъ я считаю очень легкимъ препятствіемъ для раціональнаго усовершенствованія науки. такъ какъ число законовъ, очевидно, никогда не можетъ возрасти до большихъ размѣровъ; но я предпочелъ бы, вообще говоря, установить однимъ или двумя законами болѣе, если для того, чтобы избѣжать такого увеличенія, было бы необходимо прибѣгать къ слишкомъ отвлеченнымъ разсужденіямъ, которыя, по самой природѣ своей, измѣнили бы положительный характеръ науки. Но совокупность только что изложенныхъ трехъ законовъ вполнѣ удовлетворяетъ, на мой взглядъ. всѣмъ существеннымъ условіямъ, поставленнымъ въ дѣйствительности самой природой теоріи раціональной механики. Въ самомъ дѣлѣ, первый законъ, — законъ Кеплера, — вполнѣ опредѣляетъ результатъ дѣйствія одной силы, дѣйствующей мгновенно; второй, — законъ Ньютона,—устанавливаетъ основное правило, по которому передается движеніе при дѣйствіи однихъ тѣлъ на другія; наконецъ, третій законъ, — законъ Галилея,—приводитъ непосредственно къ общей теоремѣ относительно сложенія движеній. Поэтому понятно, что вся механика равномѣрныхъ движеній или мгновенныхъ силъ вполнѣ можетъ быть разсматриваема, какъ прямое слѣдствіе совмѣстнаго примѣненія этихъ трехъ законовъ, которые по самой природѣ своей весьма точны и тотчасъ же могутъ быть выражены при помощи легко получаемыхъ аналитическихъ уравненій. Что же касается наиболѣе обширной и важной части механики, которая и представляетъ существенныя трудности, — т. е. механики перемѣнныхъ движеній или непрерывныхъ силъ,—то легко показать въ общемъ видѣ возможность ея приведенія къ элементарной механикѣ, характеръ которой только что былъ указанъ, съ помощью метода безконечно-малыхъ, позволяющаго для каждаго безконечно-малаго промежутка времени подставлять на мѣсто перемѣннаго движенія движеніе равномѣрное, — откуда непосредственно получаются дифференціальныя уравненія, относящіяся къ послѣднему классу движеній.

Будетъ, безъ сомнѣнія, очень важно установить въ слѣдующихъ лекціяхъ прямо и точно общій способъ примѣненія метода безконечно-малыхъ для рѣшенія обѣихъ основныхъ задачъ раціональной механики и тщательно изучить главные результаты, полученные такимъ образомъ геометрами относительно абстрактныхъ законовъ равновѣсія и движенія. Но уже теперь ясно, что механика имѣетъ своимъ дѣйствительнымъ основаніемъ всѣ три физическихъ закона, установленные выше, и что съ этихъ поръ весь трудъ становится чисто теоретическимъ и заключается только въ пріемахъ пользованія указанными законами для рѣшенія различныхъ общихъ вопросовъ.

Однимъ словомъ, отдѣленіе части науки, по необходимости физической, отъ части чистологической можетъ быть, мнѣ кажется, выполнено совершенно точнымъ и опредѣленнымъ образомъ.

Чтобы закончить этотъ общій обзоръ философскаго характера раціональной механики, намъ остается только разсмотрѣть вкратцѣ основныя отдѣлы науки; вторичныя подраздѣленія должны быть сдѣланы въ слѣдующихъ лекціяхъ.

Первое и самое важное естественное подраздѣленіе механики заключается въ различеніи вопросовъ двухъ родовъ, — въ зависимости отъ того, предполагается ли найти условія равновѣсія, или изучить законы движенія: отсюда вытекаетъ дѣленіе механики на *статику* и *динамику*. Достаточно указать на такое дѣленіе, чтобы дать прямо понять его общую необходимость. Кромѣ дѣйствительнаго различія по существу между этими двумя основными классами задачъ, легко понять a priori, что изслѣдованіе вопросовъ статики, вообще говоря, по самой ихъ природѣ гораздо легче, чѣмъ изслѣдованіе вопросовъ динамики.

Это обстоятельство существеннымъ образомъ вытекаетъ изъ того, что въ вопросахъ перваго рода,—какъ справедливо замѣчено,—дѣлаютъ *отвлеченіе отъ времени*; иначе говоря, такъ какъ явленіе, подлежащее изученію, мгновенно, то нѣтъ надобности принимать во вниманіе измѣненія, которыя могутъ претерпѣвать силы системы въ различныя послѣдовательные моменты времени. Въ каждый же вопросъ динамики, напротивъ, надо вводить въ разсмотрѣніе указанное обстоятельство, составляющее новый основный элементъ ея, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, ея главную трудность.

Вообще говоря изъ этого глубокаго различія вытекаетъ, что вся статика, если ее разсматривать какъ частный случай динамики, соотвѣтствуетъ только самой простой ея части, заключающей теорію равномѣрныхъ движеній, что мы и покажемъ отдѣльно въ слѣдующей лекціи.

Важность изложеннаго дѣленія очень ясно подтверждается общей исторіей истиннаго развитія человѣческаго разума. Въ самомъ дѣлѣ, мы видимъ, что древніе обладали нѣкоторыми весьма существенными основными свѣдѣніями относительно равновѣсія какъ твердыхъ, такъ и жидкихъ тѣлъ; въ этомъ особенно легко убѣдиться изъ превосходныхъ изслѣдованій Архимеда, хотя онѣ были еще очень далеки отъ дѣйствительно полной раціональной статики. Наоборотъ, динамика, даже и самая элементарная, была имъ совершенно неизвѣстна; первыми шагами этой вполнѣ современной науки мы обязаны Галилею.

Наиболѣе важное подраздѣленіе, которое слѣдуетъ установить въ механикѣ послѣ этого основнаго дѣленія, заключается въ отдѣленіи какъ въ статикѣ, такъ и въ динамикѣ, изученія твердыхъ тѣлъ отъ изученія жидкихъ. Какъ бы существенно ни было это подраздѣленіе, я ставлю его, слѣдуя методу, установленнымъ Лагранжемъ, на второй планъ, подчиняя первому; признавать его за основное дѣленіе, какъ это еще дѣлается въ обыкновенныхъ курсахъ механики, значило бы, мнѣ кажется, преувеличивать его вліяніе. Въ самомъ дѣлѣ, существенные принципы статики или динамики необходимо должны быть одни и тѣ же какъ для жидкихъ, такъ и для твердыхъ тѣлъ; жидкія тѣла требуютъ дополненія къ условіямъ, характеризующимъ систему, еще одного условія, вызываемаго измѣняемостью формы, которая, вообще говоря, и опредѣляетъ собственно механическое состояніе жидкостей.

Но, хотя мы и помѣстили разсматриваемое подраздѣленіе на соотвѣтствующее ему мѣсто, легко понять a priori его крайнюю важность и, вообще, оцѣнить, насколько оно должно увеличить основную трудность вопросовъ какъ въ статикѣ, такъ, главнымъ образомъ, и въ динамикѣ: полная независимость частицъ, характеризующая жидкія тѣла, заставляетъ разсматривать каждую частицу отдѣльно и, слѣдовательно, изучать всегда, даже въ самомъ простомъ случаѣ, систему, состоящую изъ безконечнаго множества различныхъ силъ. Отсюда для статики вытекаетъ введеніе изслѣдованій новаго рода, — изслѣдованій фигуры системы въ состояніи равновѣсія; вопросъ этотъ, по самой природѣ своей, очень труденъ, и его общее рѣшеніе до сихъ поръ мало подвинулось впередъ, даже для одного случая всемірнаго тяготѣнія. Но трудность еще ощутительнѣе въ динамикѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, возникающая здѣсь необходимость точно разсматривать собственное движеніе каждой частицы въ отдѣльности для дѣйствительно полнаго изученія явленія, съ точки зрѣнія аналитической, вводитъ въ вопросъ въ общемъ видѣ неразрѣшимое до сихъ поръ осложненіе; пока его удалось преодолѣть для самаго простого случая жидкаго тѣла, двигающагося подъ дѣйствіемъ одной земной тяжести, и то только при помощи очень непрочныхъ гипотезъ, — какова гипотеза Даніила Бернулли о параллельности слоевъ, въ значительной степени искажающая природу явленій.

Вообще говоря, теперь становится понятной неизбѣжность гораздо бо́льшей трудности гидростатики и, въ особенности, гидродинамики сравнительно съ статикой и динамикой въ собственномъ смыслѣ; послѣднія и въ самомъ дѣлѣ гораздо болѣе подвинулись впередъ.

Чтобы составить себѣ правильное общее представленіе объ этомъ основномъ различіи, слѣдуетъ добавить къ вышеизложенному, что опредѣленіе, при помощи котораго геометры въ раціональной механикѣ характеризуютъ различіе между твердыми и жидкими тѣлами, на самомъ дѣлѣ является относительно тѣхъ и другихъ тѣлъ лишь преувеличеннымъ и, слѣдовательно, не вполнѣ соотвѣтствующимъ дѣйствительности представленіемъ. Въ самомъ дѣлѣ, особенно по отношенію къ жидкимъ тѣламъ, ясно, что ихъ частицы въ дѣйствительности вовсе не находятся въ томъ состояніи строгой взаимной независимости, какое мы вынуждены предполагать въ механикѣ, подчиняя ихъ только требованію сохранять постоянный объемъ, если рѣчь идетъ о капельно-жидкомъ тѣлѣ, или, если имѣемъ дѣло съ газомъ, измѣнять объемъ, слѣдуя данной функціи давленія, — напримѣръ, обратно пропорціонально давленію, согласно съ закономъ Маріотта. Напротивъ, значительное число явленій природы обусловлено существеннымъ образомъ взаимнымъ сцѣпленіемъ частицъ жидкости; только связь между ними гораздо меньше, чѣмъ въ тѣлахъ твердыхъ.

Сцѣпленіе частицъ, которое исключается изъ разсмотрѣнія въ математическихъ жидкихъ тѣлахъ, и которое, какъ мнѣ кажется, почти невозможно принять надлежащимъ образомъ въ разсчетъ, влечетъ, какъ извѣстно, въ статикѣ, и, въ особенности, въ динамикѣ, весьма замѣтное различіе между дѣйствительными явленіями и явленіями, вытекающими изъ теоріи; напримѣръ,—истеченіе тяжелой жидкости изъ нѣкотораго опредѣленнаго отверстія, гдѣ наблюденіе относительно количества вытекшей въ данный промежутокъ времени жидкости замѣтно расходится съ теоріей.

Хотя математическое опредѣленіе твердаго тѣла гораздо точнѣе изображаетъ его дѣйствительное состояніе, однако во многихъ случаяхъ слѣдуетъ признать необходимость принимать въ разсчетъ и возможность, взаимнаго отдѣленія частицъ — отдѣленія, которое всегда будетъ имѣть мѣсто, если силы, приложенныя къ твердому тѣлу, достаточно велики; въ раціональной механикѣ такую возможность совершенно не принимаютъ во вниманіе. Это особенно легко показать на теоріи излома твердыхъ тѣлъ, которая, будучи едва намѣчена Галилеемъ, Гюйгенсомъ и Лейбницемъ, въ настоящее время находится въ очень несовершенномъ и даже неопредѣленномъ состояніи, несмотря на труды многихъ другихъ геометровъ; тѣмъ не менѣе, она имѣла бы большое значеніе для выясненія многихъ вопросовъ земной, и преимущественно промышленной, механики.

Нужно, однако, замѣтить по этому поводу, что послѣднее несовершенство одновременно и гораздо менѣе ощутительно, и менѣе важно, чѣмъ только что указанное несовершенство механики жидкихъ тѣлъ: оно не можетъ нисколько повліять на рѣшеніе задачъ небесной механики, представляющихъ на самомъ дѣлѣ,—какъ мы не разъ имѣли случай указывать, — главное и, вѣроятно, единственное примѣненіе раціональной механики, которое можетъ когда-либо стать дѣйствительно полнымъ.

Наконецъ, мы должны указать, вообще говоря, еще на одинъ пробѣлъ въ современной механикѣ, — пробѣлъ, правда, второстепенный, но имѣющій нѣкоторое значеніе, — именно на теорію класса тѣлъ, находящихся въ среднемъ состояніи между твердымъ и строго жидкимъ, — тѣлъ, которыя можно было бы назвать полу-жидкими или полу-твердыми; таковы, напримѣръ, съ одной стороны, пески, съ другой—жидкія студенистыя тѣла. Были представлены кое-какія теоретическія соображенія объ этихъ тѣлахъ подъ названіемъ *несовершенныхъ жидкостей*, особенно относительно поверхности ихъ въ состояніи равновѣсія, но ихъ собственная теорія никогда не была дѣйствительно установлена въ общемъ и прямомъ видѣ.

Таковы главные общіе пункты, которые я счелъ нужнымъ намѣтить въ краткихъ чертахъ, чтобы читатель могъ оцѣнить философскій характеръ, отличающій раціональную механику въ полномъ ея объемѣ.

Теперь намъ предстоитъ выяснить, — разсматривая съ той же философской точки зрѣнія дѣйствительный составъ науки, — какимъ образомъ этотъ второй общій отдѣлъ конкретной математики, столь обширный, столь существенный и столь трудный, при помощи ряда великихъ трудовъ выдающихся геометровъ, могъ подняться до той высокой степени совершенства, котораго онъ достигъ въ наше время въ замѣчательномъ трактатѣ Лагранжа, гдѣ всѣ абстрактные вопросы, какіе только могутъ явиться въ механикѣ, приводятся, на основаніи одного единственнаго принципа, къ чисто-аналитическимъ изысканіямъ, какъ мы это видѣли уже для геометрическихъ задачъ. Это изслѣдованіе будетъ предметомъ трехъ слѣдующихъ лекцій; изъ нихъ первая будетъ посвящена статикѣ, вторая—динамикѣ, а третья—изслѣдованію общихъ теоремъ раціональной механики.

Шестнадцатая лекція.

Общій обзоръ статики.

Вся раціональная механика можетъ быть изложена по двумъ методамъ, которые различны по существу и неравны по совершенству: можно разсматривать статику или непосредственно, или какъ частный случай динамики.

По первому методу пытаются непосредственно открыть достаточно общій принципъ равновѣсія и примѣняютъ его затѣмъ для нахожденія условій равновѣсія какихъ угодно системъ возможныхъ силъ.

По второму методу, наоборотъ, сначала находятъ, каково будетъ движеніе, вызванное мгновеннымъ дѣйствіемъ данныхъ силъ, и изъ этого уже выводятъ, каковы должны быть соотношенія между силами, чтобы движеніе было равно нулю.

Такъ какъ статика, по необходимости, обладаетъ большей простотой, чѣмъ динамика, то при самомъ появленіи раціональной механики могъ быть примѣненъ только первый методъ. Дѣйствительно, древніе знали только этотъ методъ; имъ были совершенно чужды какія бы то ни было, даже наиболѣе простыя, идеи динамики. Истинный основатель статики, Архимедъ, которому принадлежатъ всѣ существенныя понятія этой науки, извѣстныя древнему міру, началъ съ того, что установилъ условіе равновѣсія двухъ грузовъ, привѣшенныхъ къ концамъ прямолинейнаго рычага, — т. е. необходимость, чтобы вѣса этихъ грузовъ были обратно пропорціональны ихъ разстояніямъ отъ точки опоры рычага; затѣмъ онъ старался по возможности свести къ этому одному принципу изслѣдованіе соотношеній равновѣсія, свойственныхъ другимъ системамъ силъ. Точно также, въ статикѣ жидкихъ тѣлъ, онъ сначала устанавливаетъ свой знаменитый принципъ, что всякое тѣло, погруженное въ жидкость, теряетъ часть своего вѣса, равную вѣсу вытѣсненной жидкости, и затѣмъ для большого числа случаевъ выводитъ теорію устойчивости плавающихъ тѣлъ.

Но принципъ рычага самъ по себѣ не обладалъ достаточной общностью, чтобы его дѣйствительно можно было приложить къ опредѣленію условій равновѣсія всевозможныхъ системъ силъ. Какими остроумными соображеніями ни пытались расширить область его примѣненія, все таки къ нему удалось свести только системы, состоящія изъ параллельныхъ силъ. Что же касается силъ, направленія которыхъ пересѣкаются, то ихъ пытались сначала изслѣдовать аналогичнымъ путемъ, изобрѣтая новые прямые принципы равновѣсія, спеціально приноровленные къ этому болѣе общему случаю: изъ этихъ принциповъ слѣдуетъ прежде всего замѣтить удачную идею Стевена относительно равновѣсія системы двухъ грузовъ, расположенныхъ на двухъ наклонныхъ плоскостяхъ, прислоненыхъ другъ къ другу. Эта новая основная идея, быть можетъ, была-бы вполнѣ достаточной для пополненія пробѣла, оставленнаго въ статикѣ принципомъ Архимеда, такъ какъ Стевену удалось вывести изъ нея соотношенія равновѣсія между тремя силами, приложенными къ той-же точкѣ по крайней мѣрѣ для случая, когда двѣ изъ этихъ силъ перпендикулярны другъ къ другу; онъ даже замѣтилъ, что эти три силы относятся другъ къ другу, какъ стороны треугольника, углы котораго были-бы равны угламъ, образованнымъ данными тремя силами. Но, такъ какъ въ это же время Галилеемъ была создана динамика, то геометры отказались отъ прежняго прямого статическаго пути и предпочли при изысканіи условій равновѣсія примѣнять извѣстные уже законы сложенія силъ. При помощи этого послѣдняго метода Вариньонъ пришелъ къ истинной и общей теоріи равновѣсія системы силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, и вслѣдъ за нимъ д'Аламберъ установилъ, наконецъ, впервые уравненія равновѣсія любой системы силъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ твердаго тѣла неизмѣнной формы. Этотъ методъ и до настоящаго времени примѣняется чаще всего.

Но на первый взглядъ методъ Д'Аламбера кажется мало раціональнымъ: такъ какъ динамика сложнѣе статики, то совершенно неудобно ставить статику въ зависимость отъ нея. Въ самомъ дѣлѣ, съ философской точки зрѣнія было бы лучше, наоборотъ, свести, если возможно, статику къ динамикѣ—что и было сдѣлано впослѣдствіи.

Тѣмъ не менѣе надо признать, что для разсмотрѣнія статики, какъ частнаго случая динамики, достаточно создать только самую элементарную часть послѣдней,—теорію равномѣрныхъ движеній, и вовсе нѣтъ надобности имѣть теорію перемѣнныхъ движеній. Весьма важно точно объяснить это основное различіе.

Для этого замѣтимъ прежде всего, что существуютъ, вообще говоря, силы двухъ родовъ: 1°, силы, которыя я называю *мгновенными,*—какъ толчки, дѣйствующіе только при началѣ движенія и предоставляющія тѣло самому себѣ, лишь только оно пришло въ движеніи, 2°, силы, которыя довольно неточно называютъ *ускорительными* и которыя я предпочитаю называть *непрерывными*, какъ напр., притяженія, дѣйствующія на тѣло непрерывно во все время его движенія. Это раздѣленіе равносильно дѣленію движеній на *равномѣрныя* и *перемѣнныя*: ясно, что въ силу перваго изъ трехъ основныхъ законовъ движенія, изложенныхъ въ предшествующей лекціи, всякая мгновенная сила необходимо должна вызвать равномѣрное движеніе, тогда какъ всякая непрерывная сила, напротивъ, должна по самой природѣ своей сообщить тѣлу различныя перемѣнныя движенія. При этихъ условіяхъ очень легко понять a priori,—какъ я уже не разъ указывалъ,—что часть динамики, относящаяся къ мгновеннымъ силамъ или равномѣрнымъ движеніямъ, должна быть, безъ всякаго сравненія, безконечно проще другой части, относящейся къ непрерывнымъ силамъ или къ перемѣннымъ движеніямъ; въ ней то, главнымъ образомъ, и заключается вся трудность динамики. Первая часть на столько проста, что ее, во всей совокупности, можно разсматривать какъ непосредственное слѣдствіе трехъ основныхъ законовъ движенія, что я и отмѣтилъ особенно въ концѣ предшествующей лекціи. Поэтому теперь легко понять, вообще говоря, что только эта первая часть динамики и нужна для представленія статики, какъ частнаго случая динамики.

Въ самомъ дѣлѣ, явленіе равновѣсія, законы котораго требуется найти, очевидно, представляетъ собою по самой природѣ своей явленіе мгновенное, которое должно изучать, не принимая во вниманія времени. Разсмотрѣніе времени вводится только при изслѣдованіяхъ такъ называемой *устойчивости* равновѣсія; но эти изслѣдованія, собственно говоря, уже не составляютъ части статики и входятъ, по существу, въ составъ динамики. Однимъ словомъ,—согласно уже приведенному обычному афоризму—въ статикѣ всегда *отвлекаются отъ времени*. Отсюда слѣдуетъ, что въ статикѣ на всѣ силы, подлежащія изслѣдованію, можно смотрѣть какъ на мгновенныя, причемъ теоріи не теряютъ своей необходимой общности.

Во всякое время своего дѣйствія непрерывная сила, очевидно, всегда можетъ быть замѣнена мгновенной, механически равной ей,— т. е. такой, которая можетъ сообщить двигающемуся тѣлу такую же скорость, какую ему на самомъ дѣлѣ сообщаетъ въ этотъ моментъ данная сила. На самомъ дѣлѣ, вмѣсто этой мгновенной силы нужно будетъ для слѣдующаго безконечно-малаго промежутка времени подставить другую силу такого же рода, чтобы выразить дѣйствительное измѣненіе скорости; поэтому то въ динамикѣ, гдѣ разсматривается состояніе движущагося тѣла въ различные послѣдовательные моменты времени, мы, благодаря указанному измѣненію мгновенныхъ силъ, непремѣнно встрѣтимся съ основной трудностью, присущей самой природѣ непрерывныхъ силъ, только таже самая трудность представится въ другой формѣ. Но въ статикѣ, гдѣ приходится разсматривать силы лишь въ одинъ опредѣленный моментъ времени, вовсе не надо принимать въ разсчетъ подобныхъ измѣненій, и общіе законы равновѣсія, установленные, такимъ образомъ, въ предположеніи, что всѣ силы мгновенны, будутъ также примѣнимы и къ непрерывнымъ силамъ, съ тѣмъ лишь условіемъ, чтобы при такомъ примѣненіи вмѣсто каждой непрерывной силы была подставлена мгновенная сила, соотвѣтствующая ей въ этотъ моментъ.

Теперь ясно видно, какимъ образомъ абстрактную статику легко можно разсматривать, какъ простое примѣненіе наиболѣе элементарной части динамики, — той именно ея части, которая относится къ равномѣрнымъ движеніямъ. Наиболѣе удобный способъ осуществить это примѣненіе основывается на замѣчаніи, что если нѣкоторыя силы находятся въ равновѣсіи, то каждая изъ нихъ, взятая отдѣльно, можетъ быть разсматриваема какъ сила, уничтожающая результатъ совмѣстнаго дѣйствія всѣхъ другихъ.

Такимъ образомъ отысканіе условій равновѣсія сводится, вообще, къ выраженію, что одна какая нибудь изъ силъ системы равна и прямо противоположна *суммѣ* всѣхъ остальныхъ; поэтому при такомъ методѣ вся трудность заключается только въ опредѣленіи этой *суммы*,—т. е. въ *сложеніи* между собою данныхъ силъ. Для случая двухъ силъ это сложеніе выполняется непосредственно по третьему основному закону движенія; отсюда тотчасъ же вытекаетъ и сложеніе какого угодно числа силъ. Этотъ элементарный вопросъ представляетъ собою, какъ извѣстно, два существенно различныхъ случая, въ зависимости отъ того, сходятся ли направленія дѣйствія обѣихъ составляющхъ силъ, или онѣ направлены параллельно. Каждый изъ такихъ двухъ случаевъ можно разсматривать, какъ слѣдствіе другого; поэтому между геометрами возникло извѣстное разногласіе относительно способа установленія элементарныхъ законовъ сложенія силъ въ зависимости отъ того, который изъ случаевъ избирается за исходную точку. Но, не оспаривая полной возможности поступать иначе, я все таки считаю болѣе раціональнымъ, болѣе соотвѣтствующимъ философскимъ требованіямъ и болѣе согласнымъ съ духомъ разсматриваемой системы изложенія статики начинать съ сложенія сходящихся силъ, откуда, естественно, сложеніе параллельныхъ силъ вытекаетъ какъ частный случай, тогда какъ обратный выводъ можетъ быть сдѣланъ только при помощи косвенныхъ соображеній, которыя,—какъ бы остроумны они ни были,—непремѣнно носятъ отпечатокъ нѣкоторой искусственности.

Установивъ элементарные законы сложенія силъ, геометры, прежде чѣмъ примѣнить ихъ къ отысканію условій равновѣсія, подвергаютъ ихъ обыкновенно важному преобразованію, которое, хотя и не безусловно необходимо, однако приноситъ въ аналитическомъ отношеніи весьма большую пользу, вводя въ алгебраическое выраженіе условій равновѣсія огромное упрощеніе. Это преобразованіе заключается въ такъ называемой теоріи *моментовъ*, назначеніе которыхъ по существу заключается въ сведеніи въ аналитическомъ отношеніи всѣхъ законовъ сложенія силъ къ простому сложенію и вычитанію.

Слово *моментъ*, первоначальнный смыслъ котораго въ настоящее время совершенно измѣненъ, обозначаетъ теперь только абстрактное представленіе о произведеніи силы на нѣкоторое разстояніе. Какъ извѣстно, слѣдуетъ различать *моменты* двухъ родовъ: моменты относительно точки. обозначающія произведеніе силы на перпендикуляръ, опущенный изъ этой точки на направленіе силы, и моменты относительно плоскости, обозначающіе произведеніе силы на разстояніе точки ея приложенія отъ этой плоскости. Первые, очевидно, зависятъ только отъ направленія силы, и совсѣмъ не зависятъ отъ точки ея приложенія,—они, по самой природѣ своей, особенно удобны для теоріи непараллельныхъ силъ. Моменты второго рода, наоборотъ, зависятъ только отъ точки приложенія силы и вовсе не зависятъ отъ ея направленія: они по существу предназначены для теоріи параллельныхъ силъ. Ниже мы будемъ имѣть случай указать счастливую и важную идею г. Пуансо, которая помогла ему сообщить въ общемъ видѣ,—и наиболѣе естественнымъ образомъ,—прямое и конкретное толкованіе моментамъ того и другого рода, до него имѣвшимъ въ дѣйствительности только абстрактное значеніе.

Если понятіе о моментахъ установлено, то вся ихъ элементарная теорія заключается, по существу, въ слѣдующихъ двухъ общихъ и весьма замѣчательныхъ свойствахъ, легко доказываемыхъ съ помощью сложенія силъ: 1) если разсматривать систему силъ, лежащихъ въ одной и той же плоскости, хотя и расположенныхъ въ ней какъ угодно, то моментъ ихъ суммы относительно произвольной точки этой плоскости равенъ алгебраической суммѣ моментовъ всѣхъ слагаемыхъ относительно той же точки, если этимъ различнымъ моментамъ присвоить соотвѣтствующій знакъ, въ зависимости отъ направленія, въ которомъ каждая сила стремится повернуть плечо рычага около начала моментовъ, принимаемаго за постоянное; 2) если разсматривать систему параллельныхъ силъ.

расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ, то моментъ ихъ суммы относительно произвольной плоскости равенъ алгебраической суммѣ моментовъ всѣхъ слагаемыхъ относительно той же самой плоскости, причемъ знакъ каждаго момента опредѣляется, конечно, согласно съ обычными правилами, по знакамъ каждаго изъ множителей, его составляющихъ. Первая изъ этихъ двухъ основныхъ теоремъ была открыта Вариньономъ, — геометромъ, которому раціональная механика обязана очень многимъ и память котораго была достойнымъ образомъ возстановлена изъ несправедливаго забвенія Лагранжемъ. Пріемъ, при помощи котораго Вариньонъ доказываетъ эту теорему для случая двухъ слагаемыхъ,—откуда непосредственно вытекаетъ общій случай,—тоже очень замѣчателенъ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая моментъ каждой силы относительно какой нибудь точки какъ величину, очевидно, пропорціональную площади треугольника, имѣющаго эту точку своей вершиною, а основаніемъ— прямую, изображающую силу, Вариньонъ, слѣдуя закону параллелограмма силъ, представляетъ теорему о моментахъ сначала въ очень простой геометрической формѣ, доказывая, что если въ плоскости параллелограмма взять какую нибудь точку и разсматривать три треугольника, имѣющіе эту точку общею вершиною, а основаніями — двѣ смежныя стороны параллелограмма и соотвѣтствующую діагональ его, то треугольникъ, построенный на діагонали, всегда будетъ равновеликъ суммѣ или разности треугольниковъ, построенныхъ на двухъ сторонахъ; это предложеніе, какъ справедливо замѣчаетъ Лагранжъ, и само по себѣ представляетъ прекрасную теорему геометріи, независимо отъ пользы его въ механикѣ.

При помощи теоріи моментовъ легко выразить аналитическія соотношенія, которыя должны существовать между силами въ состояніи равновѣсія, разсматривая сначала для большей легкости два частныхъ случая: случай системы силъ, расположенныхъ какъ угодно въ одной и той же плоскости, и случай какой нибудь системы параллельныхъ силъ.

Каждая изъ такихъ двухъ системъ требуетъ, вообще говоря, трехъ уравненій равновѣсія, которыя заключаются: 1) для первой системы въ томъ, чтобы алгебраическія суммы произведеній каждой силы на косинусъ или на синусъ угла, образуемаго ею съ произвольно взятой въ плоскости системы постоянной прямой, равнялись, каждая въ отдѣльности, нулю, равно какъ и алгебраическая сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно какой нибудь точки этой плоскости; 2) для второй системы—въ томъ, чтобы равнялись нулю какъ алгебраическая сумма всѣхъ данныхъ силъ, такъ и алгебраическая сумма ихъ моментовъ, взятыхъ отдѣльно относительно двухъ различныхъ плоскостей, параллельныхъ общему направленію этихъ силъ. Разсмотрѣвъ предварительно эти два случая, легко вывести изъ нихъ случай системы какихъ угодно силъ. Для этого достаточно представить себѣ, что каждая сила системы разложена на двѣ, изъ которыхъ одна лежитъ въ опредѣленной плоскости, а другая перпендикулярна къ ней; такимъ образомъ данная система замѣнится совокупностью двухъ болѣе простыхъ вспомогательныхъ системъ, изъ которыхъ одна состоитъ изъ силъ, расположенныхъ въ одной и той же плоскости, другая—изъ силъ, перпендикулярныхъ къ этой плоскости и, слѣдовательно, параллельныхъ между собою. Но такъ какъ эти двѣ частныя системы, очевидно, не могутъ уравновѣсить другъ друга, то для того, чтобы равновѣсіе могло имѣть мѣсто для всей первоначальной системы, необходимо, чтобы каждая изъ обѣихъ частныхъ системъ была въ равновѣсіи; такимъ образомъ задача сводится къ двумъ уже предварительно разсмотрѣннымъ вопросамъ. Таковъ—по крайней мѣрѣ въ самомъ простомъ видѣ—способъ изложенія, въ случаѣ примѣненія къ статикѣ метода динамики, общаго изслѣдованія аналитическихъ условій равновѣсія для какой угодно системы силъ; впрочемъ, очевидно, было бы возможно, усложнивъ рѣшеніе, изслѣдовать задачу прямо во всей ея общности такъ, чтобы, обратно, оба предварительные случая вошли какъ простыя приложенія. Но какой бы путь ни былъ признанъ за наиболѣе удобный, для равновѣсія любой системы силъ всегда получатся слѣдующія шесть уравненій:

$$\Sigma P\cos\alpha = 0,\ \Sigma P\cos\beta = 0,\ \Sigma P\cos\gamma = 0,$$
$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0,\ \Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$

гдѣ P обозначаетъ величину какой нибудь изъ силъ системы, α, β, γ—углы, образуемые ея направленіемъ съ тремя выбранными произвольно постоянными прямоугольными осями, а x, y, z—координаты точки ея приложенія относительно этихъ трехъ осей; я ввожу здѣсь значекъ Σ чтобы обозначить сумму подобныхъ произведеній, соотвѣтствующихъ всѣмъ силамъ системы P, P', P'' и т. д.

Таковы, по существу, пріемы опредѣленія общихъ условій равновѣсія, если считать статику за частный случай элементарной динамики. Но, какъ бы простъ на самомъ дѣлѣ ни былъ этотъ методъ, было бы, очевидно, раціональнѣе вернуться къ методу древнихъ, освободивъ статику отъ соображеній динамики и приступая прямо къ изысканіямъ условій равновѣсія, разсматриваемаго какъ таковое при помощи достаточно общаго принципа равновѣсія, установленнаго непосредственно. Къ этому-то и начали стремиться въ дѣйствительности геометры, когда общія уравненія равновѣсія уже были открыты при помощи методовъ динамики. Но главнымъ побужденіемъ установить прямой методъ статики была причина философскаго характера,—болѣе высокаго порядка и въ то же время болѣе уважительная, чѣмъ потребность изложить статику съ болѣе совершенной въ логическомъ отношеніи точки зрѣнія. И намъ теперь очень важно разъяснить этотъ вопросъ, ибо такимъ именно путемъ Лагранжъ довелъ всю раціональную механику до той высокой степени философскаго совершенства, какою она съ тѣхъ поръ обладаетъ.

Указанная основная причина вытекаетъ изъ необходимости привести самые трудные и важные вопросы динамики, при изслѣдованіи ихъ въ общемъ видѣ, къ простымъ задачамъ статики. Мы съ особеннымъ вниманіемъ разсмотримъ въ слѣдующей лекціи знаменитый общій принципъ динамики, открытый д'Аламберомъ,—принципъ, при помощи котораго всякое изслѣдованіе относительно движенія тѣла или какой-угодно системы можетъ быть непосредственно обращено въ задачу о равновѣсіи.

Этотъ принципъ, какъ я уже указалъ въ предъидущей лекціи, является, съ философской точки зрѣнія, только наиболѣе общимъ выраженіемъ второго основного закона движенія; онъ уже около столѣтія служитъ постоянно исходнымъ пунктомъ для рѣшенія всѣхъ главныхъ задачъ динамики, и въ будущемъ, очевидно, его значеніе въ этомъ смыслѣ должно все болѣе возростать въ виду удивительной простоты, вносимой имъ въ самыя трудныя изысканія. Ясно, однако, что подобный способъ изслѣдованія требуетъ, со своей стороны, чтобы статика была обработана на основаніи прямого метода, а не выведена изъ динамики; наоборотъ, съ этой точки зрѣнія. динамика всецѣло основана на статикѣ.

Собственно говоря, мы не вступили-бы въ заколдованный кругъ, если-бы продолжали слѣдовать обычному пути, указанному нами выше, такъ какъ элементарная часть динамики, служащей основаніемъ статики, на самомъ дѣлѣ совершенно отлична отъ той части, которая можетъ быть изложена только при помощи приведенія ея къ статикѣ.

Очевидно, тѣмъ не менѣе, что при такомъ способѣ изложенія, совокупность раціональной механики обладала-бы крайне несовершеннымъ философскимъ характеромъ, въ виду частыхъ переходовъ отъ статической точки зрѣнія къ динамической. Словомъ, эта наука была-бы построена несоразмѣрно, и поэтому ей по самому существу не хватало-бы единства.

Окончательное усвоеніе и всеобщее примѣненіе принципа д'Аламбера сдѣлали необходимымъ для будущихъ успѣховъ человѣческаго ума коренное преобразованіе всей системы раціональной механики, чтобы, разсматривая статику прямо съ точки зрѣнія первоначальнаго достаточно общаго закона равновѣсія и сводя динамику къ статикѣ, дать всей наукѣ возможность пріобрѣсти уже несомнѣнный характеръ единства.

Въ этомъ и состоитъ истинно философскій переворотъ, произведенный Лагранжемъ въ его замѣчательномъ курсѣ *Аналитической Механики*: основная мысль этого труда всегда будетъ служить исходной точкой всѣхъ позднѣйшихъ работъ геометровъ надъ законами равновѣсія и движенія,—подобно тому, кавъ великая первоначальная идея Декарта, какъ мы это видѣли выше, должна постоянно направлять всѣ геометрическія теоріи.

Разсматривая изслѣдованія прежнихъ геометровъ относительно свойствъ равновѣсія, чтобы позаимствовать у нихъ прямой принципъ статики, который могъ-бы представить всю необходимую общность, Лагранжъ остановилъ свой выборъ на *принципѣ возможныхъ скоростей* *), сдѣлавшемся съ тѣхъ поръ столь знаменитымъ благодаря своимъ многочисленнымъ и важнымъ приложеніямъ. Этотъ принципъ, открытый сначала Галилеемъ для случая двухъ силъ, какъ общее свойство, обнаруживающееся при равновѣсіи всѣхъ машинъ, позднѣе былъ распространенъ Иваномъ Бернулли на какое угодно число силъ, составляющихъ какую-нибудь систему; затѣмъ уже Вариньонъ вѣрно замѣтилъ возможность общаго примѣненія его въ статикѣ.

Комбинація этого принципа съ принципомъ д'Аламбера привела Лагранжа къ пониманію и толкованію всей раціональной механики, какъ слѣдствія изъ одной только основной теоремы; сообщивъ ей, благодаря такой комбинаціи, строгое единство, онъ довелъ механику до самой высокой степени совершенства, какой только можетъ достигнуть наука въ философскомъ отношеніи.

Чтобы съ большею легкостью и яснѣе понять общій принципъ возможныхъ скоростей, полезно еще разсмотрѣть его сначала въ простомъ случаѣ двухъ силъ, какъ это сдѣлалъ Галилей. Принципъ для этого

*) Въ руководствахъ механики на русскомъ языкѣ часто вмѣсто буквальнаго перевода „возможныя скорости“ (vitesses virtuelles) вводится терминъ „возможныя перемѣщенія“. *Прим. перев.*

случая заключается въ томъ, что если двѣ силы уравновѣшиваютъ другъ друга при помощи какой-нибудь машины, то онѣ обратно пропорціональны пространствамъ, которыя прошли бы въ направленіи ихъ дѣйствія точки ихъ приложенія, если предположить, что системѣ сообщено безконечно малое движеніе: эти пространства носятъ названіе возможныхъ скоростей, въ отличіе отъ дѣйствительныхъ скоростей, которыя на самомъ дѣлѣ имѣли бы мѣсто, если бы равновѣсія не существовало.

Въ первоначальномъ своемъ видѣ этотъ принципъ, допуская весьма удобную провѣрку относительно всѣхъ извѣстныхъ машинъ, доставляетъ уже большую практическую пользу благодаря чрезвычайной легкости, съ которой онъ позволяетъ получить въ дѣйствительности математическія условія равновѣсія всякой машины, даже если ея устройство совсѣмъ неизвѣстно.

Называя *возможнымъ моментомъ* или просто *моментомъ*,—согласно первоначальному значенію, которое давали этому термину геометры, — произведеніе каждой силы на ея возможную скорость,—произведеніе, на самомъ дѣлѣ измѣряющее работу силы для приведенія машины въ движеніе,—можно въ значительной степени упростить выраженіе принципа, сказавъ только, что въ этомъ случаѣ для равновѣсія моменты обѣихъ силъ должны быть равны и противоположны по знаку; положительный или отрицательный знакъ каждаго момента опредѣляется по знаку возможной скорости, который согласно съ обычнымъ духомъ математической теоріи знаковъ считается положительнымъ или отрицательнымъ въ зависимости отъ того, упадетъ ли проекція точки приложенія силы вслѣдствіе воображаемаго нами фиктивнаго движенія на направленіе силы, или на его продолженіе.

Такое сокращенное выраженіе принципа возможныхъ скоростей особенно полезно для формулированія этого принципа въ общемъ видѣ, относительно совершенно произвольной системы силъ. Онъ заключается тогда въ томъ, что для равновѣсія алгебраическая сумма возможныхъ моментовъ всѣхъ силъ, опредѣленныхъ по указанному правилу, должна равняться нулю; такое условіе должно быть точно соблюдено относительно всѣхъ элементарныхъ движеній, которыя система можетъ имѣть благодаря приложеннымъ къ ней силамъ. Если обозначить черезъ P, P', P'' и т. д. данныя силы и, согласно обычному обозначенію Лагранжа, черезъ δp, $\delta p'$, $\delta p''$ и т. д. соотвѣтствующія возможныя скорости, то принципъ выразится непосредственно уравненіемъ

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' + \text{ и т. д.} = 0$$

или короче

$$\int P\delta p = 0;$$

благодаря трудамъ Лагранжа, мы можемъ считать, что вся раціональная механика заключается неявнымъ образомъ въ этомъ уравненіи.

Что же касается статики, то основная трудность надлежащаго развитія этого общаго уравненія, если всѣ силы, которыя надо принять въ разсчетъ, будутъ вполнѣ извѣстны, сведется по существу къ чисто аналитическому затрудненію, заключающемуся въ томъ, чтобы въ каждомъ случаѣ отнести всѣ безконечно малыя варіаціи δp, $\delta p'$, $\delta p''$ и т. д., согласно съ характеризующими разсматриваемую систему условіями связей, къ возможно меньшему числу дѣйствительно независимыхъ варьяцій; тогда можно будетъ отдѣльно приравнять нулю различныя группы членовъ, относящихся къ каждой изъ этихъ послѣднихъ варьяцій, благодаря чему для равновѣсія получится столько различныхъ уравненій, сколько могло существовать дѣйствительно различныхъ элементарныхъ движеній при извѣстной природѣ данной системы силъ.

Если предположить, что силы совершенно произвольны и что онѣ приложены къ различнымъ точкамъ твердаго тѣла, на которое не наложено никакихъ особыхъ условій, то можно также непосредственно и самымъ простымъ образомъ получить шесть общихъ уравненій равновѣсія, найденныхъ выше по методу динамики. Если твердое тѣло, вмѣсто того, чтобы быть совершенно свободнымъ, должно быть болѣе или менѣе стѣснено, то достаточно, опредѣливъ надлежащимъ образомъ сопротивленія, вытекающія изъ такихъ связей, ввести ихъ въ число силъ системы; тогда прибавится нѣсколько новыхъ членовъ въ основномъ уравненіи. То же самое имѣетъ мѣсто, когда форму тѣла нельзя предполагать строго неизмѣнной, напримѣръ, когда приходится принимать во вниманіе его упругость. Съ логической точки зрѣнія, вліяніе такого рода измѣненій обнаруживается только въ томъ, что въ большей или меньшей степени усложняется уравненіе возможныхъ скоростей, но при этомъ оно вовсе не перестаетъ сохранять свою необходимую всеобщность, хотя иногда эти второстепенныя условія могутъ сдѣлать совершенно непреодолимыми чисто аналитическія трудности, которыя возникаютъ при дѣйствительномъ рѣшеніи предложеннаго вопроса.

Пока теорему о возможныхъ скоростяхъ признавали только за общее свойство равновѣсія, для повѣрки ея справедливости было достаточно постояннаго согласованія съ обычными законами равновѣсія, полученными уже другимъ путемъ, и она являлась, благодаря своей простотѣ и однообразію, очень полезной формулировкой этихъ законовъ.

Но для того, чтобы сдѣлать эту теорему дѣйствительнымъ основаніемъ всей раціональной механики, однимъ словомъ, чтобы обратить ее въ истинный принципъ, необходимо было доказать ее прямо, не выводя изъ какого-нибудь другого принципа, или, по крайней мѣрѣ, принимая только такія первоначальныя положенія, которыя по своей крайней простотѣ могутъ быть представлены, какъ непосредственно найденныя.

Эта задача была очень удачно выполнена Лагранжемъ въ его остроумномъ доказательствѣ, основанномъ на принципѣ блоковъ, гдѣ онъ съ замѣчательною легкостью подтверждаетъ теорему возможныхъ скоростей въ общемъ видѣ, вводя въ разсмотрѣніе одно тяжелое тѣло, замѣняющее одновременно, при помощи надлежащимъ образомъ устроенныхъ блоковъ, всѣ силы системы. Съ тѣхъ поръ неоднократно предлагали нѣкоторыя другія прямыя и общія доказательства принципа возможныхъ скоростей, но они гораздо сложнѣе доказательства Лагранжа и въ дѣйствительности нисколько не превосходятъ его въ смыслѣ логической строгости. Мы же, съ философской точки зрѣнія, должны видѣть въ этой теоремѣ неизбѣжное слѣдствіе основныхъ законовъ движенія, изъ которыхъ она можетъ быть выведена различными способами, и затѣмъ уже эта теорема дѣлается въ дѣйствительности точкой отправленія всей раціональной механики.

Такъ какъ введеніе такого принципа доводитъ всю науку до совершеннаго единства, то теперь нахожденіе другихъ принциповъ, еще болѣе общихъ,—если даже оно возможно—является весьма мало интереснымъ. Попытки, которыя могутъ быть задуманы для замѣны принципа возможныхъ скоростей какимъ-нибудь новымъ принципомъ, по самой ихъ природѣ, можно считать совершенно безцѣльными. Такая работа вовсе не могла бы еще усовершенствовать основной философскій характеръ раціональной механики, которая въ трактатѣ Лагранжа приведена въ настолько согласованную систему, насколько это только возможно. Въ самомъ дѣлѣ, тутъ можно имѣть въ виду только одну дѣйствительную пользу—значительно упростить аналитическія изысканія, къ которымъ приведена въ настоящее время наука; но такое упрощеніе должно казаться почти невозможнымъ, если принять во вниманіе, съ какою замѣчательною легкостью принципъ возможныхъ скоростей былъ приспособленъ Лагранжемъ для единообразнаго примѣненія математическаго анализа.

Таковъ несравненно самый совершенный способъ пониманія и толкованія статики, а затѣмъ и всей раціональной механики. Въ трудѣ, какимъ преимущественно является нашъ курсъ, мы не могли колебаться ни одного мгновенья, чтобы оказать этому методу явное предпочтеніе передъ всѣми другими, такъ какъ его главное характерное преимущество заключается въ усовершенствованіи до самой высокой степени философіи этой науки.

Послѣднее соображеніе въ нашихъ глазахъ должно имѣть больше значенія, чѣмъ невозможность примѣнить его въ обратномъ смыслѣ къ тѣмъ особымъ затрудненіямъ, которыя разсматриваемый принципъ часто еще представляетъ въ своихъ приложеніяхъ и которыя существеннымъ образомъ заключаются въ крайнемъ умственномъ напряженіи, вызываемомъ пользованіемъ принципомъ; это послѣднее затрудненіе можно считать присущимъ до извѣстной степени всякому очень общему методу, гдѣ какіе угодно вопросы приводятся къ единому принципу. Но тѣмъ не менѣе эти затрудненія до сихъ поръ еще настолько велики, что методъ Лагранжа нельзя считать дѣйствительно настолько элементарнымъ, чтобы въ догматическомъ преподаваніи можно было совершенно отказаться отъ разсмотрѣнія всякаго другого метода. Это и побудило меня изложить сначала съ нѣкоторыми подробностями методъ динамическій въ собственномъ смыслѣ слова—единственный методъ, примѣняемый повсюду.

Подобныя соображенія могутъ, однако, имѣть только временное значеніе; существенная причина главныхъ затрудненій, являющихся при примѣненіи точки зрѣнія Лагранжа, заключается въ дѣйствительности только въ ея новизнѣ. Подобному методу, несомнѣнно, вовсе не суждено быть навсегда предметомъ исключительнаго пользованія для весьма незначительнаго числа геометровъ, которые уже достаточно близко знакомы съ нимъ, чтобы надлежащимъ образомъ утилизировать его особыя замѣчательныя свойства; онъ навѣрное сдѣлается современемъ также популяренъ въ математическомъ мірѣ, какъ великая геометрическая идея Декарта, и очень правдоподобно, что этотъ общій успѣхъ былъ бы уже почти достигнутъ, если бы основныя понятія трансцендентнаго анализа были распространены шире.

Я считалъ бы, что я не охарактеризовалъ надлежащимъ образомъ всѣхъ существенныхъ философскихъ понятій, относящихся къ раціональной статикѣ, если бы я не упомянулъ теперь отдѣльно о новой весьма важной идеѣ, введенной въ науку г. Пуансо, идеѣ, въ которой я вижу самое крупное усовершенствованіе, съ философской точки зрѣнія, внесенное въ общую систему механики со времени возрожденія ея, достигнутаго Лагранжемъ, хотя это усовершенствованіе сдѣлано въ томъ же самомъ направленіи.

Легко видѣть, что я говорю объ остроумной и блестящей теоріи *паръ*, которую г. Пуансо такъ удачно выдвинулъ для усовершенствованія самыхъ основныхъ понятій раціональной механики; мнѣ кажется, что важность этой теоріи не была еще достаточно оцѣнена большинствомъ геометровъ.

Легко видѣть, что на эти пары или системы равныхъ, параллельныхъ и направленныхъ въ противоположныя стороны силъ, до г. Пуансо едва обращали вниманіе, какъ на какіе-то парадоксы статики; онъ воспользовался этимъ отдѣльнымъ понятіемъ, чтобы сдѣлать его предметомъ весьма обширной и совершенно оригинальной теоріи о преобразованіяхъ, сложеніи и примѣненіи этихъ особыхъ группъ силъ, которыя обладаютъ, какъ онъ показалъ, столь замѣчательными по своей общности и простотѣ свойствами.

Основныя свойства паръ заключаются, существеннымъ образомъ, въ слѣдующемъ: 1) въ смыслѣ направленія дѣйствіе пары силъ зависитъ только отъ направленія ея плоскости или оси, и нисколько не зависитъ ни отъ положенія этой плоскости, ни отъ положенія въ ней пары; 2) въ смыслѣ интенсивности дѣйствіе пары силъ, собственно говоря, не зависитъ ни отъ величины каждой изъ силъ, ее составляющихъ, ни отъ плеча рычага, на который онѣ дѣйствуютъ; оно зависитъ только отъ произведенія силы на разстояніе, названнаго г. Пуансо, и совершенно основательно,—*моментомъ* пары.

Приступая къ изысканію общихъ условій равновѣсія и принявъ собственно динамическій методъ, г. Пуансо представилъ равновѣсіе съ совершенно новой точки зрѣнія при помощи своей идеи о парѣ силъ,—идеи, которая замѣтнымъ образомъ упростила и разъяснила этотъ методъ.

Чтобы въ краткихъ чертахъ охарактеризовать здѣсь эту особую форму динамическаго метода, достаточно замѣтить, что если прибавить въ какой-нибудь точкѣ системы двѣ силы, равныя каждой изъ разсматриваемыхъ дѣйствующихъ силъ и направленныя въ обратныя стороны по прямой, параллельной направленію силы, то можно, нисколько, очевидно, не измѣняя состоянія данной системы, считать ее замѣненной: 1) системой силъ, равныхъ первоначальнымъ силамъ, перенесенныхъ, параллельно ихъ направленію, къ избранной точкѣ; такія силы можно будетъ, вообще, свести къ единственной силѣ; 2) системой паръ силъ, интенсивность которыхъ измѣряется моментами данныхъ силъ относительно этой же точки и которыя также можно будетъ свести, вообще, къ одной только парѣ, благодаря тому, что плоскости ихъ всѣхъ проходятъ черезъ ту же точку. Отсюда видно, какъ легко будетъ приступить теперь къ опредѣленію условій равновѣсія, ибо для этого достаточно будетъ найти по извѣстнымъ законамъ сложенія сходящихся силъ сумму ихъ и затѣмъ выразить, что она равняется нулю; далѣе, по законамъ, которые г. Пуансо установилъ для сложенія паръ силъ, найти точно также окончательную пару и также приравнять ее отдѣльно нулю; такъ какъ сила и пара силъ не могутъ взаимно уничтожаться, то ясно, что равновѣсіе можетъ существовать только при условіи, что сила и пара въ отдѣльности равны нулю.

Безъ сомнѣнія, слѣдуетъ признать, что нѣтъ необходимсти пользоваться этимъ новымъ пріемомъ для примѣненія динамическаго метода къ опредѣленію общихъ условій равновѣсія. Но, кромѣ чрезвычайнаго упрощенія, вносимаго пріемомъ г. Пуансо въ изслѣдованія подобнаго рода, мы особенно должны цѣнить, съ точки зрѣнія общаго прогресса науки, ту ясность, которую онъ неожиданно придаетъ механикѣ, представляя въ замѣчательно наглядномъ видѣ существенную часть условій равновѣсія,—ту именно часть, которая относится къ моментамъ данныхъ силъ и составляетъ наиболѣе важную половину уравненій статики.

Моменты, которые до сихъ поръ обозначали только чисто абстрактное понятіе, искусственно введенное съ статику для облегченія алгебраическаго выраженія законовъ равновѣсія, съ появленіемъ новаго пріема приняли совершенно точное конкретное значеніе и, представляя собою прямое измѣреніе паръ, являющихся непосредственнымъ результатомъ самыхъ силъ, вошли въ статическія разсужденія такъ же естественно, какъ и эти силы.

Легко видѣть a priori, какое облегченіе необходимо должно дать такое общее и элементарное толкованіе при комбинированіи всѣхъ идей, относящихся къ теоріи моментовъ: дѣйствительное доказательство такого облегченія видно, впрочемъ, уже въ томъ расширеніи и усовершенствованіи этой важной теоріи, которое достигнуто трудами самого г. Пуансо.

Каковы бы ни были въ дѣйствительности основныя достоинства идеи г. Пуансо при приложеніи къ статикѣ, тѣмъ не менѣе, мнѣ кажется, необходимо признать, что, по своей природѣ, она по существу предназначена именно для усовершенствованія динамики, и въ этомъ отношеніи я считаю возможнымъ утверждать, что эта идея вовсе еще не проявила своего главнаго вліянія. Въ самомъ дѣлѣ, слѣдуетъ признать, что эта идея можетъ прямо усовершенствовать въ очень важномъ отношеніи самые элементы общей динамики, такъ какъ она дѣлаетъ понятіе о вращательномъ движеніи столь же естественнымъ, столь же доступнымъ и почти столь же простымъ, какъ и понятіе о поступательномъ движеніи: пару такъ же можно считать естественнымъ элементомъ вращательнаго движенія, какъ силу—поступательнаго. Не здѣсь мѣсто выяснять еще точнѣе это соображеніе,—оно будетъ выражено надлежащимъ образомъ въ слѣдующихъ лекціяхъ. Мы должны только замѣтить вообще, что вполнѣ правильное примѣненіе теоріи паръ даетъ возможность сдѣлать изученіе вращательныхъ движеній, составляющее до сихъ поръ самую сложную и неясную часть динамики, такимъ же элементарнымъ и яснымъ, какъ и изученіе движеній поступательныхъ. Ниже мы будемъ имѣть случай на самомъ дѣлѣ показать, до какой степени простоты и ясности удалось г. Пуансо довести различныя относящіяся къ вращательнымъ движеніямъ существенныя положенія, которыя до него доказывались только съ очень большимъ трудомъ и косвеннымъ путемъ,—главнымъ образомъ положенія относительно площадей: онъ во многихъ важныхъ отношеніяхъ замѣтнымъ образомъ расширилъ ихъ область и сдѣлалъ стройнѣе ихъ примѣненіе, особенно относительно опредѣленія такъ называемой *постоянной плоскости*.

Чтобы пополнить эти философскія соображенія относительно всей совокупности статики, я считаю нужнымъ добавить здѣсь краткое указаніе на послѣднее общее понятіе, которое, мнѣ кажется, полезно ввести въ теорію равновѣсія, какой бы путь мы ни сочли наиболѣе удобнымъ для ея изложенія.

Мнѣ кажется, что если желаютъ составить себѣ правильное представленіе о природѣ различныхъ уравненій, выражающихъ условія равновѣсія какой-нибудь системы силъ, то недостаточно ограничиться только доказательствомъ, что для равновѣсія необходима система такихъ-то уравненій, и что эта система неизбѣжно устанавливаетъ равновѣсіе. Надо умѣть, кромѣ того, ясно опредѣлить точное статическое значеніе каждаго изъ этихъ уравненій, разсматриваемаго въ отдѣльности,—иначе говоря, надо точно опредѣлить, какимъ именно образомъ каждое уравненіе въ отдѣльности приводитъ къ установленію равновѣсія; такой анализъ уравненій обыкновенно вовсе не ставится цѣлью изслѣдованія, хотя онъ, безъ сомнѣнія, очень важенъ.

Какъ бы мы ни поступали при составленіи уравненій статики, ясно a priori, что равновѣсіе установится только при уничтоженіи всѣхъ элементарныхъ движеній, которыя можетъ получить тѣло подъ вліяніемъ приложенныхъ къ нему силъ, если только эти силы не связаны соотношеніями, необходимыми для ихъ взаимнаго полнаго уравновѣшенія. Такимъ образомъ каждое уравненіе, взятое въ отдѣльности, необходимо должно уничтожать одно изъ указанныхъ движеній, вслѣдствіе чего вся система этихъ уравненій приводитъ къ равновѣсію, такъ какъ тогда для тѣла всякое движеніе сдѣлается невозможнымъ.

Изслѣдуемъ теперь вкратцѣ общій принципъ, на основаніи котораго такой анализъ, какъ мнѣ кажется, можетъ быть произведенъ въ любомъ случаѣ.

Если разсматривать движеніе съ наиболѣе положительной точки зрѣнія, именно какъ простое перенесеніе тѣла изъ одного положенія въ другое, независимо отъ способа, которымъ такое перенесеніе можетъ быть осуществлено, то надо считать, очевидно, что всякое движеніе, въ самомъ общемъ случаѣ, состоитъ по необходимости одновременно изъ *поступательнаго* и *вращательнаго* движенія. Это не значитъ, конечно, что въ дѣйствительности не можетъ существовать поступательнаго движенія безъ вращательнаго, или вращательнаго безъ поступательнаго; но на эти два случая надо смотрѣть какъ на исключеніе, общій же случай дѣйствительно заключается въ совмѣстномъ существованіи этихъ двухъ родовъ движеній, постоянно сопровождающихъ другъ друга, если только не имѣютъ мѣста частныя, вполнѣ опредѣленныя и, слѣдовательно, очень рѣдкія условія, относящіяся къ обстоятельствамъ явленія. Это положеніе настолько вѣрно, что констатированіе только одного изъ этихъ движеній обыкновенно совершенно основательно считается геометрами, сознающими всю важность указаннаго элементарнаго наблюденія, сильнымъ поводомъ къ тому, чтобы, если не утверждать, то по крайней мѣрѣ съ большой вѣроятностью предполагать существованіе другого явленія. Такъ, напримѣръ, зная только вращательное движеніе солнца вокругъ его оси, вполнѣ доказанное со времени Галилея, геометры a priori считали почти достовѣрнымъ и поступательное движеніе этого небеснаго тѣла, сопровождаемаго всѣми своими планетами, хотя астрономы вовсе еще не начали признавать въ дѣйствительности, на основаніи прямыхъ наблюденій, существованіе этого поступательнаго движенія, направленіе котораго еще мало опредѣлено. Совершенно также, на основаніи подобнаго же соображенія, помимо заключеній по аналогіи, обыкновенно вполнѣ основательно допускаютъ существованіе вращательнаго движенія планетъ,—даже такихъ, относительно которыхъ его вовсе нельзя было доказать прямо,—только на основаніи того, что онѣ обладаютъ хорошо извѣстнымъ поступательнымъ движеніемъ вокругъ солнца.

Изъ этого перваго изслѣдованія вытекаетъ, что изъ уравненій, выражающихъ условія равновѣсія тѣла, подвергнутаго дѣйствію нѣкоторыхъ силъ, одни имѣютъ цѣлью уничтожить всякое поступательное движеніе, другія—сдѣлать невозможнымъ всякое вращеніе.

Посмотримъ теперь, съ той же точки зрѣнія, чтобы дополнить этотъ общій очеркъ, каково должно быть a priori число уравненій каждаго вида.

Относительно поступательнаго движенія достаточно замѣтить, что для того, чтобы воспрепятствовать тѣлу двигаться по какому-нибудь направленію, надо, очевидно, воспрепятствовать его движенію по направленію трехъ главныхъ осей, расположенныхъ въ различныхъ плоскостяхъ; ихъ обыкновенно предполагаютъ перпендикулярными другъ къ другу. Въ самомъ дѣлѣ, какое движеніе осуществимо, напримѣръ, для тѣла, которое не можетъ двигаться ни съ востока на западъ, ни съ запада на востокъ, ни съ сѣвера на югъ, ни съ юга на сѣверъ, ни, наконецъ, сверху внизъ, ни снизу вверхъ? Такъ какъ всякое движеніе въ какомъ-нибудь другомъ направленіи, очевидно, можно считать состоящимъ изъ частныхъ движеній, соотвѣтствующихъ этимъ тремъ основнымъ направленіямъ, то оно при указанныхъ условіяхъ по необходимости стало бы невозможнымъ. Съ другой стороны ясно, что нельзя разсматривать менѣе трехъ независимыхъ элементарныхъ движенія, такъ какъ тѣло могло бы двигаться въ направленіи одной изъ осей, не имѣя никакого поступательнаго движенія по направленію двухъ остальныхъ. Такимъ образомъ понятно, что вообще три уравненія—три условія—необходимы и достаточны, чтобы уравновѣсить поступательное движеніе какой-нибудь системы; каждое изъ нихъ должно въ частности уничтожать одно изъ трехъ элементарныхъ поступательныхъ движеній, которыя могли быть сообщены тѣлу.

Совершенно аналогичныя соображенія можно представить и относительно вращенія; тутъ встрѣчается одно только новое затрудненіе, —точное представленіе болѣе сложнаго механическаго образа.

Такъ какъ вращеніе тѣла въ плоскости или вокругъ какой-нибудь оси всегда можно представить себѣ разложеннымъ на три элементарныхъ вращенія въ трехъ плоскостяхъ координатъ или вокругъ трехъ осей, то ясно, что для уничтоженія всякаго вращенія тѣла точно также нужно воспрепятствовать отдѣльно его вращенію относительно каждой изъ этихъ трехъ плоскостей или осей. Такимъ образомъ для уравновѣшенія вращательнаго движенія необходимы и достаточны три уравненія, и собственно механическое назначеніе каждаго изъ нихъ можно понять съ такою же легкостью, какъ и въ предшествующемъ случаѣ.

Примѣняя предшествующее изслѣдованіе къ совокупности шести общихъ уравненій равновѣсія твердаго тѣла, подвергнутаго дѣйствію какихъ угодно силъ, приведенныхъ въ началѣ этой лекціи, легко признать, что первыя три уравненія относятся къ уравновѣшенію поступательнаго, остальныя три—вращательнаго движенія. Въ первой группѣ первое уравненіе препятствуетъ поступательному движенію по направленію оси x'овъ, второе—оси y'овъ и третье—оси z'овъ. Во второй группѣ первое уравненіе мѣшаетъ тѣлу вращаться въ плоскости xy, второе—въ плоскости xz и третье—въ плоскости yz. Отсюда можно ясно понять, какимъ образомъ совмѣстное существованіе всѣхъ этихъ уравненій необходимо устанавливаетъ равновѣсіе.

Разложеніе подобнаго рода было бы полезно еще для того, чтобы свести уравненія равновѣсія къ строго необходимому числу въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, когда приходится разсматривать болѣе или менѣе частную систему силъ, а не предполагать ее совершенно произвольной. Не входя здѣсь ни въ какія частныя подробности по этому вопросу, съ изложенной выше точки зрѣнія достаточно сказать, что частныя условія данной системы силъ сокращаютъ въ большей или меньшей степени возможныя движенія,—какъ поступательныя, такъ и вращательныя; точно опредѣливъ сначала въ каждомъ случаѣ,—что всегда не трудно сдѣлать,—въ чемъ состоитъ это ограниченіе, надо отбросить, какъ излишнія, уравненія равновѣсія, относящіяся къ поступательнымъ или вращательнымъ движеніямъ, которыя не могутъ имѣть мѣста, и сохранить только уравненія, относящіяся къ движеніямъ, остающимся возможными. Такимъ образомъ, въ зависимости отъ большаго или меньшаго ограниченія разсматриваемой частной системы силъ, можно, вмѣсто шести уравненій, необходимыхъ для равновѣсія вообще, ограничиться только тремя, двумя или даже однимъ уровненіемъ, которыя для каждаго случая будетъ легче получить.

Совершенно аналогичныя замѣчанія слѣдуетъ сдѣлать относительно ограниченія движеній, происходящаго не отъ особыхъ свойствъ системы силъ, а отъ болѣе или менѣе тѣсныхъ связей, дѣйствію которыхъ подвержено тѣло; въ извѣстныхъ случаяхъ, эти связи окажутъ подобное же вліяніе. Точно также было бы достаточно ясно различить, какія движенія невозможны по самой природѣ наложенныхъ условій и, уничтоживъ относящіяся къ нимъ уравненія равновѣсія, сохранить только тѣ, которыя относятся къ оставшимся свободными движеніямъ. Такъ напримѣръ, въ случаѣ какой угодно системы силъ мы найдемъ, что трехъ послѣднихъ уравненій достаточно для уровновѣшенія, если тѣло удерживается постоянною точкою, около которой оно можетъ свободно вращаться во всѣхъ направленіяхъ, но которая дѣлаетъ всякое поступательное движеніе для него невозможнымъ; точно также мы увидимъ, что число уравненій равновѣсія сведется, если существуютъ одновременно двѣ постоянныя точки, къ двумъ или даже къ одному, въ зависимости отъ того, можетъ ли тѣло скользить по оси, ихъ соединяющей, или нѣтъ; наконецъ, мы должны были бы признать, что равновѣсіе будетъ необходимо имѣть мѣсто безъ всякихъ условій,—каковы бы ни были силы системы, — если три точки твердаго тѣла, не лежащія на одной прямой, оказываются постоянными.

Наконецъ, можно еще примѣнить соображенія подобнаго рода и въ тѣхъ случаяхъ, когда точки, не будучи строго постоянными, принуждены только оставаться на данныхъ кривыхъ или поверхностяхъ.

Духъ намѣченнаго мною только что изслѣдованія, какъ видите, вовсе не зависитъ отъ того метода, при помощи котораго получены уравненія равновѣсія. Но все таки это правило примѣняется далеко не съ одинаково легкостью къ различнымъ общимъ методамъ; беспорно, методъ собствен статическій, основанный, какъ мы видѣли, на принципѣ возможныхъ скоростей, оказывается наиболѣе подходящимъ. Въ самомъ дѣлѣ, къ числу характерныхъ свойствъ изложеннаго принципа надо отнести совершенн ясность, съ которою онъ даетъ естественное объясненіе явленію равн вѣсія, разсматривая въ отдѣльности каждое элементарное движен